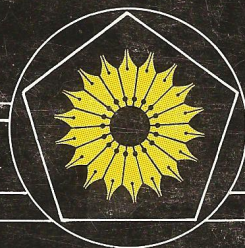


جورج توماس، راس فینی

حساب دیفرانسیل و انتگرال



وهندسه تحلیلی

جلد اول ۲



ترجمه مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

| صفحه | عنوان | صفحه | عنوان |
|------|--|------|--|
| ۱۱۸ | ۶.۲ مرور مختصری بر مثلثات | هفت | پیشگفتار |
| ۱۲۵ | ۷.۲ مشتق تابعهای مثلثاتی | ده | درآمد: حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟ |
| ۱۳۵ | ۸.۲ معادله‌های پارامتری | | فصل ۱ آهنگ تغییر تابع |
| ۱۳۵ | ۹.۲ روش نیوتن برای تقریب زدن جواب معادله‌ها | | چشم انداز |
| ۱۳۹ | ۱۰.۲ فرمولهای مشتق با نماد دیفرانسیل | ۱ | ۱.۱ مختصات برای صفحه |
| ۱۴۰ | پرسشها و تمرینهای مروری | ۱ | ۲.۱ شیب خط |
| ۱۴۱ | مسأله‌های گوناگون | ۴ | ۳.۱ معادله‌های خط |
| | فصل ۳ کاربرد مشتق | ۱۰ | ۴.۱ تابع و نمودار |
| | چشم انداز | ۱۷ | ۵.۱ قدر مطلق |
| ۱۴۸ | ۱.۳ رسم خم با استفاده از مشتق اول | ۲۹ | ۶.۱ خط مماس و شیب خمهای درجه دوم و سوم |
| ۱۴۸ | ۲.۳ تقعر و نقطه عطف | ۳۳ | ۷.۱ شیب خم $y = f(x)$: مشتق |
| ۱۵۳ | ۳.۳ مجانبها و تقارن | ۳۹ | ۸.۱ سرعت و سایر آهنگهای تغییر |
| ۱۵۸ | ۴.۳ نظریه ماکسیم و مینیم | ۴۵ | ۹.۱ حد |
| ۱۶۴ | ۵.۳ مسأله‌های ماکسیم و مینیم | ۵۰ | ۱۰.۱ حد و بینهایت |
| ۱۶۹ | ۶.۳ آهنگهای تغییر وابسته | ۶۳ | ۱۱.۱ پیوستگی |
| ۱۸۰ | ۷.۳ قضیه مقدار میانگین | ۶۹ | پرسشها و تمرینهای مروری |
| ۱۸۶ | ۸.۳ صورتهای مبهم و قاعده هوییتال | ۷۸ | مسأله‌های گوناگون |
| ۱۹۲ | ۹.۳ تقریبهای درجه دوم و خطاهای تقریب: تعمیم قضیه مقدار میانگین | ۷۹ | |
| ۱۹۷ | پرسشها و تمرینهای مروری | | فصل ۲ مشتق |
| ۲۰۲ | مسأله‌های گوناگون | ۸۵ | چشم انداز |
| ۲۰۳ | | ۸۵ | ۱.۲ تابعهای چند جمله‌ای و مشتق آنها |
| | فصل ۴ انتگرالگیری | ۹۱ | ۲.۲ حاصلضرب، توان، و خارج قسمت |
| | چشم انداز | ۹۸ | ۳.۲ مشتقگیری ضمنی و توانهای کسری |
| ۲۱۰ | ۱.۴ انتگرال نامعین | ۱۰۵ | ۴.۲ تقریب خطی و دیفرانسیل |
| ۲۱۰ | ۲.۴ انتخاب مقدار ثابت انتگرالگیری | ۱۱۲ | ۵.۲ قاعده زنجیری |
| ۲۱۶ | | | |

| | | | |
|-----|------|---|-----|
| ۳۸۸ | ۱۰۷ | فرومولهای اصلی انتگرالگیری | ۲۱۹ |
| ۳۹۵ | ۲۰۷ | انتگرالگیری جزء به جزء | ۲۲۳ |
| ۴۰۰ | ۳۰۷ | حاصلضربها و توانهای تابعهای مثلثاتی... | ۲۲۹ |
| ۴۰۹ | ۴۰۷ | توانهای زوج سینوسها و کسینوسها | ۲۳۸ |
| | ۵۰۷ | جانشانیهای مثلثاتی که در آنها تک جمله‌ایهای مربع به جای $u^2 - a^2$ ، $a^2 + u^2$ ، و $a^2 - u^2$ قرار می‌گیرند | ۲۴۳ |
| ۴۱۳ | ۶۰۷ | انتگرالهای شامل $ax^2 + bx + c$ | ۲۵۱ |
| ۴۱۹ | ۷۰۷ | انتگرالگیری از توابع گویا به روش کسرها ساده | ۲۵۲ |
| ۴۳۰ | ۸۰۷ | انتگرالهای غیرعادی | ۲۶۳ |
| ۴۳۹ | ۹۰۷ | استفاده از جدولهای انتگرالها | ۲۶۲ |
| ۴۴۲ | ۱۰۰۷ | فرومولهای کاهش توان | |
| ۴۴۶ | | پرسشها و تمرینهای مروری | |
| ۴۴۶ | | مسئله‌های گوناگون | |
| | | فصل ۸ مقاطع مخروطی و سایر خمهای مسطح | |
| ۴۵۲ | | چشم‌انداز | |
| ۴۵۵ | ۱۰۸ | معادله‌های حاصل از فرمول فاصله | |
| ۴۵۷ | ۲۰۸ | دایره | |
| ۴۶۰ | ۳۰۸ | سه‌می | |
| ۴۶۷ | ۴۰۸ | بیضی | |
| ۴۷۴ | ۵۰۸ | هذلولی | |
| ۴۸۱ | ۶۰۸ | نمودار معادلات درجه دوم | |
| ۴۸۵ | ۷۰۸ | سه‌می، بیضی یا هذلولی؟ مبین پاسخ می‌دهد | |
| ۴۸۷ | ۸۰۸ | مقاطع مخروطی | |
| ۴۸۹ | ۹۰۸ | معادلات پارامتری مقاطع مخروطی و خمهای دیگر | |
| ۴۹۷ | | پرسشها و تمرینهای مروری | |
| ۴۹۸ | | مسئله‌های گوناگون | |
| | | فصل ۹ تابعهای هیپربولیک | |
| ۵۰۲ | | چشم‌انداز | |
| ۵۰۴ | ۱۰۹ | تعریفها و اتحادها | |
| ۵۰۹ | ۲۰۹ | مشتقها و انتگرالها | |
| ۵۱۴ | ۳۰۹ | کابل آویزان | |
| ۵۱۹ | ۴۰۹ | تابعهای هیپربولیک معکوس | |
| ۵۲۵ | | پرسشها و تمرینهای مروری | |
| ۵۲۶ | | مسئله‌های گوناگون | |
| | | فصل ۱۰ مختصات قطبی | |
| ۵۲۸ | | چشم‌انداز | |
| ۵۲۸ | ۱۰۱۰ | دستگاه مختصات قطبی | |
| ۵۳۴ | ۲۰۱۰ | ترسیم نمودار در دستگاه مختصات قطبی | |
| | | فصل ۵ کاربرد انتگرال معین | |
| | | چشم‌انداز | |
| | ۲۶۸ | تغییر خالص مکان، ومسافتی که یک جسم متحرک می‌پیماید | |
| | ۲۶۸ | مساحت نواحی بین‌خمها | |
| | ۲۷۱ | محاسبه حجم به روش برش‌دادن. حجم اجسام دورانی | |
| | ۲۷۵ | محاسبه حجم به کمک و اشرها و پوسته‌های استوانه‌ای | |
| | ۲۸۱ | طول خمهای واقع در صفحه | |
| | ۲۸۸ | مساحت رویه‌های دورانی | |
| | ۲۹۲ | مقدار میانگین یک تابع | |
| | ۲۹۸ | گشتاور و مرکز جرم | |
| | ۳۰۲ | کار | |
| | ۳۱۱ | نیروی هیدرواستاتیکی | |
| | ۳۱۷ | پرسشها و تمرینهای مروری | |
| | ۳۲۰ | مسئله‌های گوناگون | |
| | ۳۲۰ | | |
| | | فصل ۶ تابعهای متعالی | |
| | | چشم‌انداز | |
| | ۳۲۶ | تابعهای معکوس یکدیگر | |
| | ۳۲۶ | تابعهای مثلثاتی معکوس | |
| | ۳۳۲ | مشتق تابعهای مثلثاتی معکوس: انتگرالهای مربوط | |
| | ۳۳۹ | لگاریتم طبیعی و مشتق آن | |
| | ۳۴۲ | ویژگیهای لگاریتمهای طبیعی: نمودار $y = \ln x$ | |
| | ۳۴۹ | تابع نمایی e^x | |
| | ۳۵۴ | تابعهای a^x و a^u | |
| | ۳۶۱ | تابعهای $y = \log_a u$: آهنگهای رشد | |
| | ۳۶۷ | کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی | |
| | ۳۷۴ | پرسشها و تمرینهای مروری | |
| | ۳۸۰ | مسئله‌های گوناگون | |
| | ۳۸۱ | | |
| | | فصل ۷ روشهای انتگرالگیری | |
| | | چشم‌انداز | |
| | ۳۸۸ | | |

| | | | |
|------|---|---|---|
| ۶۱۷ | ۱۰۱۲ مقدمه | ۵۴۱ | ۳۰۱۵ معادله‌های قطبی، منقطع‌های مخروطی و خمهای دیگر |
| ۶۱۸ | ۲۰۱۲ چندجمله‌ای تیلر | ۵۴۶ | ۴۰۱۵ انتگرال در مختصات قطبی |
| ۶۲۴ | ۳۰۱۲ قضیه تیلر با باقیمانده: سینوسها، کسینوسها، و e^x | ۵۵۲ | پرسشها و تمرینهای مروری |
| ۶۳۱ | ۲۰۱۲ نقطه‌های بسط، قضیه دوجمله‌ای، آرکتانژانتها، و π | ۵۵۲ | مسأله‌های گوناگون |
| ۵۰۱۲ | همگرایی سریهای توانی: مشتقگیری، انتگرالگیری، ضرب، و تقسیم | فصل ۱۱ دنباله‌های نامتناهی و سریهای نامتناهی | |
| ۶۳۸ | ۶۰۱۲ صورت‌های مبهم | ۵۵۶ | چشم انداز |
| ۶۴۸ | ۷۰۱۲ یک معمای کامپیوتری | ۵۵۶ | ۱۰۱۱ دنباله‌های اعداد |
| ۶۵۰ | پرسشها و تمرینهای مروری | ۵۶۵ | ۲۰۱۱ قضیه‌های مربوط به حد |
| ۶۵۱ | مسأله‌های گوناگون | ۵۷۰ | ۳۰۱۱ حدهایی که با آنها بسیار سروکار داریم |
| ۶۵۲ | پیوستها | ۵۷۳ | ۴۰۱۱ سریهای نامتناهی |
| ۶۵۵ | پ ۱ اثبات قضیه‌های مربوط به حد از بخش ۹.۱ | ۵۸۳ | ۵۰۱۱ سریهای با جملات نامنفی: آزمونهای مقایسه‌ای و انتگرال |
| ۶۵۸ | پ ۲ استقرای ریاضی | ۵۹۳ | ۶۰۱۱ سریهای با جملات نامنفی: آزمونهای نسبت و ریشه |
| ۶۶۰ | پ ۳ فرمولهایی از ریاضیات پیش‌دانشگاهی | ۵۹۸ | ۷۰۱۱ همگرایی مطلق |
| ۶۶۴ | پ ۴ قانون کسینوسها و فرمولهای مربوط به مجموع زاویه‌ها | ۶۰۲ | ۸۰۱۱ سریهای متناوب و همگرایی مشروط |
| ۶۶۶ | پ ۵ اثباتی برای صورت قویتر قاعده هویتال | ۶۰۸ | ۹۰۱۱ مرور |
| ۶۶۸ | پاسخها | ۶۱۰ | ۱۰۰۱۱ بر آورد کردن مجموع سری با جمله‌های مثبت |
| ۷۳۱ | جدول مختصر انتگرالها | ۶۱۲ | پرسشها و تمرینهای مروری |
| ۷۳۹ | فهرست راهنما | ۶۱۵ | مسأله‌های گوناگون |
| | | ۶۱۷ | فصل ۱۲ سریهای توانی |
| | | | چشم انداز |

پیشگفتار*

در این ویرایش جدید از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی کوشیده‌ایم مفیدترین کیفیات و ویژگی‌هایی که ویرایشهای قبلی از نظر خوانندگان داشته‌اند، محفوظ بماند. با این حال، در این ویرایش یکی از جسامعترین تجدیدنظرها در تاریخ سی ساله این کتاب هم در صورت و هم در محتوا به عمل آمده است. این تجدیدنظر مبتنی است بر دهها نقد، گفتگوهای متعدد با خوانندگان و ویرایشهای قبلی، نامه‌های حاوی توصیه از دوستان، دانشجویان و مدرسان از سراسر جهان. هدف کلی ما در این تجدیدنظر این بوده است که کتاب را خواندنیت‌تر، و مطالبش را برای مبتدیان قابل فهم تر سازیم بدون آنکه استانداردها و مطالبی را که خوانندگان مایل اند این کتاب داشته باشد، قربانی کنیم.

مخاطبان و پیشنیازها این کتاب تمام مطالب لازم را برای یک درس متعارف حساب دیفرانسیل و انتگرال که در سه ترم نیمساله یا چهار ترم سه ماهه به دانشجویان سالهای اول و دوم عرضه شود، دربردارد. پیشنیاز آن، آشنایی با جبر و مثلثات در حد معمولی است و لی برای یادآوری، فصل ۱ را با مرور مختصری بر مختصات، خطها، تابعها، و نمودارها آغاز کرده‌ایم. در فصل ۲ نیز مروری بر مثلثات شده است.

ویژگیهای برگرفته از ویرایشهای قبلی

مانند قبل، هدف ما آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال و ارائه آن نوع تعلیمی است که خوانندگان برای کاربرد مؤثر این حساب در کارهای دانشگاهی و حرفه‌ای آینده خود به آن نیاز خواهند داشت. برای انجام این کار، سطح ریاضی مطالب، جهتگیری کاربردی آن، تأکید کتاب بر مثالهای حل شده، و کثرت و تنوع تمرینها را محفوظ نگه داشته‌ایم و مانند قبل، ارتباطات بین حساب دیفرانسیل و انتگرال و برخی از روشهای عددی مورد استفاده در درسهای دیگر را نشان داده‌ایم.

سطح ریاضی گرچه شیوه عرضه مطالب در این ویرایش در بسیاری از موارد بسیار ساده‌تر از ویرایشهای قبلی است، ولی میزان دقت تقریباً یکسان است. در این ویرایش می‌کوشیم مطالب را بدون توضیح دادن واضحات و درعین حال، بدون پاسخ دادن به پرسشهایی که خوانندگان آمادگی پرسیدن آنها را ندارند، شرح دهیم. مثلاً، قضیهٔ ماسکمین را در مورد تابعهای پیوسته روی بازه‌های بسته بیان می‌کنیم و از آن برای ارائهٔ قضیهٔ مقدار میانگین بهره می‌گیریم ولی قضیهٔ ماسکمین را ثابت نمی‌کنیم و به بررسی ویژگی‌هایی از دستگاه اعداد حقیقی که قضیه به آنها بستگی دارد نمی‌پردازیم. چند اثبات سادهٔ عددی در مورد حدها در فصل ۱ می‌آوریم ولی اثبات قضایای حدی پیچیده‌تر را در پیوستها ذکر می‌کنیم.

کاربردها حساب دیفرانسیل و انتگرال برای حل مسائلی در فیزیک و نجوم ابداع شد، و گرچه در سیر پیشرفت خود به شاخهٔ ریاضی گسترده و مستقلی تبدیل شده است، اما اکثر کاربردهایش در خارج از ریاضیات هنوز با علوم [تجربی] و مهندسی در ارتباط اند. همانند ویرایشهای قبلی، در کتاب حاضر هم کاربردها بیشتر در همین زمینه‌ها هستند. نمونه‌هایی از این کاربردها عبارت‌اند از محاسبهٔ مقادیر اکسترمم، مراکز جرم، کار و نیروی هیدرواستاتیکی، محاسبهٔ مدارهای ماهواره‌ها، و توصیف جریان سیال (بخشهای ۵.۳، ۸.۵، ۹.۵، ۱۰.۵، ۴.۱۴، و ۲۰.۱۹ را ببینید). ولی درس‌های اخیر حساب دیفرانسیل و انتگرال در بسیاری از رشته‌های دیگر هم اهمیت پیدا کرده است. از جمله در اقتصاد، تجارت، علوم زیستی و حتی مسائل فیزیکی مربوط به ورزشها. بنا بر این، مثالهای متنوعی هم از این رشته‌ها آورده‌ایم که مثلاً چند مورد آن عبارت است از متوسط موجودی روزانه، آهنگ تولد و رشد جمعیت و کار لازم برای نواختن ضربه به یک توپ گلف یا یک توپ تنیس. (صفحات ۳۵۰، ۳۱۴، ۳۷۵ را ببینید). هر وقت حس کرده‌ایم که می‌توان

ویژگیهای جدید

علاوه بر آنکه کوشیده‌ایم آنچه را که به نظر خوانندگان، بهترین ویژگیهای ویرایشهای قبلی بوده حفظ کنیم، کتاب را از ویژگیهای جدیدی برخوردار ساخته‌ایم تا نیازهای فعلی کلاسهای درس را برآورد.

مباحث ترسیم ترسیم اشکال سه بعدی غالباً دشوار است. بنابراین، برای ترسیم صفحه‌ها، استوانه‌ها، و رویه‌های دوبعدی و برای اینکه اشیاء سه بعدی چنان رسم شوند که سه بعدی به نظر برسند، رهنمودهای گام به گامی آورده‌ایم. رویه‌های مورد نظر در مباحث ترسیم و در تمرینها، رویه‌هایی هستند که خوانندگان بعداً در این کتاب هنگام مطالعه حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره با آنها سروکار خواهند داشت (انتهای بخشهای ۳۰۱۳ و ۱۰۱۵ را ببینید).

کیفیت تصویری و هنری بسیاری از تصویرهای قدیمی را دوباره رسم کرده‌ایم و تصاویر جدیدی هم به متن افزوده‌ایم تا فهم استدلالهای ریاضی و تصور خمها، رویه‌ها و اجسامی که در مثالها و تمرینها مطرح می‌شوند، آسانتر شود. تصاویر این ویرایش از ویرایشهای قبلی بیشتر است و مجموعه‌های مسائل هم از کیفیت تصویری بهتری برخوردارند.

چشم‌اندازهای فصلها هر فصل با مطلبی تحت عنوان چشم‌انداز آغاز می‌شود که مباحث فصل را با مباحث دیگر کتاب مربوط می‌سازد و اهمیت آنها را از لحاظ نظری و کاربردی شرح می‌دهد (مثلاً ابتدای فصلهای ۴ و ۱۶ را ببینید). بیشتر بخشهای کتاب نیز خود با مقدمه کوتاهی شروع می‌شوند که زمینه‌را برای مباحثی که می‌خواهند مطرح کنند، فراهم می‌سازد. (مثلاً صفحات ۳۴۴ و ۵۸۳ را ببینید).

یادداشتهای تاریخی حساب دیفرانسیل و انتگرال، حاصل قرن‌ها تلاش آدمی است، و ما برای آگاهانیدن خواننده از این موضوع، یادداشتهایی در باره افرادی که در پیشرفت آن سهمیده‌اند و درباره کارهایی که آنها انجام داده‌اند، آورده‌ایم (مثلاً یادداشت راجع به کار ماریا آنیزی در صفحه ۴۹۰ و یادداشت راجع به سری تیلر در صفحه ۶۲۱ را ببینید).

نمودارها و دستورالعملهایی برای مراجعه سریع در این ویرایش نمودارها و دستورالعملهایی آورده‌ایم که در آنها دسته‌ای از

بدون تحمیل مطلبی به متن ارتباطاتی بین حساب دیفرانسیل و انتگرال و زندگی واقعی برقرار کرد، چنین کاری کرده‌ایم. در این ویرایش، صفحات بیشتری را به مراحل مسأله حل کردن در کاربردهایی که با مدل‌سازی ریاضی مربوط‌اند، اختصاص داده‌ایم، مثلاً در اوایل بخش آهنگهای وابسته (صفحات ۱۸۰-۱۸۱)، و در حل مسأله کابل آویزان (صفحات ۵۱۴-۵۱۵).

مثالهای حل‌شده تمرینها در جاهایی می‌آیند که خواننده باید دست به کار شود ولی مثالها در جاهایی می‌آیند که کار برعهده ماست. ما مثالهای مورد علاقه خوانندگان را در این ویرایش حفظ کرده‌ایم و تعدادی مثال تازه هم آورده‌ایم که غالباً مراحل حل را با تفصیل بیشتری از قبل نشان می‌دهند. همچنین به جای برخی از مثالهای مشکل، مثالهای ساده‌تری آورده‌ایم که همان نکات را دربردارند. مثالها مربوط به مباحث متنوعی هستند از عایق کاری خط لوله سراسری آلاسکا تا زهکشی و پر کردن باتلاقها، از برق شهر تا روشی برای ترسیم سهمیه‌ها؛ از تحلیل شکل طاق دروازه غرب در سنت لوئیس تا معماهای محاسبات کامپیوتری و تغییر دما در زیر سطح زمین (صفحات ۱۲۱، ۲۶۰، ۲۹۹، ۴۶۴، ۵۱۶، ۶۴۹ و انتهای بخش ۱۰۱۶ را ببینید).

مجموعه‌های مسأله‌ها هر مجموعه از مسائل، آمیزه‌ای است از مسأله‌های عادی ریاضی و مسأله‌های مبارز طلب‌تر. در بسیاری از این مجموعه‌ها جهش از مسائل آسان به مسائل پیچیده تدریجیتر از قبل صورت می‌گیرد. تقریباً در هر مجموعه، مسائل کسار بردی آمده است و بسیاری از مجموعه‌ها شامل تمرینهایی هستند که با ماشین محاسبه انجام می‌شود (صفحات ۱۱۰-۱۱۲، ۱۷۵-۱۸۰، ۲۶۱-۲۶۳) هر فصل با بخشی که شامل مسائل گوناگون است پایان می‌پذیرد. این مسأله‌ها به مباحثی که در فصل آمده‌اند، مربوط‌اند و ترتیب ارائه آنها همان ترتیب ارائه مباحث است. در بسیاری از این بخشهای پایانی، مطالبی [و مسائلی در ارتباط با آنها] آمده است که جالب‌اند ولی معمولاً کمتر تدریس می‌شوند و ریاضیات مورد بحث در آنها، در راستای مطالب فصل است (صفحات ۳۲۴-۳۲۵ و ۵۵۴-۵۵۵).

روشهای عددی بحثهای مربوط به ریشه‌یابی، تقریبهای خطی و درجه دوم توابع، و تقریبهای عددی انتگرالها را در کتاب حاضر هم آورده‌ایم. این مباحث در ریاضیات و رشته‌های دیگر اهمیت روزافزونی می‌یابند. همانند ویرایشهای قبلی، گاه تمرینهایی آمده که به کمک ماشین محاسبه حل می‌شوند و گاه نیز در آخر مجموعه‌های مسائل ارجاعاتی نیز به برنامه‌های میکرو کامپیوتری در

مطابق با این روش، تغییر کرده و این فصل فشرده‌تر شده تا معرفی خمیدگی، پیچش و دستگاه TNB آسان‌تر شود. فصل قدیم در زمینه مشتقات جزئی به دو فصل جداگانه تقسیم شده که یکی در بساطه نظریه و دیگری درباره کاربردهاست. شیوه پرداختن به قضایای انتگرال برداری در فصل ۱۹ کاملاً جدید است. این مبحث با انتگرالهای خمیده خطی، میدانهای برداری، و قضیه گرین در صفحه شروع می‌شود، سپس به سراغ انتگرالهای رویه‌ای، قضیه دیورژانس، و قضیه استوکس می‌رود و با میدانهای پایستار و توابع پتانسیل به پایان می‌رسد. همچنین ارتباط دنیای واقعی را با این موضوع، که انگیزه اولیه پیدایش و رشد آن بوده است، بیشتر مورد بحث قرار می‌دهیم.

کاربردهای جدید دهها کاربرد جدید را در کتاب آورده‌ایم؛ از جمله، تحلیل حرکت یک کامیون از روی نمودار زمان-مسافت آن، محاسبه آهنگ تغییر شعاع حباب صابون، بحث مقیاس دسیبل برای اندازه‌گیری صدا، و تعیین مشخصات مسیر توپ بیسبال در عبور از دیوار پارک فندی در بوستون (مثلاً صفحات ۱۲۳، ۱۸۵، ۳۷۱ را ببینید).

تجدیدنظر در شیوه بررسی مباحث استاندارد از میان بسیاری از مباحثی که در شیوه پرداختن به آنها تجدیدنظر شده، اینها را نام می‌بریم:

دیفرانسیل (بخش ۴.۲)

قاعده زنجیری (بخش ۵.۲)

قضیه‌های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (بخش ۷.۴)

حجم اجسام دورانی (بخشهای ۳.۵ و ۴.۵)

گشتاور و مرکز جرم (بخشهای ۸.۵ و ۵.۱۸)

معادله‌های پارامتری (بخشهای ۸.۲ و ۹.۸)

دنباله‌ها، از جمله بخشی درباره بازگشت و زبان کامپیوتری

(بخش ۱۰.۱۱)

آزمونهای همگرایی (بخشهای ۵.۱۱ و ۹.۱۱)

ژاکوبیها، در دو بخش اختیاری (بخشهای ۳.۱۸ و ۶.۱۸)

انتگرالهای خمیده خطی در میدانهای برداری (بخش ۲.۱۹)

مساحت رویه و انتگرالهای رویه‌ای (بخش ۴.۱۹)

میدانهای مستقل از مسیر و پایستار (بخش ۷.۱۹)

جورج توماس مؤسسه تکنولوژی ماساچوست (M.I.T)

راس فینی مؤسسه تکنولوژی ماساچوست (M.I.T)

فرمولهای مربوط به هم، فاصله برداری می‌شود، شیوه‌های عمل‌روشن می‌گردد، و خط‌مشی حل مسأله توصیف می‌شود. (صفحات ۲۸۷، ۳۹۷، ۴۱۱، و ۶۰۸ را ببینید).

تغییرات دیگر

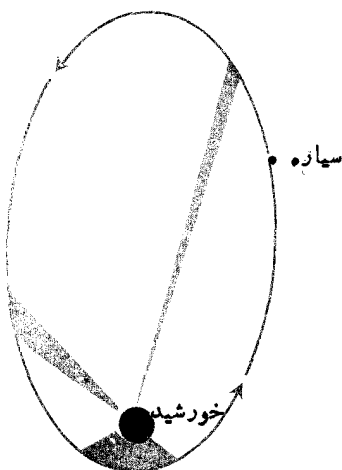
علاوه بر کیفیاتی که در بالا برشمردیم، این ویرایش تفاوت‌های مهم دیگری با ویرایشهای قبلی دارد.

تمایز بین مباحث اصلی و اختیاری کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال باید در یک زمان پاسخگوی نیاز درسهای متفاوت زیادی باشد و در نتیجه، مطالب چنین کتابی معمولاً بیش از آن است که هر مدرس خاصی بدان نیاز دارد. برای کمک به خواننده که بین مباحث اصلی و حاشیه‌ای تمایز قائل شود، تعدادی از بخشها و زیربخشها را با مربع توخالی (□) مشخص کرده‌ایم. این مربعها نشان‌دهنده بخشهای اختیاری‌اند که مطالعه آنها برای پیگیری بخشهای بعدی ضروری نیست.

تجدیدسازمان مباحث در این ویرایش، دیفرانسیل در فصل ۲ معرفی می‌شود و تابعهای معکوس از فصل ۲ به جایی که اولین بار در فصل ۶ به آنها نیاز داریم انتقال یافته‌اند. معرفی قاعده زنجیری از مقدمه معادلات پارامتری تفکیک شده است. بخشهای طولانی کوتاه شده یا به دو بخش تقسیم گشته‌اند. (مثلاً، مبحث تابعها و نمودارها در فصل ۱ و گرافیکها در فصل ۱۶) و برخی از بخشهای کوتاه در هم ادغام شده‌اند تا طول مبحث مناسب شود (قضیه رول و قضیه مقدار میانگین اکنون در یک مبحث آمده‌اند). برخی از مباحثی که کمتر مطرح‌اند از قبیل قضایای پاپوس، جانشانی $z = \tan(x/2)$ ، کسینوسهای هادی، و تقسیم‌سریهای توانی-کوتاه شده، جزو مباحث اختیاری آمده، یا به مجموعه‌های مسائل انتقال یافته‌اند.

حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره ترتیب ارائه مطالب حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره تغییر کرده و بیشتر آن از نو نوشته شده است. رویه‌های درجه دوم از فصل مربوط به بردارها خارج شده و به یک فصل جدید (۱۵) منتقل شده که استوانه‌ها، مخروطات استوانه‌ای، مخروطات کروی، و مباحث ترسیم را در بر دارد. ترتیب

* در ترجمه این پیشگفتار، برخی از قسمتهای پایانی آن که برای خوانندگان فارسی‌زبان مفید به نظر نرسیده، حذف شده است. در ضمن چندجمله راجع به کیفیت رنگهای تصاویر کتاب اصلی و نحوه تقسیم‌بندی کتاب در دو جلد، ترجمه نشده است.



گردش سیاره‌ای به دور خورشیدش. در اینجا ناحیه‌های سایه‌خورده مشاهداتی را بردارند. طبق قانون دوم کپلر، سیاره آن قسمت از مرز این نواحی را که روی مدارش قرار دارد در زمانهای مساوی می‌پیماید. بنابراین، سیاره در نزدیکی خورشید تندتر حرکت می‌کند تا در قسمت‌های دورتر مدار.

برای تمام سیاره‌های منظومه شمسی ثابت است.)

همان‌طور که در بخش ۲.۱۲ خواهید دید، استنتاج قوانین کپلر از قوانین حرکت نیوتن با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال کارساده‌ای است.

امروز حساب دیفرانسیل و انتگرال و تعمیم‌های آن در آنالیز ریاضی قلمرو واقعاً گسترده‌ای دارند و فیزیکدانان، ریاضیدانان، و منجمانی که اول‌بار این موضوع را ابداع کردند مسلماً شگفت‌زده و شادمان می‌شدند اگر می‌دیدند که این موضوع

درآمد: حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟

حساب دیفرانسیل و انتگرال، ریاضیات مربوط به حرکت و تغییر است. هر جا حرکت یا رشدی هست، هر جا نیروهای متغیری در کار تولیدشتاب‌اند، حساب دیفرانسیل و انتگرال درست همان ریاضیاتی است که به کار می‌آید. این امر در آغاز پیدایش این مبحث صادق بود، و امروز نیز چنین است.

حساب دیفرانسیل و انتگرال در آغاز برای برآورده کردن نیازهای دانشمندان قرن هفدهم ابداع شد. حساب دیفرانسیل با مسأله محاسبه آهنگهای تغییر سروکار داشت و به دانشمندان امکان می‌داد شیب خمها را تعریف کنند، سرعت و شتاب اجسام متحرک را محاسبه کنند، زاویه آشناباری توپ را برای حصول بیشترین برد به دست آورند، و زمانهایی را که سیارات نزدیکترین و دورترین فاصله را از هم دارند، پیش‌بینی کنند. حساب انتگرال به مسأله تعیین تابع براساس اطلاع از آهنگ تغییرش می‌پرداخت و این امکان را فراهم می‌کرد که مکان آتی یک جسم را با توجه به مکان فعلی‌اش و نیروهای مؤثر بر آن محاسبه کنند، مساحت نواحی نامنظم واقع در صفحه را بیابند، طول خمها را اندازه بگیرند، و محل مرکز جرم هر جسم دلخواه را به دست آورند.

پیش از پیشرفتهای ریاضی که به کشف بزرگ آیزک نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷) و بارون گوته‌فرید ویلهلم لایب‌نیتس (۱۶۴۶-۱۷۱۶) انجامید، یوهانس کپلر منجم (۱۵۷۱-۱۶۳۰) با بیست سال تفکر، ثبت اطلاعات، و انجام محاسبات، سه قانون حرکت سیارات را که اکنون به نام او معروف‌اند، کشف کرد:

۱. هر سیاره در مداری بیضی‌شکل حرکت می‌کند که یک کانونش در خورشید قرار دارد (شکل).
۲. بردار شعاعی (یعنی خط واصل بین خورشید و سیاره) در مدت‌های مساوی مساحت مساوی را می‌روبند.
۳. مربع مدت گردش هر سیاره به دور خورشید، متناسب است با مکعب فاصله متوسط آن سیاره از خورشید. (اگر T مدت گردش سیاره به دور خورشید و D فاصله متوسط باشد، نسبت T^2/D^3

ابداع آن عمدتاً کار دانشمندان قرن هفدهم است. از میان این دانشمندان می‌توان رنه دکارت (۱۵۹۶-۱۶۵۰)، بونا ونتورا کاوالیری^۱ (۱۵۹۸-۱۶۲۷)، پیردو فرما (۱۶۰۱-۱۶۶۵)، جان والیس (۱۶۱۶-۱۷۰۳) و جیمز گرگوری (۱۶۳۸-۱۶۷۵) را نام برد. این کار با ابداعات بزرگ نیوتن و لایب نیتس به اوج خود رسید. آنان پیشگام بودند.

پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال در طی قرن بعد با سرعت زیادی ادامه یافت و هر روز کاربردهای جدیدی برای آن در هندسه، مکانیک، مهندسی، و نجوم پیدا می‌شد. در زمره مهم‌ترین افرادی که در این زمینه سهم داشتند، چندین نسل از برنولیاها مخصوصاً یاکوب برنولی (۱۶۵۴-۱۷۰۵) و برادرش یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) بودند (خانواده برنولی همان نقشی را در ریاضیات داشتند که خانواده باخ در موسیقی)؛ همچنین باید از لئونهارت اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) - که با قدرت ابداع خارق‌العاده‌اش چهره اصلی ریاضیات در قرن هجدهم بود - یاد کرد و نیز از ژوزف لئونی لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳)، و آدرین ماری لواندر (۱۷۵۲-۱۸۳۳)، و بسیاری دیگر.

تکمیل ساختار منطقی روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال را ریاضیدانان قرن نوزدهم از جمله برنارد بولسانو (۱۷۸۱-۱۸۴۸)، آگوستین لئوئی کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷)، و کارل وایر شتراس (۱۸۱۵-۱۸۹۷) برعهده گرفتند. همچنین قرن نوزدهم شاهد دورجدیدی از تعمیمهای جالب حساب دیفرانسیل و انتگرال و پیشرفتهای بزرگ ریاضیات در ورای این حساب بود. برای کسب اطلاعاتی درمورد این پیشرفتهای می‌توانید کتاب مهم موریس کلاین تحت عنوان اندیشه ریاضی از دوران باستان تا عصر جدید^۲ را مطالعه کنید.

جان فون نویمان (۱۹۰۳-۱۹۵۷) یکی از ریاضیدانان بزرگ قرن بیستم نوشت «حساب دیفرانسیل و انتگرال نخستین دستاورد ریاضیات نوین است و درک اهمیت آن کار آسانی نیست. به عقیده من، این حساب روشنتر از هر مبحث دیگری مرحله آغازی ریاضیات نوین را توصیف می‌کند؛ و نظام آنالیز ریاضی، که توسیع منطقی آن است، هنوز بزرگترین پیشرفت فنی در تفکر دقیق به‌شمار می‌آید.»

چه انبوهی از مسائل را حل می‌کند و چه رشته‌های متنوعی آن را برای مدلسازی ریاضی به‌کار می‌برد و به‌فهم عالم و دنیای پیرامون ما کمک می‌کند. امیدواریم شما هم در این شگفت‌زدگی و لذت سهیم باشید.

اقتصاددانان از حساب دیفرانسیل و انتگرال برای پیش‌بینی گرایشهای کلی اقتصادی استفاده می‌کنند. اقیانوس‌شناسان از این حساب برای فرمولبندی نظریه‌هایی درباره جریانهای دریایی بهره می‌گیرند و هواشناسان آن را برای توصیف جریان هوای جو به‌کار می‌گیرند. زیست‌شناسان به کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال میزان جمعیت را پیش‌بینی می‌کنند و تأثیر جانوران شکارگر مانند روباه را بر جمعیت جانوران شکارشونده تشریح می‌کنند. پژوهشگران پزشکی با استفاده از این حساب تجهیزات فراصوتی و پرتو x را برای بازبینی اندامهای داخلی بدن طراحی می‌کنند و دانشمندان علوم فضایی آن را برای طراحی موشکها و کشف سیاره‌های دور دست به‌کار می‌گیرند. روانشناسان از حساب دیفرانسیل و انتگرال برای درک توهمات بصری استفاده می‌کنند و فیزیکدانان آن را برای طراحی سیستمهای ناوبری لخت و مطالعه ماهیت زمان و عالم به‌کار می‌برند. مهندسان هیدرولیک به کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال الگوهای مطمئنی برای آب‌بندی شیرها در خطوط لوله می‌یابند و مهندسان برق با به‌کارگیری آن، تجهیزات استروبو سکویی را طراحی و معادلات دیفرانسیلی را که توصیف‌کننده جریان الکتریکی در کامپیوترها هستند، حل می‌کنند. تولیدکنندگان وسائل ورزشی برای طراحی راکتهای تنیس و بیسبال، و تحلیلگران بازار سهام برای پیش‌بینی قیمتها و ارزیابی مخاطره نرخ بهره، این حساب را به‌کار می‌گیرند و فیزیولوژیستها با استفاده از آن تکانه‌ها (ایمپالسها)ی الکتریکی را در نورونهای دستگاه عصبی انسان توصیف می‌کنند. شرکتهای دارویی برای تعیین میزان مناسب موجودی دارو، و تولیدکنندگان الوار برای تعیین مناسبترین زمان قطع درختان، به کمک این حساب نیازمندند. این فهرست عملاً بی‌پایان است زیرا امروز حساب دیفرانسیل و انتگرال تقریباً در هر زمینه و حرفه‌ای به‌طریقی به‌کار می‌رود.

حساب دیفرانسیل و انتگرالی که امروز به‌کار می‌بریم از نظر تاریخی حاصل تلاشهای افراد بسیاری است. ریشه‌های این حساب را تا هندسه کلاسیک یونانی می‌توان ردیابی کرد، ولی



روشهای انتگرالگیری

چشم انداز

هدف همه روشهای انتگرالگیری تبدیل انتگرالهای ناآشنا به انتگرالهایی است که یا آنها را می‌شناسیم یا درجداول موجودند. روش‌های جانشانی روش اصلی انتگرالگیری و روشی است که تاکنون آن را به کار می‌برده‌ایم. جز این روش، سه روش با کاربردهای خاصتر نیز وجود دارد. این روشها عبارت‌اند از انتگرالگیری جزء به جزء، استفاده از جانشانیها و اتحادهای مثلثاتی برای ترکیب مربعات و حذف ریشه دوم، و انتگرالگیری به کمک تجزیه به کسرهایی ساده.

روش اصلی انتگرالگیری از توابع گویا، روش تجزیه به کسرهایی ساده است. به کمک این روش می‌توان هر کسر دلخواهی از دو چند جمله‌ای را به مجموعی از کسرهایی ساده‌تری تبدیل کرد که از آنها می‌توان با استفاده از جانشانی انتگرال گرفت. در ادامه فصل به انتگرال شماری از حاصلضربها و توانهای توابع مثلثاتی (که هم در ریاضیات محض و هم در ریاضیات کاربردی اهمیت دارند) نظری می‌افکنیم و با شیوه استفاده از «جدول مختصر انتگرالها» که در انتهای کتاب آمده، آشنا می‌شویم. همچنین به توصیف روشی برای محاسبه انتگرالها روی بازه‌های باز و نامتناهی می‌پردازیم. فصل را با بحثی مختصر درباره فرمولهای کادش توان به پایان می‌بریم. به کمک این فرمولها می‌توان انتگرال توانهای بزرگ توابع را بر حسب انتگرال توانهای کوچکتر که مستقیماً قابل محاسبه‌اند بیان کرد. فصل را با مروری بر آنچه که تاکنون دیده‌ایم و نیز ذکر چند توصیه آغاز می‌کنیم.

۱.۷ فرمولهای اصلی انتگرالگیری

چون انتگرالگیری نامعین عکس مشتقگیری است، محاسبه انتگرالی چون

$$\int f(x) dx$$

معادل یافتن تابعی چون $F(x)$ است که مشتقش $f(x)$ یا دیفرانسیلش $f(x) dx$ باشد. برای اینکه یافتن F آسانتر شود، مانند فصول پیشین با معکوس کردن فرمولهای دیفرانسیلی، جدولی از صورتهای متداول انتگرالی تهیه می‌کنیم. سپس می‌کوشیم انتگرال مورد نظر را با یکی از صورتهای متداول تطبیق دهیم. جدول ۱.۷ صورتهای متداولی را که تاکنون به دست آورده‌ایم نشان می‌دهد. فهرست مفصلتری از این صورتهای متداول در جدول انتگرالهای انتهای کتاب موجود است.

چنانچه انتگرالی با هیچ یک از صورتهای موجود در جدولی که در اختیار داریم منطبق نباشد می‌کوشیم به کمک جانشانیها و عملیات جبری آن را به یکی از این صورتهای تبدیل کنیم. مثالها و مسائل این فصل به گونه‌ای طرح شده‌اند که بر مهارت خواننده در عملیات بسیار سودمند جانشانی و تبدیلهای جبری بیفزایند. سعی شده است این مسائل و مثالها نسبتاً ساده باشند تا به جای درگیر شدن خواننده با عملیات جبری، توجه او بیشتر به روشهای لازم معطوف شود. اغلب این مسائل خاص را می‌توان به کمک جداول مستقیماً حل کرد. اما حل این مسائل به این روش به هدف کسب

| انتگرالها | دیفرانسیالها |
|--|--|
| ۰.۱ $\int du = u + C$ | ۰.۱ $du = \frac{du}{dx} dx$ |
| ۰.۲ $\int a du = a \int du$ | ۰.۲ $d(au) = a du$ |
| ۰.۳ $\int (du + dv) = \int du + \int dv$ | ۰.۳ $d(u+v) = du + dv$ |
| ۰.۴ $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ | ۰.۴ $d(u^n) = nu^{n-1} du$ |
| ۰.۵ $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ | ۰.۵ $d(\ln u) = \frac{du}{u}$ |
| ۰.۶ $\int e^u du = e^u + C$ | ۰.۶ $d(e^u) = e^u du$ |
| ۰.۷ $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ | ۰.۷ $d(a^u) = a^u \ln a du$ |
| ۰.۸ $\int \cos u du = \sin u + C$ | ۰.۸ $d(\sin u) = \cos u du$ |
| ۰.۹ $\int \sin u du = -\cos u + C$ | ۰.۹ $d(\cos u) = -\sin u du$ |
| ۰.۱۰ $\int \tan u du = \ln \sec u + C$ | ۰.۱۰ $d(\ln \sec u) = \tan u du$ |
| ۰.۱۱ $\int \cot u du = \ln \sin u + C$ | ۰.۱۱ $d(\ln \sin u) = \cot u du$ |
| ۰.۱۲ $\int \sec^2 u du = \tan u + C$ | ۰.۱۲ $d(\tan u) = \sec^2 u du$ |
| ۰.۱۳ $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$ | ۰.۱۳ $d(\cot u) = -\csc^2 u du$ |
| ۰.۱۴ $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$ | ۰.۱۴ $d(\sec u) = \sec u \tan u du$ |
| ۰.۱۵ $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$ | ۰.۱۵ $d(\csc u) = -\csc u \cot u du$ |
| ۰.۱۶ $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C$ | ۰.۱۶ $d(\sin^{-1} u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| ۰.۱۷ $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C$ | ۰.۱۷ $d(\tan^{-1} u) = \frac{du}{1+u^2}$ |
| ۰.۱۸ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u + C$ | ۰.۱۸ $d(\sec^{-1} u) = \frac{du}{ u \sqrt{u^2-1}}$ |

توابع جبری

$$\int \frac{du}{a^2 \pm u^2} \quad (a^2 \neq 1 \text{ به ازای } 1), \quad \int \frac{du}{au^2 + bu + c}$$

$$\int \sqrt{a^2 \pm u^2} du, \quad \int \sqrt{u^2 - a^2} du$$

$$\int \sqrt{au^2 + bu + c} du$$

و غیره.

توابع معکوس

$$\int \sin^{-1} u du, \quad \int \tan^{-1} u du$$

و غیره.

سرانجام روش محاسبه همه انتگرالهای این جدول و برخی انتگرالهای دیگر را شرح می‌دهیم. اما روشی وجود ندارد که همه مسائل انتگرالگیری را برحسب توابع مقدماتی حل کند، و برخی انتگرالها را نمی‌توان با هیچ روش خاصی محاسبه کرد. مثالهای زیر مروری است بر روش جانشانی در انتگرالگیری. هدف ما این است که انتگرالها را به یکی از صورتهای موجود در يك جدول، در اینجا جدول ۱۰.۷، تبدیل کنیم.

مثال ۱ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{dx}{1+x^2}$$

حل: این انتگرال نظیر صورت متداول

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C$$

(فرمول ۱۷ جدول) است اگر $2x$ به جای u بنشیند. با جانشانیهای

$$dx = \frac{1}{2} du \quad \text{و} \quad du = 2 dx, \quad u = 2x$$

داریم

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{(1/2) du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1} u + C = \frac{1}{2} \tan^{-1} 2x + C.$$

مثال ۲ مطلوب است

$$\int \sqrt{1-5x} dx.$$

مهارت که احتمالاً بعداً به آن نیاز است لطمه می‌زند. آنچه مهم است، داشتن همین مهارت است و نه یافتن جواب خاص يك مسأله مفروض.

چون انتگرالگیری بر مشتقگیری استوار است، در جدول ۱۰.۷ علاوه بر فرمولهای انتگرالی فرمولهای دیفرانسیلی فصول قبل نیز آمده است. فعلاً لازم نیست فرمولهای این جدول را حفظ کنید و هر گاه لازم باشد می‌توانید به آن مراجعه کنید. بررسی مختصری شمارا مجاب می‌کند که در حال حاضر با پانزده فرمول نخست دیفرانسیلها آشنايید. و تا آنجا که به انتگرالگیری مربوط می‌شود، تمرین در روشها شمارا قادر می‌سازد که بدون حفظ کردن فرمولهای دیفرانسیلهای توابع مثلثاتی معکوس، انتگرالهای سه سطر آخر جدول را بیابید.

فعلاً از چه نوع توابعی می‌توان مستقیماً به کمک جدول ۱۰.۷ انتگرال گرفت؟

توانها

$$\int u^n du, \quad \int \frac{du}{u}$$

توابع نمایی

$$\int e^u du, \quad \int a^u du$$

توابع مثلثاتی

$$\int \sin u du, \quad \int \cos u du, \quad \int \tan u du, \quad \int \cot u du$$

توابع جبری

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \int \frac{du}{1+u^2}, \quad \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$$

البته ترکیبیات دیگری از توابع مثلثاتی نظیر $\int \sec^2 u du$ نیز تصادفاً با استفاده از این جدول قابل انتگرالگیری‌اند. چه نوع توابع متداولی در این جدول نیامده است؟

لگاریتمها

$$\int \ln u du, \quad \int \log_a u du$$

توابع مثلثاتی

$$\int \sec u du, \quad \int \csc u du$$

دوش ۱. حدود تبدیل شده. وقتی $x = 0$,

$$u = 1 + \sin(0) = 1$$

و وقتی $x = \pi/2$,

$$u = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin x} \cos x \, dx &= \int_1^2 \sqrt{u} \, du = \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^2 \\ &= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

دوش ۲. حدود اصلی

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin x} \cos x \, dx &= \frac{2}{3} (1 + \sin x)^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{3} (1 + 1)^{3/2} - \frac{2}{3} (1 + 0)^{3/2} \\ &= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

مثال ۵. مطلوب است محاسبه

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^3 x \, dx.$$

حل: برای اینکه بتوانیم این انتگرال را محاسبه کنیم از اتحاد مثلثاتی $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^3 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^4 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos^4 x - \cos^6 x) \sin x \, dx \\ &= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= (-0 + 0) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}. \end{aligned}$$

حل: با جانشانیهای

$$u = 1 - \sin x, \quad du = -\cos x \, dx, \quad dx = -\frac{1}{\cos x} du$$

و به کمک فرمول ۴ به ازای $n = 1/2$ داریم

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - \sin x} \, dx &= \int \sqrt{u} \cdot -\frac{1}{\cos x} du = -\frac{1}{\cos x} \int \sqrt{u} \, du \\ &= -\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= -\frac{2}{15} (1 - \sin x)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

مثال ۳. مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx.$$

حل: با جانشانیهای

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx$$

داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx &= \int \sin u \, du = -\cos u + C \\ &= -\cos(\ln x) + C. \end{aligned}$$

مثال ۴. مطلوب است محاسبه

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin x} \cos x \, dx.$$

حل: با جانشانیهای

$$u = 1 + \sin x, \quad du = \cos x \, dx$$

داریم

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \sin x} \cos x \, dx &= \int \sqrt{u} \, du = \int u^{1/2} \, du \\ &= \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (1 + \sin x)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

حدود انتگرالگیری چه می‌شوند؟ دوکار (با توجه به بخش ۸.۴) می‌توان کرد: (۱) محاسبه انتگرال تبدیل شده با حدود تبدیل شده (۲) محاسبه انتگرال اصلی با حدود اصلی.

آنچنان ساده به نظر می‌رسند که ما را وسوسه می‌کنند که بکوشیم آنها را به دست آوریم. اما می‌توان اثبات کرد که برای محاسبه این انتگرالها فرمول ساده‌ای وجود ندارد. یعنی راهی وجود ندارد که بتوان این انتگرالها را به صورت ترکیبات متناهی از توابع مقدماتی بیان کرد. همین مطلب در مورد انتگرالهایی که پس از جانشانی به این انتگرالها تبدیل می‌شوند نیز صدق می‌کند. هیچ يك از انتگرالهایی که در این فصل از شما خواسته شده آنها را محاسبه کنید از این دست نیستند، اما ممکن است گهگاه در جاهای دیگری با این انتگرالهای غیرمقدماتی مواجه شوید.

مسأله‌ها

انتگرالهای مسائل ۱-۱۶ را به کمک جانشانی داده شده به صورت متداول درآوردید و سپس آنها را محاسبه کنید.

$$\int 6x\sqrt{3x^2+5} dx, \quad u=3x^2+5 \quad ۱.$$

$$\int \frac{16x dx}{8x^2+2}, \quad u=8x^2+2 \quad ۲.$$

$$\int_0^{\sqrt{\ln 2}} xe^{x^2} dx, \quad u=x^2 \quad ۳.$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}}, \quad u=1+\sin x \quad ۴.$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{8x^2+1}}, \quad u=8x^2+1 \quad ۵.$$

$$\int \frac{\sin x}{3+2\cos x} dx, \quad u=3+2\cos x \quad ۶.$$

$$\int e^x \sec^2(e^x) dx, \quad u=e^x \quad ۷.$$

$$\int_1^2 \frac{dy}{\sqrt{y(1+y)}}, \quad u=\sqrt{y} \quad ۸.$$

$$\int e^x \sqrt{3+2e^x} dx, \quad u=3+2e^x \quad ۹.$$

$$\int_2^4 \frac{dx}{x-\sqrt{x}}, \quad u=\sqrt{x} \quad ۱۰.$$

اگر فوراً متوجه چگونگی محاسبه انتگرال $(\cos^5 x - \cos^3 x) \sin x$ نشدید، جانشانیهای زیر را انجام دهید

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x dx.$$

به این ترتیب

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^5 x - \cos^3 x) \sin x dx$$

$$= \int_{u=1}^{u=-1} (u^5 - u^3)(-du)$$

$$= \int_1^{-1} (u^5 - u^3) du = \left[\frac{u^6}{6} - \frac{u^4}{4} \right]_1^{-1}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}.$$

□ انتگرالهای غیرمقدماتی

کار جوئل موزس و دیگران در MIT در تهیه برنامه کامپیوتری MACSYMA، که انتگرالهای نامعین را با عملیات نمادین محاسبه می‌کند، باعث شد که توجه مجددی به این مطلب شود که چه انتگرالهایی را می‌توان به صورت ترکیب جبری تعدادی متناهی از توابع مقدماتی (توابعی که مطالعه کرده‌ایم) بیان کرد و برای محاسبه چه انتگرالهایی به سریهای نامتناهی (فصل ۱۲) یا روشهای عددی نیاز است. نمونه‌هایی از انتگرالهای دسته اخیر تابع خطای

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

و انتگرالهایی نظیر

$$\int \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{و} \quad \int \sin x^2 dx$$

هستند که در مهندسی و فیزیک با آنها مواجه می‌شویم. این انتگرالها و تعداد دیگری از نظایر آنها مانند

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int e^{(e^x)} dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx$$

$$\int \ln(\ln x) dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx, \quad 0 < k < 1$$

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+3} \quad .24$$

$$\int_{-\pi}^0 \frac{\sin x dx}{2+\cos x} \quad .25$$

$$\int \tan^2 x \sec^2 x dx \quad .26$$

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx \quad .27$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{2+\tan x} dx \quad .28$$

$$\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} dx \quad .29$$

$$\int_0^{\pi/4} 8 \cos^2 x \sin 2x dx \quad .30$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x dx \quad .31$$

(دانهایی: $\cos^2 x = \cos x (1 - \sin^2 x)$)

$$\int \csc^2 x dx \quad .32$$

(دانهایی: $\csc^2 x = \csc x (1 + \cot^2 x)$)

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-2x^2}} \quad .33$$

$$\int x^{1/2} \sqrt{x^{4/3}-1} dx \quad .34$$

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad .35$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx \quad .36$$

$$\int_0^1 \frac{3x}{1+x^2} dx \quad .37$$

$$\int_0^{\pi} x \sin(x^2) dx \quad .38$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{1+\cos 2x} dx \quad .39$$

(دانهایی: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)

$$\int \frac{dx}{x \ln x}, \quad u = \ln x \quad .11$$

$$\int_0^x \frac{e^x dx}{1+e^x}, \quad u = 1+e^x \quad .12$$

$$\int_0^x e^{\sqrt{x}} dx, \quad u = \sqrt{x} \quad .13$$

$$\int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad u = \sqrt{x} \quad .14$$

$$\int \tan x \sec^2 x dx, \quad u = \tan x \quad .15$$

$$\int \tan x \sec^2 x dx, \quad u = \sec x \quad .16$$

در مسائل ۱۷-۲۰، انتگرالها را به کمک اتحادها و جانشانیهای داده شده به صورت متداول در آورید و سپس آنها را محاسبه کنید.

$$\int \cos^2 x dx, \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \quad u = \sin x \quad .17$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx, \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad .18$$

$$u = \sin x$$

$$\int \tan^2 x \sec^2 x dx, \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \quad .19$$

$$u = \sec x$$

$$\int \tan^2 x \sec^2 x dx, \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \quad .20$$

$$u = \sec x$$

در مسائل ۱۲-۸۰، جانشانیهای به دست آورید که بتوان به کمک آنها انتگرالها را به صورتهای متداول در آورد. سپس انتگرالها را محاسبه کنید.

$$\int_{1/\sqrt{2}}^2 \sqrt{2x+3} dx \quad .21$$

$$\int_1^{40} \frac{dx}{3x+5} \quad .22$$

$$\int \frac{dx}{(2x-7)^2} \quad .23$$

$$\int \frac{e^{yz} + e^{-yz}}{e^{yz} - e^{-yz}} dx \quad .57$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx \quad .58$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta \quad .59$$

$$\int t e^{-t^2} dt \quad .60$$

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{4t^2 - 1}} \quad .61$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \quad .62$$

(دانهمایی: صورت و مخرج را در e^x ضرب کنید.)

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x} \quad .63$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x} \quad .64$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx \quad .65$$

$$\int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}} \quad .66$$

$$\int e^{\tan^2 x} \sec^2 x dx \quad .67$$

$$\int \cos^2 t \sqrt{4 - \sin^2 t} dt \quad .68$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx \quad .69$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx \quad .70$$

$$\int \frac{\csc^2 t}{\sqrt{1 + \cot^2 t}} dt \quad .71$$

$$\int_0^{\ln 2} e^{x^2} dx \quad .72$$

$$\int_0^{1/2} \frac{e^{\tan^{-1} 2t}}{1 + 4t^2} dt \quad .73$$

$$\int_1^2 \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}} \quad .40$$

$$\int_0^{1/2} \frac{2 dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} \quad .41$$

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2v dv}{\sqrt{1 - v^2}} \quad .42$$

$$\int \frac{x dx}{(2x^2 + 2)^2} \quad .43$$

$$\int x^2 \sqrt{x^2 + 5} dx \quad .44$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 5}} \quad .45$$

$$\int \frac{x dx}{2x^2 + 1} \quad .46$$

$$\int_0^{\ln 2} e^{x^2} dx \quad .47$$

$$\int e^{\cos x} \sin x dx \quad .48$$

$$\int \frac{dx}{e^{x^2}} \quad .49$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx \quad .50$$

$$\int \frac{e^x dx}{1 + e^{x^2}} \quad .51$$

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{1 + 4t^2} \quad .52$$

$$\int \cos^2 x \sin x dx \quad .53$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} \quad .54$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cot^2 x \csc^2 x dx \quad .55$$

$$\int_0^{\pi/2} \tan^2 x \sec^2 x dx \quad .56$$

نیز استفاده کرد که از نوع انتگرال (١) نیستند.

در این بخش انتگرالگیری جزء به جزء را توصیف می کنیم و روش استفاده از آن را شرح می دهیم. انتگرالگیری جزء به جزء علاوه بر اینکه روشی نیرومند در محاسبه انتگرالهای نامعین است، نقشی مهم در آماده ساختن این انتگرالها برای محاسبه به کمک کامپیوتر نیز دارد. اما ما در این کتاب مجال پرداختن به این مبحث را نداریم.

فرمول

فرمول انتگرالگیری جزء به جزء از قاعده حاصلضرب زیر به دست می آید

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

صورت دیفرانسیلی این قاعده چنین است

$$d(uv) = u dv + v du$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$u dv = d(uv) - v du.$$

پس از انتگرالگیری از آن داریم

فرمول انتگرالگیری جزء به جزء

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (2)$$

در فرمول انتگرالگیری جزء به جزء، انتگرال $\int u dv$ بر حسب انتگرال $\int v du$ بیان می شود. با انتخاب مناسب u و v ممکن است محاسبه انتگرال دوم ساده تر از محاسبه انتگرال اول باشد. اهمیت این فرمول نیز در همین است. وقتی با انتگرالسی روبه رو می شویم که نمی توانیم آن را حل کنیم، باید آن را به انتگرال دیگری تبدیل کنیم تا بلکه بتوانیم آن را حل کنیم.

فرمول انتگرالگیری جزء به جزء برای انتگرالهای معین چنین است

$$\int_{v_1}^{v_2} u dv = (u_2 v_2 - u_1 v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v du. \quad (3)$$

تعبیر قسمتهای مختلف فرمول به صورت مساحت در شکل ١٠٧ دیده می شود.

مثال ١ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int x \cos x dx.$$

$$\int x e^{-x^2} dx \quad .74$$

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx \quad .75$$

$$\int 10^{2x} dx \quad .76$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad .77$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad .78$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \quad .79$$

$$\int_0^{\sqrt{e}-1} \ln(x^2+1) \cdot 2x(x^2+1)^{-1} dx \quad .80$$

٨١ انتگرال

$$\int x e^{(x^2)} dx$$

را به کمک جانشانی (الف) $u = x^2$ و (ب) $u = e^{(x^2)}$ محاسبه کنید.

٢٠٧ انتگرالگیری جزء به جزء

با استفاده از روش انتگرالگیری جزء به جزء می توان انتگرالهای دشوار را به انتگرالهایی تبدیل کرد که معمولاً محاسبه آنها ساده تر است. این روش در مورد انتگرالهایی به صورت زیر به کار می رود

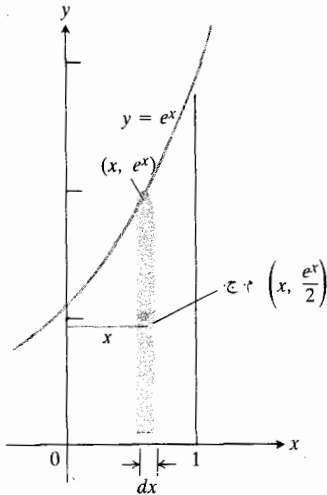
$$\int f(x)g(x) dx \quad (1)$$

که در آن f تابعی است که پس از چندبار مشتقگیری صفر می شود و g تابعی است که می توان از آن بارها و بدون هیچ مشکلی انتگرال گرفت. انتگرال

$$\int x e^x dx$$

از این دست است زیرا $f(x) = x$ پس از دوبار مشتق گرفتن صفر می شود و از $g(x) = e^x$ می توان بارها و بدون هیچ مشکلی انتگرال گرفت. از روش انتگرالگیری جزء به جزء می توان در مورد انتگرالهای مهمی نظیر

$$\int e^x \sin x dx$$



۲.۷ گشتاور نوار حول محور y عبارت است از $\delta A = \delta x e^x$.

طول: e^x

عرض: dx

مساحت: $dA = e^x dx$

جرم: $dm = \delta dA = \delta e^x dx$

بنابراین گشتاور نوار حول محور y چنین است

$$\tilde{x} dm = x \cdot \delta e^x dx = \delta x e^x dx.$$

گشتاور ورقه حول محور y ، انتگرال زیر است

$$M_y = \int \tilde{x} dm = \delta \int_0^1 x e^x dx.$$

برای محاسبه این انتگرال فرمول

$$\int u dv = uv - \int v du$$

را به‌ازای

$$u = x, \quad dv = e^x dx$$

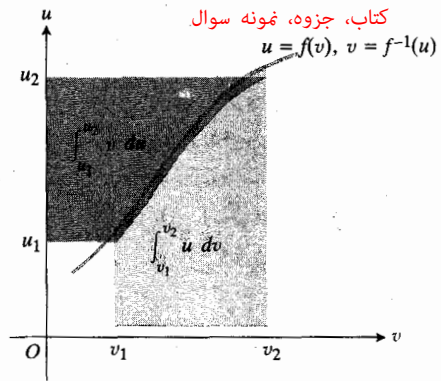
$$du = dx, \quad v = e^x \quad (dv = e^x dx \text{ با ضابطه } dv = e^x dx)$$

به‌کار می‌بریم. داریم

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - [e - 1] = 1.$$

کتاب، جزوه، نمونه سوال



۱.۷ مساحت ناحیه آبی‌رنگ، $\int_{v_1}^{v_2} u dv$ ، برابر است با

مساحت مستطیل بزرگ، $u_2 v_2$ ، منهای مساحت مستطیل

کوچک، $u_1 v_1$ ، و ناحیه خاکستری، $\int_{u_1}^{u_2} v du$. با استفاده

از علائم می‌توان نوشت

$$\int_{v_1}^{v_2} u dv = (u_2 v_2 - u_1 v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v du.$$

حل: به کمک فرمول

$$\int u dv = uv - \int v du$$

به‌ازای

$$u = x, \quad dv = \cos x dx$$

$$du = dx, \quad v = \sin x$$

(ساده‌ترین تابع با ضابطه

$$dv = \cos x dx)$$

داریم

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

توجه کنید که v را ساده‌ترین تابعی که دیفرانسیلش $\cos x dx$ است برگزیدیم. توابع پیچیده‌تری نظیر $\sin x + 5$ و $\sin x + C$ تنها محاسبات را طولانی‌تر می‌کنند و به‌جواب کلیت بیشتری نمی‌بخشند (درعین حال، مسأله ۵۱ را هم ببینید).

مثال ۲ چگالی یک ورقه نازک همگن δ است و در ناحیه‌ای واقع در ربع اول به‌خیم $y = e^x$ و خط $x = 1$ محدود است (شکل ۲.۷). گشتاوری را که این ورقه حول محور y ایجاد می‌کند بیابید.

حل: یک نوار قائم نمونه مشخصات زیر را دارد

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, \frac{e^x}{4}); \quad \text{مرکز جرم:}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

را به ازای

$$u = \ln x \quad (\text{پس از مشتقگیری ساده می شود})$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \quad (\text{انتگرالگیری از آن ساده است})$$

$$v = x \quad (dv = dx \text{ با ضابطه } dv = dx)$$

به کار می بریم و داریم

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C. \end{aligned}$$

استفاده مکرر

گاه لازم است برای رسیدن به جواب بیش از يك بار از انتگرالگیری جزء به جزء استفاده کنیم. به مثالی در این مورد توجه کنید.

مثال ۴ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int x^2 e^x dx.$$

حل: نخست به کمک فرمول

$$\int u dv = uv - \int v du$$

به ازای

$$u = x^2, \quad dv = e^x dx$$

$$du = 2x dx \quad v = e^x.$$

چنین به دست می آوریم

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

حال انتگرال طرف راست به انتگرالگیری جزء به جزء دیگری نیاز دارد. مقدار این انتگرال بنا به مثال ۲ برابر است با

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

بنابراین

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

کتاب، جزوه، نمونه سوال

بنابراین گشتاور ورقه حول محور y چنین است

$$M_y = \delta \int_0^1 x e^x dx = \delta \cdot 1 = \delta.$$

انتخاب u و dv

انتگرالگیری در مثال ۲، قاعده ای برای انتخاب u و dv در انتگرالگیری جزء به جزء به دست داد.

قاعده انتخاب u و dv

u را تابعی می گیریم که پس از مشتقگیری ساده تر شود. dv را تابعی می گیریم که انتگرالش ساده باشد.

همواره نمی توان از این قاعده پیروی کرد. اما آنجا که چنین کاری ممکن باشد، انتگرال طرف راست معادله

$$\int u dv = uv - \int v du$$

از انتگرال طرف چپ آن ساده تر است. انتخاب درست: به ازای

$$u = x, \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x$$

داریم

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C. \quad (۲)$$

انتخاب نادرست: به ازای

$$u = e^x, \quad v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

داریم

$$\int x e^x dx = e^x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x dx. \quad (۵)$$

برابری (۵) درست است، اما انتگرال طرف راست آن دشوارتر از انتگرال اصلی است. در واقع از چاله درآمدیم و در چاه افتادیم!

مثال ۳ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \ln x dx.$$

حل: فرمول

از تقسیم دوطرف بر $13/9$ چنین به دست می آید

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{2e^{2x} \sin 3x + 2e^{2x} \cos 3x}{13} + C.$$

فرمولهای کلی انتگرالهای $e^{ax} \sin bx$ و $e^{ax} \cos bx$ در انتهای کتاب آمده است.

□ انتگرالگیری به کمک تشکیل جدول

چنانکه دیدیم روش انتگرالگیری جزء به جزء را می توان در مورد انتگرالهایی که به صورت زیرند به کار برد

$$\int f(x)g(x) dx$$

که در آن از f می توان بارها مشتق گرفت تا صفر شود و از g می توان بدون هیچ مشکلی بارها انتگرال گرفت. اما اگر تعداد عملیات زیاد باشد ممکن است محاسبه خسته کننده شود. در چنین مواردی راهی برای سازمان دادن به محاسبات وجود دارد که کار را آسان می کند. این راه را انتگرالگیری به کمک تشکیل جدول می نامند که در مثالهای زیر تشریح می شود.

مثال ۶ انتگرال زیر را از راه انتگرالگیری به کمک تشکیل جدول محاسبه کنید

$$\int x^2 e^x dx$$

حل: با انتخاب $f(x) = x^2$ و $g(x) = e^x$ داریم

| $f(x)$ و مشتقاتش | $g(x)$ و انتگرالهایش |
|------------------|----------------------|
| x^2 | e^x |
| $2x$ | e^x |
| 2 | e^x |
| 0 | e^x |

حال توابی را که با پیکان به هم مربوط اند در هم ضرب می کنیم و نتایج را با توجه به علامت روی پیکان جمع جبری می کنیم (علامتهای روی پیکانها یک در میان $+$ و $-$ هستند) و چنین به دست می آوریم

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

توجه کنید که این نتیجه با نتیجه مثال ۴ یکی است.

مثال ۷ انتگرال زیر را از راه انتگرالگیری با تشکیل جدول

حل کردن معادله انتگرالی نسبت به انتگرال مجهول

انتگرالهایی نظیر انتگرال مثال بعد در مسائل مهندسی بسوق پیش می آیند. محاسبه آنها به دو انتگرالگیری جزء به جزء نیاز دارد و نهایتاً باید معادله انتگرالی نسبت به انتگرال مجهول حل شود.

مثال ۵ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int e^{2x} \cos 3x dx.$$

حل: نخست فرمول

$$\int u dv = uv - \int v du$$

را به ازای

$$u = e^{2x}, \quad dv = \cos 3x dx$$

$$du = 2e^{2x}, \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x$$

به کار می بریم و داریم

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x} \sin 3x}{3} - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx.$$

انتگرال دوم همان انتگرال اول است با این تفاوت که $\cos 3x$ جای خود را به $\sin 3x$ داده است. برای محاسبه این انتگرال، انتگرالگیری جزء به جزء را به ازای

$$U = e^{2x}, \quad dV = \sin 3x dx$$

$$dU = 2e^{2x} dx, \quad V = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

به کار می بریم و چنین نتیجه می گیریم

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x} \sin 3x}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx \right).$$

در این رابطه انتگرال مجهول جز در طرف چپ در طرف راست هم با ضریب $2/9$ ظاهر شده است. پس از ترکیب این دو داریم

$$\frac{13}{9} \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x} \sin 3x}{3} + \frac{2e^{2x} \cos 3x}{9} = \frac{2e^{2x} \sin 3x + 2e^{2x} \cos 3x}{9}.$$

$$\int \ln(x+1) dx \quad ۰۸$$

$$\int \tan^{-1} x dx \quad ۰۹$$

$$\int \tan^{-1} ax dx \quad ۰۱۰$$

$$\int \sin^{-1} x dx \quad ۰۱۱$$

$$\int \sin^{-1} ax dx \quad ۰۱۲$$

$$\int x \sec^2 x dx \quad ۰۱۳$$

$$\int 2x \sec^2 x dx \quad ۰۱۴$$

$$\int x^2 e^x dx \quad ۰۱۵$$

$$\int x^2 e^{-x} dx \quad ۰۱۶$$

$$\int (x^2 - 5x) e^x dx \quad ۰۱۷$$

$$\int (x^2 + x + 1) e^x dx \quad ۰۱۸$$

$$\int x^5 e^x dx \quad ۰۱۹$$

$$\int x^2 e^{x^2} dx \quad ۰۲۰$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x dx \quad ۰۲۱$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x dx \quad ۰۲۲$$

$$\int x^2 \cos x dx \quad ۰۲۳$$

$$\int x^5 \sin x dx \quad ۰۲۴$$

$$\int x^2 \cos ax dx \quad ۰۲۵$$

$$\int x \cos(2x+1) dx \quad ۰۲۶$$

$$\int x^3 \sin x dx$$

حل: با انتخاب $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sin x$ داریم

| $f(x)$ و مشتقاتش | | $g(x)$ و انتگرالهایش |
|------------------|-----|----------------------|
| x^3 | (+) | $\sin x$ |
| $3x^2$ | (-) | $-\cos x$ |
| $6x$ | (+) | $-\sin x$ |
| 6 | (-) | $\cos x$ |
| 0 | | $\sin x$ |

حال توابی را که با پیکان به هم مربوط می‌شوند در هم ضرب می‌کنیم و نتایج را با توجه به علامت روی پیکان به هم می‌افزاییم (علامتهای روی پیکانها يك در میان + و - هستند) و چنین به دست می‌آوریم

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C.$$

مسأله‌ها

انتگرالهای مسائل ۱-۳۸ را محاسبه کنید.

$$\int x \sin x dx \quad ۰۱$$

$$\int x \cos 2x dx \quad ۰۲$$

$$\int x^2 \sin x dx \quad ۰۳$$

$$\int x^2 \cos x dx \quad ۰۴$$

$$\int_1^2 x \ln x dx \quad ۰۵$$

$$\int x^2 \ln x dx \quad ۰۶$$

$$\int x^3 \ln x dx \quad ۰۷$$

$y = \ln x$ و خطوط $x = 1$ و $y = 1$ محدود است.

۴۵. مطلوب است حجم ناشی از دوران ناحیه واقع در ربع اول و محدود به محور x و خم $y = x \sin x$ ، $0 \leq x \leq \pi$ حول (الف) محور x ، (ب) حول خط $x = \pi$.

۴۶. مطلوب است مرکز جرم يك ورقه نازك همگن كه به خم $y = \ln x$ ، محور x ، و خط $x = 2$ محدود است.

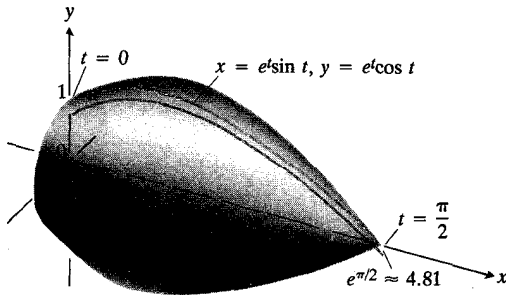
۴۷. يك ورقه نازك با چگالی $\delta = (1+x)$ به محور x و خم $y = \sin x$ ، $0 \leq x \leq \pi$ محدود است. مطلوب است گشتاور این ورقه حول محور y .

۴۸. مطلوب است حجم جسم ایجاد شده از دوران ناحیه محدود به محور x و خم $y = x\sqrt{1-x}$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، حول محور y .

۴۹. مطلوب است مساحت رویه ایجاد شده در اثر دوران خم

$$x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

حول محور x (شکل ۳۰۷).



۳۰۷ رویه مورد بحث در مسأله ۴۹.

۵۰. انتگرال $\int_1^e e^{\sqrt{x}} dx$ را از راه انتگرالگیری جزء به جزء محاسبه کنید. (راهنمایی: نخست از $u^2 = x$ استفاده کنید).

۵۱. گرچه معمولاً در انتگرالگیری جزء به جزء برای تعیین v به صورت $\int dv$ از ثابت انتگرالگیری صرف نظر می کنیم، اما گاه انتخاب ثابتی که برابر صفر نباشد سودمند است. مثلاً، انتگرال

$$\int x \tan^{-1} x dx$$

را با $u = \tan^{-1} x$ و $v = (x^2/2) + 1/2$ محاسبه کنید.

۳۰۷ حاصلضربها و توانهای تابعهای مثلثاتی (غیر از توانهای زوج سینوسها و کسینوسها)

در ریاضیات و علوم با انتگرالهای ترکیبات توابع مثلثاتی بسیار مواجه می شویم و باید بتوانیم آنها را محاسبه کنیم. خواننده

$$\int_1^2 x \sec^{-1} x dx \quad ۲۷$$

$$\int_1^4 \sec^{-1} \sqrt{x} dx \quad ۲۸$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad ۲۹$$

$$\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx \quad ۳۰$$

$$\int x \sin^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) dx \quad ۳۱$$

$$\int x \sin^{-1} \left(\frac{a}{x} \right) dx \quad ۳۲$$

$$\int e^x \sin x dx \quad ۳۳$$

$$\int e^{-x} \cos x dx \quad ۳۴$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx \quad ۳۵$$

$$\int e^{-2x} \sin 2x dx \quad ۳۶$$

$$\int \sin(\ln x) dx \quad ۳۷$$

$$\int x(\ln x)^2 dx \quad ۳۸$$

۳۹. مطلوب است مساحت ناحیه محدود به محور x و خم $y = x \sin x$ به ازای (الف) $0 \leq x \leq \pi$ ، (ب) $\pi \leq x \leq 2\pi$.

۴۰. ناحیه محدود به $x = 0$ ، $y = 0$ ، و $y = \cos x$ ، $0 \leq x \leq \pi/2$ حول محور y دوران می کند. حجم حاصل را به کمک پوسته های استوانه ای بیابید.

۴۱. ناحیه واقع در ربع اول و محدود به محورهای مختصات، خم $y = e^{-x}$ ، و خط $x = 1$ حول محور y دوران می کند. حجم حاصل را بیابید.

۴۲. مطلوب است مرکز جرم يك ورقه نازك همگن كه به خم $y = \sin x$ ، $0 \leq x \leq \pi$ و محور x محدود است.

۴۳. مطلوب است مرکز جرم يك ورقه نازك همگن كه به خم $y = x^2 e^x$ ، محور x ، و خط $x = 1$ محدود است.

۴۴. مطلوب است مرکز جرم يك ورقه نازك همگن كه به خم

سپس از $u = \cos x$ و $du = -\sin x dx$ استفاده می‌کنیم و انتگرال $\sin^{2n+1} x$ را به صورت زیر درمی‌آوریم

$$\begin{aligned} \int \sin^{2n+1} x dx &= \int (1 - \cos^2 x)^n \sin x dx \\ &= - \int (1 - u^2)^n du. \end{aligned} \quad (1)$$

حال می‌توان عبارت $(1 - u^2)^n$ را به کمک قضیه دوجمله‌ای بسط داد و از چندجمله‌ای برحسب u انتگرال گرفت. برای انتگرالگیری از یک توان فرد مثبت کسینوس مانند مورد سینوس عمل می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \cos^{2n+1} x &= \cos^{2n} x \cos x = (\cos^2 x)^n \cos x \\ &= (1 - \sin^2 x)^n \cos x \end{aligned}$$

که با قراردادن $u = \sin x$ و $du = \cos x dx$ چنین به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \int \cos^{2n+1} x dx &= \int (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx \\ &= \int (1 - u^2)^n du. \end{aligned} \quad (2)$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبه

$$\int \cos^5 x dx.$$

حل: داریم

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cos x dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 du \quad \left(\begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right) \\ &= \int (1 - 2u^2 + u^4) du \\ &= u - \frac{2}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + C \\ &= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C. \end{aligned}$$

تاکنون با بسیاری از این ترکیبات روبه‌رو شده است و در این بخش با تعداد دیگری از آنها آشنا می‌شود. انتگرالهایی که به مطالعه آنها می‌پردازیم عبارت‌اند از انتگرالهای توانهای فرد سینوسها و کسینوسها (همچنین توانهای زوج، اما به آنها در بخش آینده می‌پردازیم)؛ انتگرالهای سکانت و مکعبش؛ انتگرالهای توانهای زوج سکانتها و تانژانتها؛ و انتگرالهای حاصلضربهای سینوسها و کسینوسها. نظیر $\sin^2 x \cos^2 x$ ، $\cos^3 x \cos^5 x$ ، $\sin^2 x \cos^2 x$ ، $\sin^3 x \sin^4 x$. پس از بررسی همه اینها مختصری به انتگرالهای معین توابع فرد می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که از انتگرال سکانت درمقیاس بندی نقشه‌هایی که در دریا نوردی به کار می‌رود چگونه استفاده می‌شود.

توانهای فرد مثبت سینوسها و کسینوسها

برای انتگرالگیری از یک توان فرد مثبت $\sin x$ ، مثلاً $\sin^{2n+1} x$ ، آن را به صورت حاصلضرب $\sin x$ و توان مثبت زوجی از $\sin x$ در نظر می‌گیریم و توان مثبت زوج $\sin x$ را برحسب کسینوس می‌نویسیم به این ترتیب می‌توان با جانشانیهای $u = \cos x$ و $du = -\sin x dx$ انتگرالگیری را انجام داد. این جانشانیها انتگرالده را به صورت چند جمله‌ای برحسب u در می‌آورد که انتگرالگیری از آن ساده است.

مثال ۱ مطلوب است

$$\int \sin^3 x dx.$$

حل: داریم

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx \\ &= \int (1 - u^2)(-du) \quad \left(\begin{array}{l} u = \cos x \\ -du = \sin x dx \end{array} \right) \\ &= \int (u^2 - 1) du \\ &= \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C. \end{aligned}$$

انتگرالهای سایر توانهای فرد مثبت $\sin x$ را می‌توان به همین ترتیب محاسبه کرد. داریم

$$\begin{aligned} \sin^{2n+1} x &= \sin^{2n} x \sin x = (\sin^2 x)^n \sin x \\ &= (1 - \cos^2 x)^n \sin x. \end{aligned}$$

انتگرالهای سکانت و کسکانت

آيزك بارو معلم آيزك نيوتن در دانشگاه كيمبريج، نخستين روش واضح محاسبه انتگرال سکانت را در كتاب خود به نام درسهای هندسه^۱ عرضه كرد. روش او بر مبنای نمادهای جديد چنين است

$$\begin{aligned}
 \int \sec x \, dx &= \int \frac{1}{\cos x} \, dx \\
 &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx \\
 &= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \, dx \\
 &= \int \frac{\cos x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} [-\ln |1 - \sin x| \\
 &\quad + \ln |1 + \sin x|] + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C \quad (۳) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} \right| + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} \right| + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{(\cos x)^2} \right| + C \\
 &= \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C \\
 &= \ln |\sec x + \tan x| + C.
 \end{aligned}$$

ضمناً، با يك شگرد می توان انتگرالگیری را بسیار کوتاهتر کرد. داریم

$$\begin{aligned}
 \sec x &= \frac{\sec x (\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} \\
 &= \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}.
 \end{aligned}$$

صورت این کسر مشتق مخرجش است. بنابراین

$$\begin{aligned}
 \int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} \, dx \\
 &= \int \frac{du}{u} \quad (u = \sec x + \tan x) \\
 &= \ln |u| + C.
 \end{aligned}$$

از این رو

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C. \quad (۴)$$

انتگرالگیری مشابهی نشان می دهد که فرمول نظیر انتگرال کسکانت چنين است (مسأله ۲۳ را ببینید).

$$\int \csc x \, dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C. \quad (۵)$$

حال که فرمولهای انتگرالگیری سکانت و کسکانت را در اختیار داریم، محاسبه انتگرالهای مکعبهایشان آسان است.

مثال ۳ مطلوب است محاسبه

$$\int \sec^3 x \, dx.$$

حل: از انتگرالگیری جزء به جزء استفاده می کنیم. این انتگرال با جانشانیهای

$$u = \sec x, \quad du = \sec x \tan x \, dx$$

$$dv = \sec^2 x \, dx, \quad v = \tan x$$

چنین می شود

$$\begin{aligned}
 \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x \, dx \\
 &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx \\
 &= \sec x \tan x + \int \sec x \, dx \\
 &\quad - \int \sec^3 x \, dx.
 \end{aligned}$$

داریم

$$\int u^x du = \frac{1}{x+1} u^{x+1} + C.$$

سایر انتگرالها به صورت متداول اند، بنابراین

$$\blacksquare \int \tan^x x dx = \frac{1}{x} \tan^x x - \tan x + x + C.$$

حاصلضربهای سینوسها و کسینوسها
با انتگرالهای

$$\int \sin mx \sin nx dx$$

$$\int \sin mx \cos nx dx$$

$$\int \cos mx \cos nx dx$$

در این موارد مواجه می‌شویم: نظریهٔ جریان متناوب، مسائل انتقال گرما، خمش تیرها، تحلیل تنش کابلها در پلهای معلق، و در بسیاری از مسائل مربوط به ریاضیات، علوم، و مهندسی که در آنها از سریهای مثلثاتی استفاده می‌شود. برای محاسبهٔ آنها می‌توان از انتگرالگیری جزء به جزء بهره گرفت، اما در هر مورد باید دوبار از این روش استفاده کرد. راه ساده‌تر این است که از اتحادهای زیر استفاده کنیم

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x] \quad (۶)$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m-n)x + \sin (m+n)x] \quad (۷)$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m-n)x + \cos (m+n)x] \quad (۸)$$

این اتحادها را می‌توان بیدرنگ از اتحادهای زیر به دست آورد

$$\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad (۹)$$

$$\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

و

$$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B. \quad (۱۰)$$

بنابراین

$$\int \sec^x x dx = \sec x \tan x + \int \sec x dx$$

و

$$\int \sec^x x dx = \frac{1}{x} \sec x \tan x$$

$$+ \frac{1}{x} \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

در مورد انتگرال $\csc^x x$ مسألهٔ ۲۴ را ببینید.

توانهای زوج مثبت سکانت و تانژانت

در مورد این انتگرالدها از اتحادهای زیر استفاده می‌کنیم

$$\sec^x x = 1 + \tan^x x \quad \text{و} \quad \tan^x x = \sec^x x - 1$$

مثال ۴ مطلوب است محاسبه

$$\int \tan^x x dx.$$

حل:

$$\begin{aligned} \int \tan^x x dx &= \int \tan^x x \cdot \tan^x x dx \\ &= \int \tan^x x \cdot (\sec^x x - 1) dx \\ &= \int \tan^x x \sec^x x dx - \int \tan^x x dx \\ &= \int \tan^x x \sec^x x dx \\ &\quad - \int (\sec^x x - 1) dx \\ &= \int \tan^x x \sec^x x dx \\ &\quad - \int \sec^x x dx + \int dx. \end{aligned}$$

در انتگرال اول با قرارداد

$$u = \tan x, \quad du = \sec^x x dx$$

انتگرالها برابر صفرند. مثلاً

$$\int_{-1}^1 x dx = x^2 \Big|_{-1}^1 = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx &= -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\cos \pi + \cos(-\pi) \\ &= -(-1) + (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{-a}^a \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{\cos a} - \frac{1}{\cos(-a)} = 0.$$

علت صفر بودن این سه انتگرال این است که انتگرالهای توابع فرد بر بازه‌هایی هستند که حول مبدأ متقارن اند. در مورد هر سه تابع داریم $f(-x) = -f(x)$. بنا بر این مساحت ناحیه محدود به هر یک از این توابع در بالای محور x و در سمت چپ مبدأ، برابر است با مساحت ناحیه محدود به آن در زیر محور x و در سمت راست مبدأ. مقدار این مساحت در انتگرالگیری یکدیگر را حذف می‌کنند. همین‌طور مساحت محدود به هر یک از این توابع در زیر محور x و سمت چپ مبدأ، مساحت محدود به آن تابع در بالای محور x و سمت راست مبدأ را حذف می‌کند (شکل ۴.۷ را ببینید).

چه توابعی فردند ؟

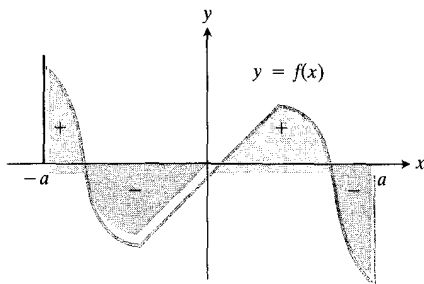
توانهای فرد x : x^{-3} , x^3 , x^{-1} , x

سینوسها: $\sin ax$, $a \neq 0$

توانهای صحیح و فرد توابع فرد: $\frac{1}{\sin^5 x}$, $\sin^3 x$

حاصلضرب یک تابع فرد در یک تابع زوج: $\cos x \sin^3 x$, $x^2 \sin x$

خارج قسمت یک تابع فرد بر یک تابع زوج: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$



۴.۷ نواحی محدود به محور x و نمودار

یک تابع فرد، بر بازه‌ای که حول مبدأ متقارن است، در بالا و پایین محور برابرند. بنابراین انتگرال این تابع از $-a$ تا a صفر است.

مثلاً اگر دو رابطه (۹) را با هم جمع و حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم؛ با قراردادن $A = mx$ و $B = nx$ رابطه (۸) به دست می‌آید. اتحاد (۶) یا تفریق رابطه اول (۹) از رابطه دوم آن به روش مشابهی به دست می‌آید. بالاخره، اگر دو رابطه (۱۰) را به هم بیفزاییم، اتحاد (۷) حاصل خواهد شد.

مثال ۵ از رابطه (۷) به‌ازای $m=3$ و $n=5$ داریم

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 5x dx &= \frac{1}{4} \int [\sin(-2x) + \sin 8x] dx \\ &= \frac{1}{4} \int (\sin 8x - \sin 2x) dx \\ &= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

مثال ۶ نشان دهید که اگر m و n اعدادی صحیح باشند، و $m^2 \neq n^2$ ، آنگاه

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = 0.$$

حل: از رابطه (۸) داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_0^{2\pi}. \end{aligned} \quad (11)$$

(برای انتگرالگیری باید $m-n \neq 0$ و $m+n \neq 0$ که اگر $m^2 \neq n^2$ ، هر دو برقرارند). باری، $(m-n)$ و $(m+n)$ هر دو اعدادی صحیح اند، زیرا m و n اعدادی صحیح اند. وانگهی، سینوس هر مضربی از 2π صفر است. بنا بر این عبارات داخل کروشه در رابطه (۱۱) به‌ازای هر دوحد بسالایی و پایینی انتگرالگیری صفرند. از این‌رو

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = 0.$$

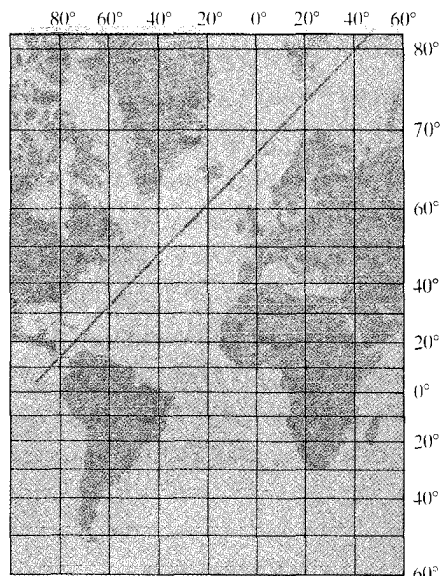
انتگرالهای توابع فرد

در بسیاری از موارد، از توابع در بازه‌هایی نظیر $-a \leq x \leq a$ انتگرال می‌گیریم که حول مبدأ متقارن اند. تعداد چشمگیری از این

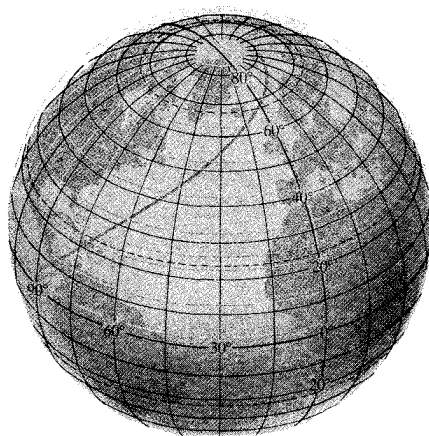
□ نقشه مرکاتور جهان

انتهای سکنات نقش مهمی در رسم نقشه برای دریانوردی به کمک قطب‌نما دارد. آسانترین مسیر برای دریانورد مسیری است که راستای عقربه قطب‌نما در آن ثابت باشد. این مسیر مثلاً می‌تواند مسیر ۴۵° (شمال شرقی) یا ۲۲۵° (جنوب غربی) یا نظایر آن باشد. چنین مسیری در امتداد مارپیچی است که به دور زمین می‌پیچد و به‌سوی یکی از قطبها می‌رود (شکل ۵.۷)، مگر آنکه خط‌سیر دقیقاً از شمال یا جنوب بگذرد یا موازی خط استوا باشد. گرهارد کرامر^۱ مساح و جغرافیدان فلاندری که ما او را با

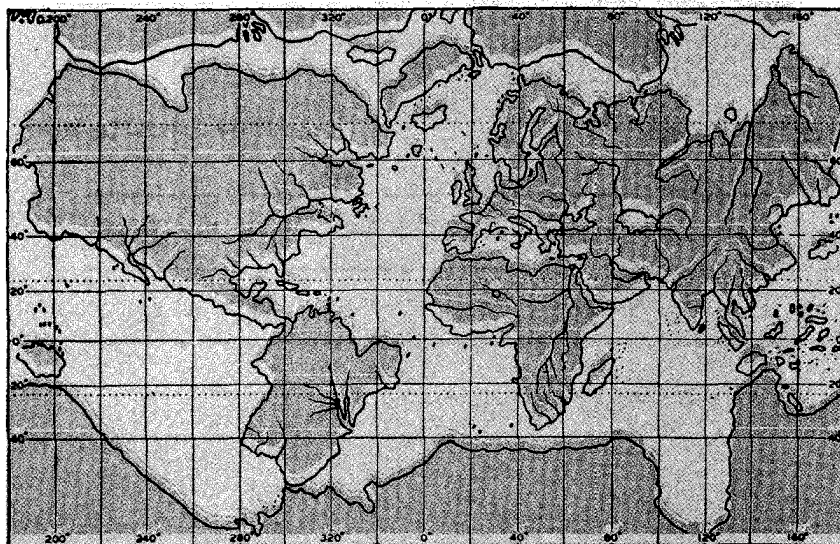
صورت لاتینی نام خانوادگی‌اش یعنی مرکاتور، می‌شناسیم در سال ۱۵۶۹ نقشه‌ای از جهان کشید که در آن همه مارپیجهایی که راستای قطب‌نما در امتداد آنها ثابت است به‌صورت خطوط مستقیم درآمدند (شکل ۶.۷). این دستاورد جالب یکی از مبرمترین نیازمندیهای دریانوردی همه اعصار را برآورده ساخت. به این ترتیب دریانورد می‌تواند در سفر بین دو نقطه امتداد عقربه قطب‌نما را از روی جهت خط مستقیمی که در نقشه مرکاتور آنها را به هم وصل می‌کند به‌دست آورد (شکل ۷.۷).



۷.۷ سفر ذکر شده در شکل ۵.۷ در نقشه مرکاتور.



۵.۷ سفری با سمت‌الراس ثابت ۴۵° شمال‌شرقی از جزایر گالاپاگوس در اقیانوس آرام تا جزیره ژوزف فرانز در اقیانوس منجمد شمالی.



۶.۷ نقشه مرکاتور زمین که در سال ۱۵۶۹ رسم شد.

کرد. اگر R را شعاع کره در نظر بگیریم (شکل ۸.۷)، فاصله D بین استوا و عرض جغرافیایی α برابر است با حاصلضرب R در انتگرال سکانت از 0 تا α :

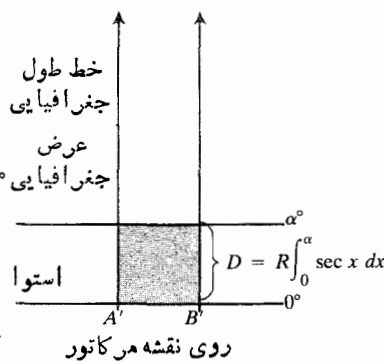
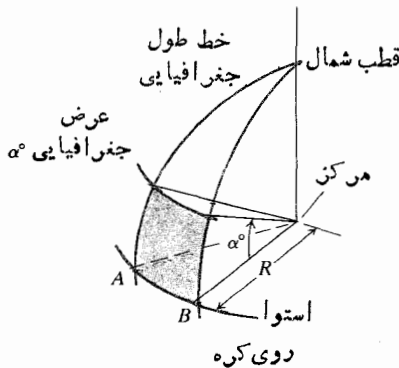
$$D = R \int_0^\alpha \sec x \, dx. \quad (12)$$

بنابراین فاصله بین دو خط با عرض جغرافیایی α° و β° ($\alpha < \beta$) در شمال چنین است

$$\begin{aligned} R \int_\alpha^\beta \sec x \, dx - R \int_0^\alpha \sec x \, dx &= R \int_0^\beta \sec x \, dx \\ &= R \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^\beta. \end{aligned} \quad (13)$$

مثال ۷ فرض کنید قرار است نقشهٔ مراکتور کره‌ای به شعاع ۲۵ cm رسم شود. در این نقشه، بنا به رابطه (۱۳) فاصله بین خط استوا و خط با عرض جغرافیایی 20° در شمال چنین است

$$\begin{aligned} 25 \int_0^{20^\circ} \sec x \, dx &= 25 \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{20^\circ} \\ &\approx 9 \text{ cm}. \end{aligned}$$



۸.۷ خطوط عرض و طول جغرافیایی.

جدول ۲.۷ چگونگی انتگرال گرفتن از توانهای مثبت فرد توابع سینوسی و کسینوسی

و از این جانشانیها بهره بگیرید

بنویسید

برای محاسبه

$$u = \cos x$$

$$(\sin^n x) \sin x = (1 - \cos^2 x)^n \sin x \, dx$$

$$\int \sin^{n+1} x \, dx$$

$$du = -\sin x \, dx$$

$$u = \sin x$$

$$(\cos^n x) \cos x = (1 - \sin^2 x)^n \cos x \, dx$$

$$\int \cos^{n+1} x \, dx$$

$$du = \cos x \, dx$$

فاصله بین خطوط با عرضهای جغرافیایی 60° و 80° در شمال بنا به رابطه (۱۳) برابر است با

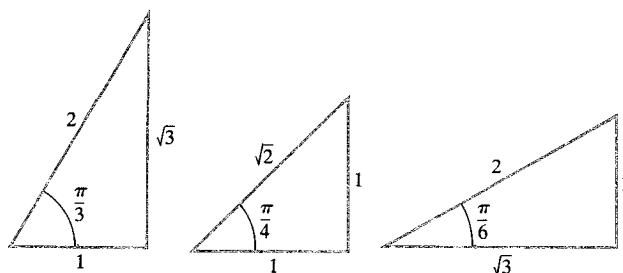
$$25 \int_{60^\circ}^{80^\circ} \sec x \, dx = 25 \ln |\sec x + \tan x| \Big|_{60^\circ}^{80^\circ}$$

$$\approx 28 \text{ cm}.$$

سودمندیهایی نقشه مرکاتور در دریانوردی به قیمت تغییرات قابل ملاحظه‌ای در فواصل به دست می‌آید.

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۲۲، انتگرالها را محاسبه کنید. در محاسبه انتگرالهای معین می‌توانید از مثلثهای شکل ۹.۷ استفاده کنید.



۹.۷ مثلثهای مرجع برای محاسبه توابع مثلثاتی در $\pi/4$ ، $\pi/6$ و $\pi/3$ رادیان.

$$\int \sin^5 x \, dx \quad ۰۱$$

$$\int_0^\pi \sin^5 \frac{x}{4} \, dx \quad ۰۲$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x \, dx \quad ۰۳$$

$$\int \cos^5 x \, dx \quad ۰۴$$

$$\int \sin^5 x \, dx \quad ۰۵$$

$$\int \cos^5 x \, dx \quad ۰۶$$

$$\int \cos^{2/3} x \sin^5 x \, dx \quad ۰۷$$

(داهنمایی: يك عامل $\sin x$ و dx را جدا کنید و بقیه را بر حسب کسینوس بیان کنید.)

$$\int \sin^{2/3} x \cos^3 x \, dx \quad ۰۸$$

(داهنمایی: يك عامل $\cos x$ و dx را جدا کنید و بقیه را بر حسب سینوس بیان کنید.)

$$\int_0^{\pi/3} \sec x \, dx \quad ۰۹$$

$$\int \sec^2 t \, dt \quad ۰۱۰$$

$$\int_{-\pi/3}^0 \sec^2 x \, dx \quad ۰۱۱$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2 x}{\cos x} \, dx \quad ۰۱۲$$

$$\int e^x \sec^2 e^x \, dx \quad ۰۱۳$$

$$\int_0^{\pi/4} \sec^4 x \, dx \quad ۰۱۴$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^4 x} \quad ۰۱۵$$

$$\int \sec^4 x \, dx \quad ۰۱۶$$

$$\int_0^{\pi/4} \sec^4 x \, dx \quad ۰۱۷$$

$$\int \frac{2x \, dx}{\cos^2(x^2)} \quad ۰۱۸$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx \quad ۰۱۹$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x \, dx \quad ۰۲۰$$

$$\int \tan^2 x \, dx \quad ۰۲۱$$

$$\int \cot^2 x \, dx \quad ۰۲۲ \text{ (الف)}$$

$$\int \cot^2 x \, dx \quad ۰۲۲ \text{ (ب)}$$

۰۲۳ نشان دهید

$$\int \csc x \, dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C.$$

(داهنمایی: راه کوتاه به دست آوردن انتگرال سکانت را در مورد کسکانت تکرار کنید.)

۲۴. به کمک نتیجه مسأله ۲۳ نشان دهید

$$\int \csc^2 x \, dx = -\frac{1}{\csc x} \csc x \cot x$$

$$-\frac{1}{\csc x} \ln |\csc x + \cot x| + C.$$

۲۵. مطلوب است محاسبه

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \quad (\text{الف})$$

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \quad (\text{ب})$$

۲۶. مطلوب است محاسبه

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sin x}.$$

(دانهمایی: صورت و مخرج را در $1 - \sin x$ ضرب کنید.)

در مسائل ۲۷-۳۲، انتگرالها را محاسبه کنید.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x \, dx \quad ۲۷$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin^2 x \, dx \quad ۲۸$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx \quad ۲۹$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx \quad ۳۰$$

$$\int_0^{\pi} \cos^3 x \cos^2 x \, dx \quad ۳۱$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos^2 x \, dx \quad ۳۲$$

۳۳. به کمک نتیجه مسأله ۲۳ و اتحاد $2 \sin A \cos A = \sin 2A$ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int \frac{\sec^2 x \csc^2 x}{2} \, dx.$$

۳۴. کدام يك از انتگرالهای زیر برابر صفر است و کدام يك برابر صفر نیست؟ (در مورد اكثر این انتگرالها بدون نوشتن چیزی می توان پاسخ داد.)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos^2 x \, dx \quad (\text{الف})$$

$$\int_{-1}^1 \sin^3 x \cos^2 x \, dx \quad (\text{ب})$$

$$\int_{-L}^L \sqrt{\sin x} \, dx \quad (\text{پ})$$

$$\int_{-a}^a x \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \quad (\text{ت})$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x \sec x \, dx \quad (\text{ث})$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x \, dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x \, dx \quad (\text{چ})$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos x \, dx \quad (\text{ح})$$

$$\int_{-a}^a \sin mx \cos mx \, dx, \quad m \neq 0 \quad (\text{خ})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx \quad (\text{د})$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \quad (\text{ذ})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx \quad (\text{ر})$$

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} x(e^x + e^{-x}) \, dx \quad (\text{ز})$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx \quad (\text{ژ})$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \sin^2 x \, dx \quad (\text{س})$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec x \tan x \, dx \quad (\text{ش})$$

$$\int_{-a}^a (e^x \sin x + e^{-x} \sin x) \, dx \quad (\text{ص})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin x \, dx}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{ض})$$

در انتگرال طرف چپ قرار دهید.

ب) از نتیجه قسمت (الف) بهره بگیرید و نشان دهید

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

۴.۷ توانهای زوج سینوسها و کسینوسها

در این بخش خواهیم دید که چگونه اتحادهایی نظیر

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (1)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (2)$$

و شمار دیگری از اتحادهایی که با آنها سروکار داریم به ما امکان می‌دهند انتگرالها را با کاهش توانهای زوج و حذف ریشه‌های دوم محاسبه کنیم.

کاهش توانهای زوج

مثال ۱

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int (\cos^2 x) dx \\ &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx \quad \left(\begin{array}{l} \text{معادله ۲} \\ \theta = 2x \text{ ازای } x \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left[1 + \cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right] dx \quad \left(\begin{array}{l} \text{معادله ۲} \\ \theta = 2x \text{ ازای } x \end{array} \right) \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

انتگرالی نظیر

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

را که در آنها هم $\sin x$ و هم $\cos x$ توانهای زوج دارند می‌توان به مجموعی از انتگرالهایی تبدیل کرد که در آنها تنها توانهای $\sin x$ یا $\cos x$ موجود باشند. سپس این انتگرالها را می‌توان به روش مثال ۱ محاسبه کرد.

۳۵. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که از بالا به‌خیم $y = 2 \cos x$ و از پایین به‌خیم $y = \sec x$ ، $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$ محدود است.

۳۶. طول خم زیر را بیابید

$$y = \ln(\cos x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

۳۷. طول خم زیر را بیابید

$$y = \ln(\sec x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

۳۸. مرکز جرم ناحیه محدود به محور x ، خم $y = \sec x$ ، و خطوط $x = -\pi/4$ و $x = \pi/4$ را بیابید.

۳۹. ماشین حساب یا جدول خطوط عرض جغرافیایی زیر روی نقشه مرکاتور مثال ۷ چقدر از هم فاصله دارند؟

الف) عرض جغرافیایی 30° و 45° در شمال،

ب) عرض جغرافیایی 45° و 60° در شمال.

۴۰. نشان دهید که هر گاه m, n, p ، و q اعدادی صحیح باشند و $m^2 \neq n^2$ داریم

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx dx = 0 \quad (\text{ب})$$

۴۱. دو تابع f و g را در بازه $a \leq x \leq b$ متعامد گویند هر گاه

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

الف) ثابت کنید که، هر گاه m و n اعدادی صحیح باشند و $m^2 \neq n^2$ ، $\sin nx$ و $\sin mx$ در هر بازه‌ای به طول 2π متعامدند.

ب) ثابت کنید که $\cos nx$ و $\cos mx$ نیز در همان شرایط متعامدند.

پ) ثابت کنید که $\sin mx$ و $\cos nx$ نیز در همان شرایط و یا حتی اگر $m = n$ ، متعامدند.

د) مثال ۶ و مسأله ۴۰ این احکام برای بازه $[0, 2\pi]$ ثابت می‌شود.

۴۲. بوهانی برای صفر بودن انتگرال يك تابع پیوسته فرد چون $f(x)$ از $x = -a$ تا $x = a$.

الف) نخست نشان دهید

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx.$$

برای این منظور می‌توانید $u = -x$ و $du = -dx$ را

بنابراین

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 2x} dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2 \cos^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2} \sqrt{\cos^2 x} dx \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} |\cos x| dx \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \cos x dx \\
 (\cos x \geq 0 \text{ داریم } [0, \pi/4]) \\
 &= \sqrt{2} \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/4} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} [1-0] = \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

مثال ۴ مطلوب است محاسبه

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1-\cos^2 t} dt.$$

حل ۱: با استفاده از اتحاد

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$$

داریم

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1-\cos^2 t} dt &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\sin^2 t} dt \\
 &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\sin t| dt
 \end{aligned}$$

بدون بررسی علامت $\sin t$ روی دامنه $-\pi/4 \leq t \leq \pi/4$ نمی‌توان علامت قدرمطلق را حذف کرد. در این دامنه، $\sin t$ به‌ازای مقادیر کمتر از ۰ منفی است. پس

$$|\sin t| = \begin{cases} -\sin t & -\frac{\pi}{4} \leq t \leq 0 \\ \sin t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین روش درست انتگرالگیری چنین است

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\sin t| dt &= \int_{-\pi/4}^0 -\sin t dt + \int_0^{\pi/4} \sin t dt \\
 &= \cos t \Big|_{-\pi/4}^0 - \cos t \Big|_0^{\pi/4} \\
 &= (1-0) - (0-1) \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

مثال ۲

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x dx \\
 &= \int \cos^2 x dx - \int \cos^4 x dx.
 \end{aligned}$$

$\int \cos^2 x dx$ را در مثال ۱ به‌دست آوردیم. در مورد $\int \cos^4 x dx$ داریم

$$\begin{aligned}
 \int \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx.
 \end{aligned}$$

حال روش انتگرالگیری از هر یک از جملات انتگرالده را می‌دانیم. نتیجه چنین است

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 x dx &= \frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \sin 2x \\
 &+ \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.
 \end{aligned}$$

از ترکیب این نتیجه با نتیجه مثال ۱ داریم

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \cos^2 x dx - \int \cos^4 x dx \\
 &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x \\
 &+ \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.
 \end{aligned}$$

حذف ریشه‌های دوم

مثال ۳ مطلوب است محاسبه

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 2x} dx.$$

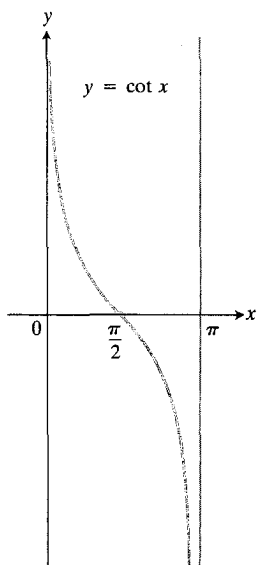
حل: برای حذف ریشه دوم اتحاد (۲) را به‌کار می‌بریم

$$1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta \quad \text{یا} \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

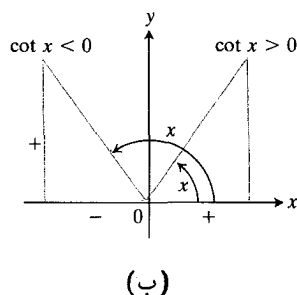
به‌ازای $\theta = 2x$ داریم

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x.$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln |\sin x| \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\
 &\quad - \ln |\sin x| \Big|_{\pi/2}^{3\pi/4} \\
 &= \ln |1| - \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \\
 &\quad - \ln \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \ln |1| \\
 &= -2 \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \ln \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 \\
 &= \ln 2.
 \end{aligned}$$



(الف)



(ب)

۱۰.۷ نمودارهایی که به کمک آنها علامت $\cot x$ در بازه

$\pi/4 \leq x \leq 3\pi/4$ تعیین می‌شود.

جدول ۳.۷ چگونگی انتگرال‌گیری از $\sin^m x \cos^n x$ یعنی حاصلضرب توانهای زوج نامنفی $\sin x$ و $\cos x$

۱. به کمک اتحادهای $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ یا $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ حاصلضرب را چنان تغییر دهید که در نتیجه حاصل تنها توانی از $\sin x$ یا توانی از $\cos x$ (هر کدام مناسبتر است) باشد.
۲. با یک یا چند بار استفاده از $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ یا $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ ، توان زوج نتیجه را به توانهای کوچکتر تبدیل کنید.

اگر علامت قدرمطلق را نادیده می‌گیریم و به اشتباه می‌نوشتیم $\sqrt{1 - \cos^2 t} = \sin t$ چنین به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2 t} dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t dt \\
 &= -\cos t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -0 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

که نادرست است.

حل ۲: راه دیگر محاسبه این انتگرال این است که مانند راه حل اول تا رسیدن به انتگرال $|\sin t|$ پیش برویم و از آن پس با توجه به اینکه تابع $|\sin t|$ زوج است چنین نتیجه بگیریم

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin t| dt &= 2 \int_0^{\pi/2} |\sin t| dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin t dt \\
 &= -2 \cos t \Big|_0^{\pi/2} = 2.
 \end{aligned}$$

مثال ۵ مطلوب است محاسبه

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\csc^2 x - 1} dx.$$

حل: به کمک اتحاد $\csc^2 x - 1 = \cot^2 x$ می‌توان ریشه دوم را حذف کرد و چنین نوشت

$$\begin{aligned}
 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\csc^2 x - 1} dx &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\cot^2 x} dx \\
 &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} |\cot x| dx.
 \end{aligned}$$

برای اینکه ببینیم چگونه می‌توان علامت قدرمطلق را حذف کرد، علامت $\cot x$ را در دامنه انتگرال‌گیری بررسی می‌کنیم. با نگاهی به نمودار شکل ۱۰.۷ (الف) یا مثلثهای شکل ۱۰.۷ (ب) درمی‌یابیم که کتانژانت بین $\pi/4$ و $\pi/2$ مثبت و بین $\pi/2$ و $3\pi/4$ منفی است. بنابراین بازه انتگرال‌گیری را در $\pi/2$ به دو قسمت می‌کنیم و محاسبات را چنین ادامه می‌دهیم

$$\begin{aligned}
 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} |\cot x| dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} |\cot x| dx \\
 &\quad + \int_{\pi/2}^{3\pi/4} |\cot x| dx \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x dx \\
 &\quad + \int_{\pi/2}^{3\pi/4} -\cot x dx
 \end{aligned}$$

مسئله‌ها

مطلوب است محاسبه انتگرالهای مسائل ۱-۲۶.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx \quad ۱$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt \quad ۲$$

$$\int \sin^2 2t \, dt \quad ۳$$

$$\int \cos^2 \theta \, d\theta \quad ۴$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 x \cos^2 x \, dx \quad ۵$$

$$\int_0^{\pi} \sin^6 x \, dx \quad ۶$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin^6 ax \, dx \quad ۷$$

$$\int_0^1 \cos^2 \pi t \, dt \quad ۸$$

$$\int \frac{\sin^6 x}{\cos^2 x} \, dx \quad ۹$$

$$\int \frac{\cos^6 x}{\sin^2 x} \, dx \quad ۱۰$$

$$\int_0^{\pi} \sin^6 y \cos^2 y \, dy \quad ۱۱$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2 \sin^4 t \cos^2 t \, dt \quad ۱۲$$

(داده‌نمایی: $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$)

$$\int \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \, d\theta \quad ۱۳$$

$$\int_{-\pi}^0 \sin^6 x \, dx \quad ۱۴$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} \, dt \quad ۱۵$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx \quad ۱۶$$

$$\int_0^{\pi/10} \sqrt{1 + \cos 5\theta} \, d\theta \quad ۱۷$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos(y/2)} \, dy \quad ۱۸$$

$$\int_0^{\pi/2} \theta \sqrt{1 - \cos \theta} \, d\theta \quad ۱۹$$

(داده‌نمایی: از رابطه $\sqrt{1 - \cos \theta} = \sqrt{2} \sin(\theta/2)$ استفاده کنید.)

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin^2 t} \, dt \quad ۲۰$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x} \, dx \quad ۲۱$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x - 1} \, dx \quad ۲۲$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \, d\theta \quad ۲۳$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 2x} \, dx \quad ۲۴$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\cot^2 \theta + 1} \, d\theta \quad ۲۵$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 t)^{3/2} \, dt \quad ۲۶$$

انتگرالهای مسائل ۲۷-۳۴ را محاسبه کنید. به نظر می‌رسد که برای محاسبه این انتگرالها باید توانها را کاهش داد یا ریشه‌های دوم را حذف کرد. اما اگر از راههای دیگری بهره بگیریم، سریعتر به نتیجه می‌رسیم.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 x} \sin x \, dx \quad ۲۷$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 t} \, dt \quad ۲۸$$

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} \, dx \quad ۲۹$$

$$\int \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \, d\theta \quad ۳۰$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx \quad ۳۱$$

$$\int \frac{\cos 2t}{\sin^2 2t} \, dt \quad ۳۲$$

از همه توابع گویا انتگرال گرفت. نخستین مرحله که در این بخش به آن می پردازیم بررسی جاننا نیهایی است که دوجمله ایهای نظیر

$$u^2 - a^2 \text{ و } a^2 + u^2, a^2 - u^2$$

را به تک جمله ایهای مربع تبدیل می کنند. دومین مرحله که در بخش ۶.۷ بررسی می شود ساده کردن انتگرالهای شامل $ax^2 + bx + c$ از راه کامل کردن مربع و سپس قراردادن تک جمله ایهای مربع به جای مجموعها و تفاضلهای مربعات حاصل است. سومین و آخرین مرحله که در بخش ۷.۷ به آن می پردازیم بیان توابع گویا به این صورتهاست: مجموعهای چندجمله ایها (که اکنون می دانیم چگونه از آنها انتگرال بگیریم)، کسرهایی که مخرجشان به صورت حاصلضرب عوامل درجه اول است (که پس از انتگرالگیری به صورت لگاریتم یا کسر درمی آیند)، و کسرهایی که مخرجشان به صورت درجه دوم است (که از آنها می توان با روشهایی که در این بخش و بخش بعدی عرضه می شود انتگرال گرفت).

جاننا نیهایی مثلثاتی در مورد ترکیب مربعات

به کمک جاننا نیهایی مثلثاتی می توان به جای چندجمله ایهای

$$u^2 - a^2, a^2 + u^2, a^2 - u^2$$

تک جمله ایهای مربع قرارداد. به این ترتیب شماری از انتگرالهای مهم به انتگرالهایی تبدیل می شوند که یا آنها را می شناسیم یا می توانیم درجداول بیابیم. متداولترین جاننا نیهایی عبارتاند از $u = a \sin \theta$, $u = a \tan \theta$, و $u = a \sec \theta$. با جاننا ن

$$a^2 - u^2 = a^2 - a^2 \sin^2 \theta = a^2 (1 - \sin^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta.$$

(۱)

با جاننا ن $u = a \tan \theta$ داریم

$$a^2 + u^2 = a^2 + a^2 \tan^2 \theta = a^2 (1 + \tan^2 \theta) = a^2 \sec^2 \theta.$$

(۲)

با جاننا ن $u = a \sec \theta$ داریم

$$u^2 - a^2 = a^2 \sec^2 \theta - a^2 = a^2 (\sec^2 \theta - 1) = a^2 \tan^2 \theta.$$

(۳)

به طور خلاصه

$$(۴) \text{ جاننا ن } u = a \sin \theta \text{ را به } a^2 - u^2 \text{ تبدیل می کند.}$$

$$(۵) \text{ جاننا ن } u = a \tan \theta \text{ را به } a^2 + u^2 \text{ تبدیل می کند.}$$

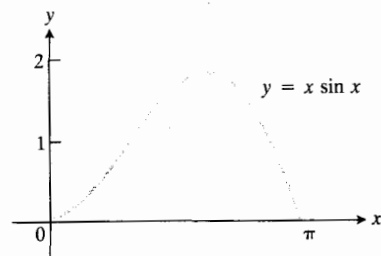
$$۳۳. \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt$$

$$۳۴. \int \sin 2x (1 - \cos 2x)^{3/2} dx$$

۳۵. مطلوب است مساحت بین محور x و خم $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$ و $0 \leq x \leq \pi$

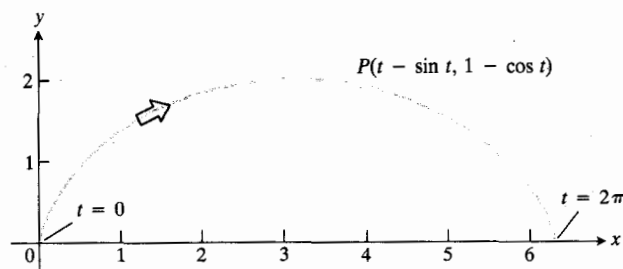
۳۶. مطلوب است حجم حاصل از دوران قوس $y = \sin x$ حول محور x ، $0 \leq x \leq \pi$

۳۷. ناحیه محدود به خم $y = x \sin x$ و بازه $0 \leq x \leq \pi$ حول محور x دوران می کند و جسمی ایجاد می شود (شکل ۱۱.۷). حجم جسم را بیابید.



۱۱.۷ خم مسئله ۳۷.

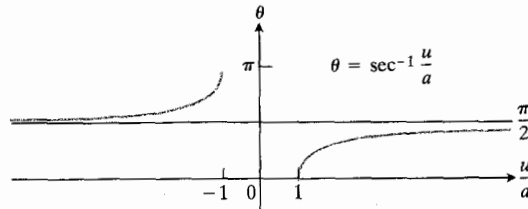
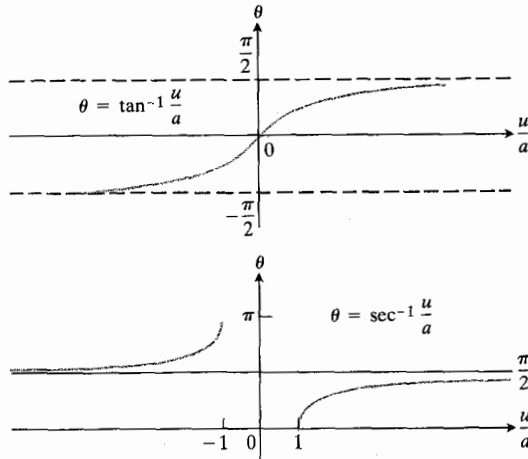
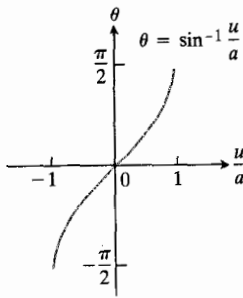
۳۸. نمودار $y = 1 - \cos t$, $x = t - \sin t$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ طاقی است روی محور x (شکل ۱۲.۷) مطلوب است مساحت رویه حاصل از دوران این طاق حول محور x .



۱۲.۷ خم مسئله ۳۸. این خم را چرخزاد می نامند. خمی که یک ذره واقع در روی یک چرخ در حال غلتش طی می کند از همین نوع است. در بخش ۹.۸ برخی خواص جالب این خم بررسی می شود.

۵.۷ جاننا نیهایی مثلثاتی که در آنها تک جمله ایهای مربع به جای $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$, و $u^2 - a^2$ قرار می گیرند

حال به یک برنامه سه مرحله ای می پردازیم که با اجرای آن می توان



۱۳.۷ نمودارهای آرک سینوس، آرک تانژانت، و آرک سکانت
بر حسب u/a

داریم

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a^2 \sec^2 \theta} = \frac{1}{a} \int d\theta \quad (7)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \theta + C = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C.$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}, \quad a > 0.$$

حل: برای نشان دادن يك تك جمله ای مربع به جای $a^2 - u^2$
(و لذا حذف ریشه دوم) چنین قرار می دهیم

$$u = a \sin \theta, \quad \theta = \sin^{-1} \frac{u}{a}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$du = a \cos \theta d\theta$$

$$a^2 - u^2 = a^2(1 - \sin^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta.$$

(۶) جانشانی $u = a \sec \theta$ ، $u^2 - a^2$ را به $a^2 \tan^2 \theta$ تبدیل می کند.

همواره وقتی از جانشانی بهره می گیریم، میل داریم این عمل معکوسپذیر باشد، یعنی بتوان نتایج نهایی را بر حسب متغیرهای اصلی بیان کرد. مثلاً، اگر $u = a \sin \theta$ ، ما یلیم بتوانیم پس از انتگرالگیری رابطه

$$\theta = \sin^{-1} \frac{u}{a}$$

را در نتایج قرار دهیم، اگر $u = a \tan \theta$ ، ما یلیم بتوانیم پس از انتگرالگیری رابطه

$$\theta = \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

را در نتایج قرار دهیم، و همین طور در مورد $u = a \sec \theta$. چنانکه در بخش ۲.۶ گفته شد، این جانشانیها تنها به ازای مقادیر خاصی از θ معکوس دارند. برای معکوسپذیر بودن

$$u = a \sin \theta \text{ لازم است } \theta = \sin^{-1} \frac{u}{a} \text{ و } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u = a \tan \theta \text{ لازم است } \theta = \tan^{-1} \frac{u}{a} \text{ و } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$u = a \sec \theta \text{ لازم است}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{اگر } \frac{u}{a} \geq 1, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \text{اگر } \frac{u}{a} \leq -1, \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{array} \right\} \theta = \sec^{-1} \frac{u}{a}$$

شکل ۱۳.۷ را ببینید.

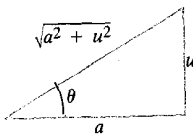
مثال ۱ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2}.$$

حل: با قراردادن

$$u = a \tan \theta, \quad du = a \sec^2 \theta d\theta$$

$$a^2 + u^2 = a^2 + a^2 \tan^2 \theta = a^2(1 + \tan^2 \theta) = a^2 \sec^2 \theta$$



۱۴۰۷ با مراجعه به این مثلث که در آن

$u = a \tan \theta$ ، توابع مثلثاتی θ را می توان

بر حسب u بیان کرد. مثلاً

$$\sec \theta = (\sqrt{a^2 + u^2})/a$$

که در آن $C' = C - \ln a$. به چگونگی بیان $\ln|\sec \theta + \tan \theta|$ توجه کنید: يك مثلث مرجع را چنان رسم می کنیم که جانشانی اصلی را توصیف کند (شکل ۱۴۰۷) و از روی این مثلث نسبتها را می یابیم.

مثال ۴ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}, \quad \left| \frac{u}{a} \right| > 1.$$

حل: برای نشان دادن يك تك جمله ای مربع به جای $u^2 - a^2$ ،

چنین قرار می دهیم

$$u = a \sec \theta, \quad \theta = \sec^{-1} \frac{u}{a}$$

$$du = a \sec \theta \tan \theta$$

$$u^2 - a^2 = a^2(\sec^2 \theta - 1) = a^2 \tan^2 \theta.$$

با این جانشانی نتیجه می گیریم

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{u}{a} > 1 \text{ به ازای}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \quad \frac{u}{a} < -1 \text{ به ازای}$$

(شکل ۱۳۰۷ را ببینید). پس

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sec \theta \tan \theta d\theta}{\sqrt{a^2 \tan^2 \theta}} \\ &= \int \frac{\sec \theta \tan \theta d\theta}{|\tan \theta|} \quad (a > 0) \\ &= \pm \int \sec \theta d\theta \\ &= \pm \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\ &= \pm \ln \left| \frac{u}{a} \pm \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right| + C. \end{aligned}$$

(شکل ۱۵۰۷)

پس

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} &= \int \frac{a \cos \theta d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta}} \\ &= \int \frac{a \cos \theta d\theta}{|a \cos \theta|} \\ &= \int d\theta \end{aligned} \quad (8)$$

$$(a \cos \theta > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ به ازای})$$

$$= \theta + C$$

$$= \sin^{-1} \frac{u}{a} + C.$$

مثال ۳ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}}, \quad a > 0.$$

حل: برای نشان دادن يك تك جمله ای مربع به جای $a^2 + u^2$

چنین قرار می دهیم

$$u = a \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$du = a \sec^2 \theta d\theta$$

$$a^2 + u^2 = a^2(1 + \tan^2 \theta) = a^2 \sec^2 \theta.$$

پس

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} &= \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{a^2 \sec^2 \theta}} \\ &= \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{|\sec \theta|} \quad (a > 0) \\ &= \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \quad (9) \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a} + \frac{u}{a} \right| + C \quad (\text{با توجه به شکل ۱۴۰۷}) \\ &= \ln |\sqrt{a^2 + u^2} + u| + C' \end{aligned}$$

بنابراین

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C'. \quad (۱۱)$$

مثال ۵ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

حل: برای نشان دادن يك تك جمله‌ای مربع به جای $9 - x^2$ -
چنین قرار می‌دهیم

$$x = 3 \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$dx = 3 \cos \theta d\theta$$

$$9 - x^2 = 9(1 - \sin^2 \theta) = 9 \cos^2 \theta.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}} &= \int \frac{9 \sin^2 \theta \cdot 3 \cos \theta d\theta}{|3 \cos \theta|} \\ &= 9 \int \sin^2 \theta d\theta \\ &\quad (\text{به‌ازای } \cos \theta > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$= 9 \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

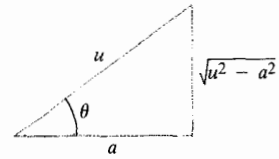
$$= \frac{9}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + C$$

$$= \frac{9}{2} (\theta - \sin \theta \cos \theta) + C$$

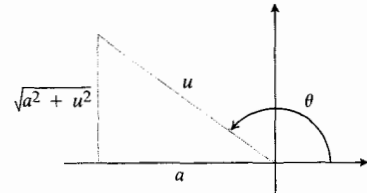
$$= \frac{9}{2} \left(\sin^{-1} \frac{x}{3} - \frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3} \right) + C$$

(شکل ۱۶.۷)

$$= \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \sqrt{9 - x^2} + C.$$



(الف)



(ب)

۱۵.۷ (الف) مثلث مرجع برای

$$u = a \sec \theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$$

(ب) مثلث مرجع برای

$$u = a \sec \theta, \quad \pi/2 < \theta < \pi.$$

پس

علامتها را چه بکنیم؟ وقتی $0 < \theta < \pi/2$ ، تانژانت و
سکانت مثبت اند و هر دو علامت مثبت است. وقتی که $\pi/2 < \theta < \pi$ ،
سکانت و تانژانت هر دو منفی اند. بنا براین

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \begin{cases} \ln \left| \frac{u}{a} + \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right| + C \\ -\ln \left| \frac{u}{a} - \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right| + C. \end{cases} \quad (۱۰) \quad \text{یا}$$

خوشبختانه نیازی به این فرمول دوسطری نیست زیرا هر دو صورت
طرف راست این فرمول واقعاً برابرند

$$\begin{aligned} -\ln \left| \frac{u}{a} - \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right| &= \ln \left| \frac{a}{u - \sqrt{u^2 - a^2}} \right| \\ &= \ln \left| \frac{a(u + \sqrt{u^2 - a^2})}{(u - \sqrt{u^2 - a^2})(u + \sqrt{u^2 - a^2})} \right| \\ &= \ln \left| \frac{a(u + \sqrt{u^2 - a^2})}{a^2} \right| \\ &= \ln \left| \frac{u + \sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right| \\ &= \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| - \ln a. \end{aligned}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{25+y^2}} \quad ۰۷$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{1+9y^2}} \quad ۰۸$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{25+9y^2}} \quad ۰۹$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-9}} \quad ۰۱۰$$

$$\int \frac{z dz}{\sqrt{9z^2-1}} \quad ۰۱۱$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{25z^2-9}} \quad ۰۱۲$$

$$\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}} \quad ۰۱۳$$

$$\int_2^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}} \quad ۰۱۴$$

$$\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} \quad ۰۱۵$$

در مسائل ۱۶-۲۲، انتگرالها را با جاننا نینهای داده شده محاسبه کنید.

$$\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-16}}, \quad y=4 \sec u \quad ۰۱۶$$

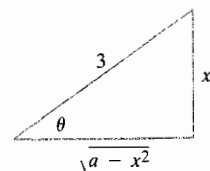
$$\int_2^4 \sqrt{x^2-4} dx, \quad x=2 \sec u \quad ۰۱۷$$

$$\int_0^{4/5} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x=\cos u \quad ۰۱۸$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}, \quad x=3 \sin u \quad ۰۱۹$$

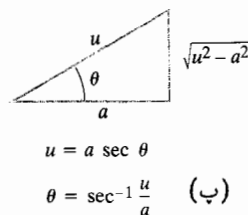
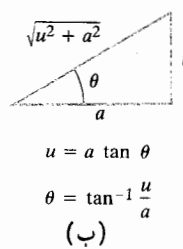
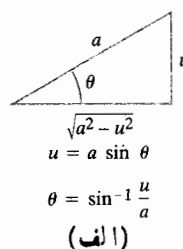
$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x=\tan u \quad ۰۲۰$$

$$\int_{5/4}^{5/3} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad x=\csc u \quad ۰۲۱$$



۱۶.۷ مثلث مرجع برای
 $x=3 \sin \theta, 0 < \theta < \pi/2$.

مسئله‌ها



مثلثهای مرجع

در مسائل ۱-۱۵، انتگرالها را محاسبه کنید.

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2} \quad ۰۱$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{8+2x^2} \quad ۰۲$$

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} \quad ۰۳$$

$$\int_0^{2/3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \quad ۰۴$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{2 dx}{\sqrt{1-4x^2}} \quad ۰۵$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} \quad ۰۶$$

$$\int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{2 - \cos^2 \theta}} \quad ۳۸$$

۳۹. مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{16 - y^2}}$$

الف) بدون استفاده از جانشانی مثلثاتی

ب) با استفاده از جانشانی مثلثاتی.

۴۰. مطلوب است محاسبه

$$\int_0^2 \frac{x dx}{2 + x^2} \quad \text{الف)}$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{2 + x^2} \quad \text{ب)}$$

۴۱. مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{x dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$$

الف) بدون استفاده از جانشانی مثلثاتی

ب) با استفاده از جانشانی مثلثاتی.

۴۲. مطلوب است محاسبه

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{الف)}$$

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{ب)}$$

۴۳. به کمک جانشانی $u = az$ ، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} \quad \text{الف)}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \quad \text{ب)}$$

۴۴. به فرض $\theta = \sin^{-1}(u/2)$ ، $\cos \theta$ و $\tan \theta$ را بر حسب

u بیابید.

۴۵. مطلوب است محاسبه موارد زیر بر حسب u و a .

$$\sin\left(\tan^{-1} \frac{u}{a}\right) \quad \text{الف)}$$

$$\cos\left(\sec^{-1} \frac{u}{a}\right) \quad \text{ب)}$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx, \quad x = \cos^2 u \quad ۲۲$$

در مسائل ۲۳-۳۸، انتگرالها را محاسبه کنید.

$$\int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx \quad ۲۳$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x^2}} \quad ۲۴$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2 - (x-1)^2}} \quad ۲۵$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2}} \quad ۲۶$$

$$\int_0^1 \frac{12 dx}{\sqrt{2 - x^2}} \quad ۲۷$$

$$\int_0^{3/2} \frac{x dx}{\sqrt{2 + x^2}} \quad ۲۸$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad ۲۹$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{2 - x^2}} dx \quad ۳۰$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1/4}} \quad ۳۱$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 5x^2}} \quad ۳۲$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \quad ۳۳$$

$$\int_0^{(1/2)\ln 3} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} \quad ۳۴$$

$$\int_{3/4}^{4/5} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \quad ۳۵$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(1 - x^2)^{3/2}} \quad ۳۶$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} \quad ۳۷$$

۶.۷ انتگرالهای شامل ax^2+bx+c

به کمک کامل کردن مربع می توان سه جمله ای درجه دوم کلی

$$ax^2+bx+c, \quad a \neq 0$$

را به صورت $a(u^2 \pm A^2)$ درآورد و سپس با استفاده از یکی از جانشانیهای مثلثاتی مورد بحث در بخش پیشین می توان به جای $u^2 \pm A^2$ يك تك جمله ای مربع قرارداد. همان طور كه در مثالهای زیر خواهیم دید از این راه یعنی از راه کامل کردن مربع و جانشانی مثلثاتی می توان شماری از انتگرالهای دیگر را محاسبه کرد.

مثال ۱ کامل کردن مربع.

$$4x^2 + 4x + 2 = 4(x^2 + x) + 2$$

$$= 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 2$$

$$= 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 2 - 1$$

$$= 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$= 4\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) = 4(u^2 + A^2).$$

مثال ۲ کامل کردن مربع.

$$2x^2 - 6x + 4 = 2(x^2 - 3x) + 4$$

$$= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 4$$

$$= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 4 - \frac{9}{2}$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

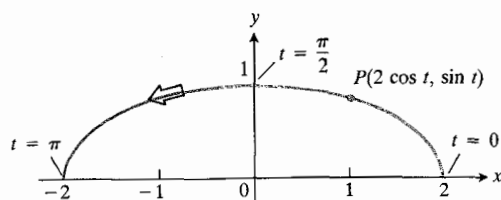
$$= 2\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2(u^2 - A^2).$$

۴۶. مطلوب است مساحت ناحیه ای که در ربع اول واقع و به خم $y = \sqrt{1 - (x^2/4)}$ محدود است.

۴۷. مطلوب است مساحت رویه حاصل از دوران خم

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

حول محور x . شکل ۱۷.۷ را ببینید.



۱۷.۷ خم $x = 2 \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$

درمسأله ۴۷، نیمة بالایی يك بیضی است. پیکان جهت افزایش t را نشان می دهد.

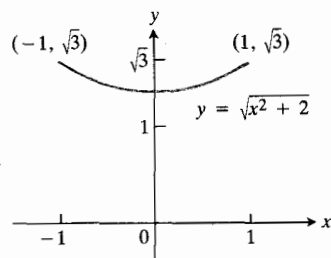
۴۸. مطلوب است طول بخشی از سهمی $y = x^2$ که بین $x = 0$ تا $x = \pi/3$ قرارداد.

۴۹. مطلوب است جوابی از معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\right)$$

که نقطه $(\sqrt{2}, 4/\pi)$ در آن صدق کند.

۵۰. مطلوب است مساحت رویه حاصل از دوران خم $y = \sqrt{x^2 + 2}$ حول محور x . شکل ۱۸.۷ را ببینید.



۱۸.۷ خم مربوط بهمسأله ۵۰.

۵۱. مطلوب است گشتاوری که يك سیم همگن نازك به چگالی δ واقع بر خم $y = e^x, 0 \leq x \leq \ln \sqrt{3}$ حول محور x ایجاد می کند.

روش کلی چنین است

مثال ۵ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 2}$$

حل: با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x + 2 &= 2(x^2 + 2x + 1) + 0 \\ &= 2\left(x^2 + 2x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \\ &= 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \\ &= 2\left(u^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

انتگرال چنین محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 2} &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + (1/2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + a^2} \quad \left(a = \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C \quad \left(\begin{array}{l} \text{بخش ۵.۷} \\ \text{مثال ۱} \end{array}\right) \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x + 1) + C. \end{aligned}$$

مثال ۶ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 4}}$$

حل: داریم

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x + 4 &= 2(x^2 - 3x + 2) \\ &= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 4 - \frac{9}{2} \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \\ &= 2\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

$$= a(u^2 \pm A^2) \quad (1)$$

که در آن

$$x + \frac{b}{2a} = u \quad \text{و} \quad \frac{4ac - b^2}{4a^2} = \pm A^2$$

مثال ۳ کامل کردن مربع.

$$\begin{aligned} 2x - x^2 &= -(x^2 - 2x) = -(x^2 - 2x + 1) + 1 \\ &= -(x - 1)^2 + 1 \\ &= -((x - 1)^2 - 1) \quad (\text{به صورت رابطه ۱}) \\ &= -(u^2 - 1) \\ &= 1 - u^2. \quad (\text{صورت ساده تر}) \end{aligned}$$

سه مثال بعدی، چگونگی استفاده از محاسبات مثالهای ۱-۳ را در عملیات انتگرالگیری نشان می‌دهد.

مثال ۴ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

حل: بنا به مثال ۳ داریم

$$2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2 = 1 - u^2$$

پس انتگرال چنین محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} &= \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= \sin^{-1}u + C \\ &= \sin^{-1}(x - 1) + C. \end{aligned}$$

مسأله‌ها

با جانشانیهای

در مسائل ۱-۲۴، انتگرالها را محاسبه کنید.

۱. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+5}$

۲. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

۳. $\int_1^2 \frac{x dx}{x^2-2x+5}$

۴. $\int_1^{5/2} \frac{x dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

۵. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$

۶. $\int \frac{2 dx}{9x^2-6x+5}$

۷. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}$

۸. $\int \frac{3x dx}{9x^2-6x+5}$

۹. $\int \frac{x dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}$

۱۰. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$

۱۱. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$

۱۲. $\int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+13}}$

۱۳. $\int_{-2}^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2x+13}}$

۱۴. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

۱۵. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

۱۶. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

$$a = \frac{1}{2}, du = dx, x+1 = u + \frac{5}{2}, u = x - \frac{3}{2}$$

انتگرال به صورت زیر دومی آید

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{2x^2-6x+2}} &= \int \frac{(u+5/2) du}{\sqrt{2(u^2-a^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{u du}{\sqrt{u^2-a^2}} \\ &\quad + \frac{5}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}. \end{aligned}$$

در انتگرال اول فرض می کنیم

$$u du = \frac{1}{2} dz \text{ و } dz = 2u du, z = u^2 - a^2$$

و در مورد انتگرال دوم رابطه (۱۱) از بخش ۵.۷ را به کار می بریم.
به این ترتیب چنین نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} \int \frac{u du}{\sqrt{u^2-a^2}} &= \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} \\ &= \sqrt{z} + C_1 \\ &= \sqrt{u^2-a^2} + C_1 \end{aligned}$$

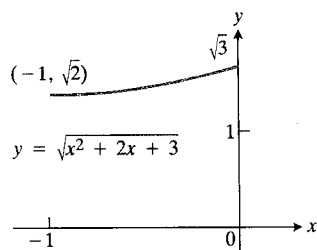
و

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2-a^2}| + C_2.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{2x^2-6x+2}} &= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln |u + \sqrt{u^2-a^2}| + C \\ &= \sqrt{\frac{x^2-2x+2}{2}} \\ &\quad + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2-2x+2} \right| + C. \end{aligned}$$

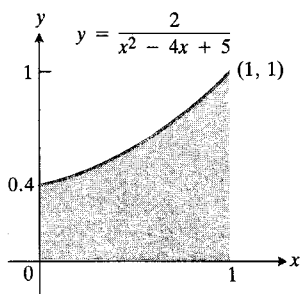
۲۷. مطلوب است مساحت رویه حاصل از دوران قوس $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ ، $-1 \leq x \leq 0$ حول محور x . شکل ۲۰۷ را ببینید.



۲۰۷ قوس مسأله ۲۷.

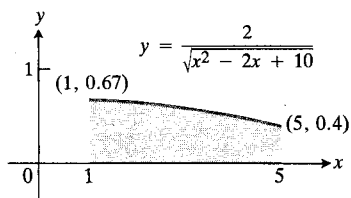
۲۸. الف) مطلوب است مساحت ناحیه محدود به خم $y = 2/(x^2 - 4x + 5)$ ، محورهای مختصات، و خط $x = 1$ (شکل ۲۱۰۷).

ب) گشتاوری را بیابید که يك ورقه همگن نازك به چگالی δ و منطبق بر ناحیه ذکر شده در قسمت الف) حول محور y ایجاد می کند.



۲۱۰۷ ناحیه مسأله ۲۸.

۲۹. مطلوب است مرکز جرم يك ورقه همگن نازك که به محور x ، خم $y = 2/\sqrt{x^2 - 2x + 10}$ و خطوط $x = 1$ و $x = 5$ محدود است (شکل ۲۲۰۷).



۲۲۰۷ ورقه مسأله ۲۹.

$$\int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{2x-x^2}} \quad ۱۷$$

$$\int \frac{(x-1) dx}{\sqrt{x^2-2x+3}} \quad ۱۸$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} \quad ۱۹$$

$$\int_5^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}} \quad ۲۰$$

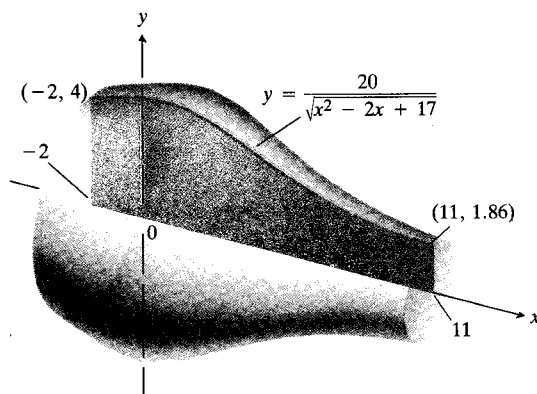
$$\int_0^1 \frac{(1-x) dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} \quad ۲۱$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} \quad ۲۲$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x dx}{x^2+2x+5} \quad ۲۳$$

$$\int \frac{(2x+3) dx}{2x^2+2x+5} \quad ۲۴$$

۲۵. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به محور x ، خم $y = 20/\sqrt{x^2 - 2x + 17}$ ، و خطوط $x = -2$ و $x = 11$ حول محور x . شکل ۱۹۰۷ را ببینید.



۱۹۰۷ جسمی که از دوران ناحیه مذکور در مسأله ۲۵ ایجاد می شود.

۲۶. مطلوب است مقدار میانگین تابع

$$f(x) = \frac{2}{(x^2 - 2x + 8)}$$

روی بازه از $x = 2$ تا $x = 4$.

مثال ۱ نمونه‌ای از جمع دو کسر که می‌خواهیم حاصل جمع آنها را تجزیه کنیم.

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} = \frac{2(x-3) + 3(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} \quad (1)$$

با جمع کردن کسره‌های سمت چپ، کسر سمت راست به دست می‌آید. عمل عکس آن عبارت است از یافتن ثابتهای A و B چنان که داشته باشیم

$$\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}.$$

(لحظه‌ای تصور کنید که نمی‌دانید $A=2$ ، $B=3$) ثابتهای A و B را ضرایب مجهول می‌نامیم. اگر دو طرف تساوی را در مخرج مشترک ضرب کنیم، داریم

$$5x-3 = A(x-3) + B(x+1)$$

$$= (A+B)x - 3A + B.$$

این رابطه اتحادی است بر حسب x اگر و تنها اگر ضرایب توانهای متساوی x در دو طرف آن با هم برابر باشند

$$A+B=5, \quad -3A+B=-3.$$

از این دو معادله ضرایب مجهول چنین به دست می‌آیند

$$A=2, \quad B=3.$$

مثال ۲ دو عامل درجه اول در مخرج. مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} dx.$$

حل: بنا به مثال ۱ داریم

$$\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} dx = \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{3}{x-3} dx$$

$$= 2 \ln |x+1| + 3 \ln |x-3| + C.$$

مثال ۳ عامل درجه اول مکرر در مخرج. کسر

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}$$

را به صورت مجموع کسره‌های ساده بنویسید.

مطلوب است حدهای مذکور در مسائل ۳۰ و ۳۱.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \int_x^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-3}} \quad 30$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} \int_x^{-4} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-8x-15}} \quad 31$$

TOOLKIT PROGRAM

Super * Grapher

۲.۲ انتگرالگیری از توابع گویا به روش کسره‌های ساده

حال به بررسی روش کسره‌های ساده که روشی اساسی برای آماده ساختن توابع گویا برای انتگرالگیری است می‌پردازیم. با این روش می‌توان خارج قسمت دو چند جمله‌ای دلخواه را (مثلاً، تابع گویایی را که می‌خواهیم از آن انتگرال بگیریم) به مجموعی از کسره‌های ساده‌تر تبدیل کرد که با روشهایی که در اختیار داریم قابل انتگرالگیری باشند مثلاً، رابطه

$$\frac{4x^5 - 15x^3 + 4x^2 + 9x + 8}{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1}$$

$$= \underbrace{x+1}_{(1)} - \underbrace{\frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{4x^2+2x+2}}_{(3)}$$

تابع گویای طرف چپ را به صورت مجموعی بیان می‌کند که مشتمل است بر (۱) یک چند جمله‌ای، (۲) کسرهایی که مخرجشان عامل درجه اول یا عوامل درجه اول مکررند و انتگرال آنها به صورت لگاریتمی یا کسری است، و (۳) کسری که مخرجش چند جمله‌ای درجه دوم است و از آن می‌توان با روشهای جانشانی بخشهای ۵.۷ و ۶.۷ انتگرال گرفت.

از بسزدگی این مثال فرسید، در مسائل پایان این بخش به نمونه‌ای به این پیچیدگی بر نخواهید خورد. این مثال را تنها از آن جهت آوردیم که نشان دهیم چگونه می‌توانیم از روشهایی که آموختیم برای انتگرالگیری از توابع گویا، دست کم از لحاظ نظری، بهره بگیریم. اکنون نگاهی بر چند مثال ساده‌تر می‌افکنیم، روش کسره‌های ساده را به صورت کلی عرضه می‌کنیم، و سپس روش ساده‌ای را توصیف می‌کنیم به نام روش پوشاندن هویساید (به یاد اولیور هویساید، ۱۸۵۰-۱۹۲۵، پیشگام در مهندسی برق و آنالیز برداری).

اگر معادله چهارم را از معادله دوم کم کنیم، داریم

$$-2 = -2A, \quad A = 1.$$

حال از معادله اول داریم

$$C = -A = -1.$$

با دانستن A و C ، می توان B را از معادله سوم یافت

$$B = 1.$$

سرانجام از معادله چهارم چنین به دست می آید

$$D = 2 - B + C = 1.$$

بنابراین

$$\frac{-2x+2}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

مثال ۵ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{-2x+2}{(x^2+1)(x-1)^2} dx.$$

حل: انتگرالده را مانند مثال ۴ به کسره های ساده تجزیه می کنیم، و سپس از کسره های ساده انتگرال می گیریم

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x+2}{(x^2+1)(x-1)^2} dx &= \int \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \ln(x^2+1) + \tan^{-1}x \end{aligned}$$

$$-2 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

حال از تابع گویایی که این بخش را با آن آغاز کردیم انتگرال می گیریم تا بسا روش انتگرالگیری از آن آشنا شوید. دوباره می گوئیم که از پیچیدگی انتگرالده نهراسید. در مسائل بعدی انتگرالدهی نظیر این نخواهید دید.

مثال ۶ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{2x^5 - 15x^2 + 4x^2 + 9x + 8}{4x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 2x + 1} dx.$$

حل: چون مخرج يك عامل درجه اول مكرر، یعنی $(x+2)^2$ دارد، باید کسر را به صورت زیر نوشت

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}. \quad (2)$$

اگر طرفین رابطه (۲) را در مخرج مشترك ضرب کنیم داریم

$$6x+7 = A(x+2) + B = Ax + (2A+B).$$

با مساوی قرار دادن ضرایب جملات همانند نتیجه می گیریم: $A = 6$ و $B = -5$. بنابراین

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}. \quad (3)$$

مثال ۴ عامل درجه دوم در مخرج. کسر

$$\frac{-2x+2}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

را به صورت مجموع کسره های ساده بنویسید.

حل: چون مخرج يك عامل درجه دوم و يك عامل درجه اول مكرر دارد، چنین می نویسیم

$$\frac{-2x+2}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}. \quad (4)$$

توجه کنید که صورت کسری که مخرجش x^2+1 است يك عامل درجه اول است و نه ثابت. بنابراین

$$\begin{aligned} -2x+2 &= (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+1) \\ &\quad + D(x^2+1) \\ &= (A+C)x^2 + (-2A+B-C+D)x^2 \\ &\quad + (A-2B+C)x + (B-C+D). \end{aligned}$$

برای اینکه این رابطه اتحادی بر حسب x باشد، لازم و کافی است که ضرایب توانهای متساوی x در دو طرف با هم برابر باشند. اگر این ضرایب را مساوی قرار دهیم به معادلات زیر می رسیم

$$0 = A + C \quad \text{ضریب } x^3:$$

$$0 = -2A + B - C + D \quad \text{ضریب } x^2:$$

$$-2 = A - 2B + C \quad \text{ضریب } x^1:$$

$$2 = B - C + D \quad \text{ضریب } x^0:$$

به مجموع کسره‌های ساده بردوچیز متکی است:

۱. درجه $f(x)$ باید کمتر از درجه $g(x)$ باشد. (اگر چنین نباشد، صورت را برمخرج تقسیم می‌کنیم، آنگاه کار را با کسری که صورتش باقیمانده تقسیم و مخرجش $g(x)$ است دنبال می‌کنیم. همواره می‌توان باقیمانده را به شکل مطلوب درآورد.)

۲. عوامل اول $g(x)$ باید معلوم باشند. (از لحاظ نظری، هرچند جمله‌ای با ضرایب حقیقی را می‌توان به صورت حاصلضرب عوامل حقیقی درجه اول و درجه دوم بیان کرد. اما ممکن است چنین کاری در عمل دشوار باشد.) اگر این دو شرط برقرار باشند، می‌توان گامهای زیر را طی کرد.

گام ۱: فرض می‌کنیم $x-r$ يك عامل درجه اول $g(x)$ باشد و $(x-r)^n$ بالاترین توان $x-r$ باشد که $g(x)$ را عا د کند. در این صورت مجموع m کسر ساده زیر را به این عامل نسبت می‌دهیم

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-r)^n}$$

همین کار را در مورد همه عوامل درجه اول مجزای $g(x)$ انجام می‌دهیم.

گام ۲: فرض می‌کنیم x^2+px+q يك عامل درجه دوم غیر قابل تجزیه $g(x)$ باشد و

$$(x^2+px+q)^n$$

بالاترین توان این عامل باشد که $g(x)$ را عا د می‌کند. در این صورت به این عامل مجموع n کسر ساده زیر را نسبت می‌دهیم

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

همین کار را در مورد همه عوامل درجه دوم مجزای $g(x)$ انجام می‌دهیم.

گام ۳: کسر $f(x)/g(x)$ را با مجموع همه این کسره‌های ساده مساوی قرار می‌دهیم. طرفین رابطه حاصل را در مخرج مشترك ضرب، و نتیجه را بر حسب توانهای نزولی x مرتب می‌کنیم.

گام ۴: ضرایب توانهای نظیر x را برابر قرار می‌دهیم و معادلات حاصل را نسبت به ضرایب مجهول حل می‌کنیم.

اثبات این مطلب که $f(x)/g(x)$ را می‌توان به صورت

حل: با اینکه تجزیه انتگرالده به کسره‌های ساده زحمت زیادی دارد، اما مراحل کار نظیر موارد دیگر است. درجه صورت از درجه مخرج بزرگتر است، بنابراین نخست صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم و چنین به دست می‌آوریم

$$\frac{2x^5 - 15x^3 + 2x^2 + 9x + 8}{2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1} = x + 1 - \frac{8x^3 - 5x^2 - 6x - 7}{2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1} \quad (5)$$

حال مخرج کسر طرف راست را به حاصلضرب عوامل تجزیه می‌کنیم

$$2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = (x-1)^2(2x^2 + 2x + 2).$$

با انجام چند عمل دیگر چنین به دست می‌آوریم

$$\frac{8x^3 - 5x^2 - 6x - 7}{2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x^2 + 2x + 2} \quad (6)$$

سرانجام طرف راست رابطه (۶) را در رابطه (۵) قرار می‌دهیم، نتیجه را در dx ضرب می‌کنیم، و انتگرال می‌گیریم. نتیجه نهایی چنین است

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^5 - 15x^3 + 2x^2 + 9x + 8}{2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1} dx &= \int \left(x + 1 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2x^2 + 2x + 2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x - 2 \ln |x-1| - \frac{1}{x-1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x+1) + C. \end{aligned}$$

توصیف کلی روش
توفیق در تجزیه

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

(۹) و محاسبه باقیمانده به ازای $x = 2$ به دست می آید

$$B = \frac{(2)^2 + 1}{(2-1) \boxed{(x-2)} (2-3)} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5. \quad (11)$$

↑
می پوشانیم

سرانجام C را نیز می توان با پوشاندن $(x-3)$ در معادله (۹) و محاسبه باقیمانده به ازای $x = 3$ به دست آورد

$$C = \frac{(3)^2 + 1}{(3-1)(3-2) \boxed{(x-3)}} = \frac{10}{(2)(1)} = 5. \quad (12)$$

↑
می پوشانیم

گامهای روش پوشاندن از این قرارند:

گام ۱: مخارج را به حاصلضرب عوامل تجزیه می کنیم

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_n)}. \quad (13)$$

گام ۲: هر بار یکی از عوامل $(x-r_i)$ از $g(x)$ در معادله (۱۳) را می پوشانیم و به جای x های پوشیده نشده r_i را قرار می دهیم. به این ترتیب به ازای هر ریشه r_i ، یک مقدار A_i به دست می آید

$$A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)\dots(r_1-r_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\dots(r_2-r_n)} \quad (14)$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\dots(r_n-r_{n-1})}$$

گام ۳: حاصل تجزیه $f(x)/g(x)$ به کسرهای ساده را به صورت زیر می نویسیم

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \dots + \frac{A_n}{(x-r_n)}. \quad (15)$$

مثال ۸. مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{x+2}{x^3+3x^2-10x} dx.$$

مجموع کسرهای ساده ای نوشت (آن طور که در اینجا توصیف شد) در کتبهای پیشرفته جبر آمده است.

□ روش «پوشاندن» هویساید

اگر درجه چندجمله ای $f(x)$ از درجه چندجمله ای $g(x)$ کمتر باشد، و

$$g(x) = (x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_n)$$

حاصلضرب n عامل درجه اول مجزا و غیر مکرر باشد، راه سریعی برای تجزیه $f(x)/g(x)$ به کسرهای ساده وجود دارد.

مثال ۷. مطلوب است A, B, C در تجزیه به کسرهای ساده

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}. \quad (7)$$

حل: اگر طرفین رابطه (۷) را در $(x-1)$ ضرب کنیم چنین به دست می آید

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x-3}. \quad (8)$$

در این معادله x را برابر با ۱ قرار می دهیم و A را تعیین می کنیم

$$\frac{(1)^2+1}{(1-2)(1-3)} = A + 0 + 0$$

$$A = 1.$$

بنابراین، اگر در مخارج کسر اصلی

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \quad (9)$$

عامل $(x-1)$ را پوشانیم، مقدار آنچه باقی می ماند به ازای $x = 1$ برابر مقدار A است

$$A = \frac{(1)^2+1}{\boxed{(x-1)} (1-2)(1-3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1. \quad (10)$$

↑
می پوشانیم

مقدار B در معادله (۷) نیز با پوشاندن عامل $(x-2)$ در معادله

مثال ۹. مطلوب است A, B ، و C در معادله

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}.$$

حل: نخست طرفین را در مخرج مشترك ضرب می‌کنیم و چنین به دست می‌آوریم

$$x-1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C.$$

اگر $x = -1$ را در این رابطه قرار دهیم نتیجه می‌گیریم: $C = -2$. حال از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$1 = 2A(x+1) + B.$$

اگر $x = -1$ را در این رابطه قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم: $B = 1$. دوباره مشتق می‌گیریم و $0 = 2A$ را به دست می‌آوریم که از آن داریم $A = 0$ بنا بر این

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}.$$

در بسیاری از مسائل، با نسبت دادن مقادیر کوچکی نظیر 0 ، ± 1 ، ± 2 به x و به دست آوردن معادلاتی بر حسب A, B, C, D ، و غیره روش سریعی به دست می‌آید که می‌تواند جای روش هویساید را بگیرد.

مثال ۱۰. مطلوب است A, B ، و C در

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

حل: پس از ضرب طرفین کسر در مخرج مشترك چنین به دست می‌آوریم

$$x^2+1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

حال برای یافتن A, B ، و C مقدار x را به ترتیب برابر $1, 2$ ، و 3 قرار می‌دهیم

$$x=1: \quad (1)^2+1 = A(-1)(-2) + B(0) + C(0)$$

$$2 = 2A$$

$$A = 1$$

حل: درجه $f(x) = x+2$ از درجه

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$$

کمتر است. بنا بر این $g(x)$ را تجزیه می‌کنیم

$$\frac{x+2}{x^3+3x^2-10x} = \frac{x+2}{x(x-2)(x+5)}.$$

ریشه‌های $g(x)$ عبارت اند از $r_1 = 0$ ، $r_2 = 2$ ، و $r_3 = -5$ بنا بر این

$$A_1 = \frac{0+2}{\boxed{x} (0-2)(0+5)} = \frac{2}{(-2)(5)} = -\frac{2}{5}$$

↑

می‌پوشانیم

$$A_2 = \frac{2+2}{2 \boxed{(x-2)} (2+5)} = \frac{4}{(2)(7)} = \frac{2}{7}$$

↑

می‌پوشانیم

$$A_3 = \frac{-5+2}{(-5)(-5-2) \boxed{(x+5)}} = \frac{-3}{(-5)(-7)}$$

↑

می‌پوشانیم

$$= -\frac{1}{35}.$$

از این رو

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+5)} = -\frac{2}{5x} + \frac{2}{7(x-2)} - \frac{1}{35(x+5)}$$

و در نتیجه

$$\int \frac{x+2}{x(x-2)(x+5)} dx = -\frac{2}{5} \ln|x| + \frac{2}{7} \ln|x-2| - \frac{1}{35} \ln|x+5| + C.$$

■

روشهای دیگر تعیین ثابتها

چنانکه در مثال بعدی خواهیم دید، راه دیگری برای تعیین ثابتهای کسره‌های ساده، مشتقگیری است.

در مسائل ۱۱-۴۹، انتگرالها را محاسبه کنید.

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} \quad ۱۱$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x} \quad ۱۲$$

$$\int_0^{2\sqrt{e}} \frac{x^2}{x^2+1} dx \quad ۱۳$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x} \quad ۱۴$$

$$\int_{1/4}^{3/4} \frac{dx}{x-x^2} \quad ۱۵$$

$$\int_{-1}^0 \frac{x dx}{x^2-3x+2} \quad ۱۶$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+5x-6} dx \quad ۱۷$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12} dx \quad ۱۸$$

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{x^2+2x+1} dx \quad ۱۹$$

$$\int \frac{d\theta}{\theta^3+\theta^2-2\theta} \quad ۲۰$$

$$\int \frac{x dx}{x^2+4x-5} \quad ۲۱$$

$$\int_{-4}^8 \frac{x dx}{x^2-2x-3} \quad ۲۲$$

$$\int \frac{(x+1) dx}{x^2+4x-5} \quad ۲۳$$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2+2x+1} \quad ۲۴$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)^2} \quad ۲۵$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} \quad ۲۶$$

$$\int \frac{(x+2) dx}{2x^2-8x} \quad ۲۷$$

$$x=2: \quad (2)^2+1=A(0)+B(1)(-1)+C(0)$$

$$5=-B$$

$$B=-5$$

$$x=3: \quad (3)^2+1=A(0)+B(0)+C(2)(1)$$

$$10=2C$$

$$C=5.$$

در نتیجه

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}.$$

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۱۰، کسرها را به کسرهای ساده تجزیه کنید.

$$\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)} \quad ۱$$

$$\frac{5x-7}{x^2-3x+2} \quad ۲$$

$$\frac{x+2}{(x+1)^2} \quad ۳$$

$$\frac{2x+2}{x^2-2x+1} \quad ۴$$

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} \quad ۵$$

$$\frac{z}{z^3-z^2-6z} \quad ۶$$

$$(yadatan\ bashd\ ke\ ol\ taksim\ kunid.) \quad \frac{x^2+8}{x^2-5x+6} \quad ۷$$

$$\frac{4}{x^2+4x} \quad ۸$$

$$\frac{3}{x^2(x^2+9)} \quad ۹$$

$$\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} \quad ۱۰$$

۴۵. (دانهمایی: جانشانی $u = \sqrt{x}$ را به کار ببرید.) $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$

۴۶. (دانهمایی: جانشانی $u = \sqrt{x}$ را به کار ببرید.) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

۴۷. (دانهمایی: جانشانی $x = u^2$ را به کار ببرید.) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

۴۸. $\int x \ln(x+5) dx$

۴۹. $\int_0^1 \ln(x^2+1) dx$

۵۰. برای محاسبه $\int x^2 dx / (x^2 - 1)$ از راه کسرها ساده، نخست x^2 را بر $x^2 - 1$ تقسیم می‌کنیم

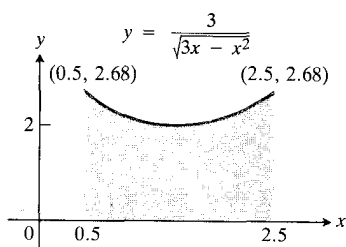
$$\frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$$

اگر متوجه هم‌درجه بودن x^2 و $x^2 - 1$ نشویم و چنین بنویسیم

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

چه اشتباهی پیش می‌آید؟ بکوشید A و B را به دست آورید.

۵۱. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به محور x ، خم $y = 3/\sqrt{3x - x^2}$ ، و خطوط $x = 1/2$ و $x = 5/2$ حول محور x . شکل ۲۳.۷ را ببینید.



۲۳.۷ ناحیه مذکور درمسأله ۵۱.

۵۲. مطلوب است مختص x مرکز جرم يك ورقه همگن نازك كه در ربع اول واقع و به محور x ، خم $y = \tan^{-1} x$ ، و خط $x = \sqrt{3}$ محدود است.

۲۸. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + \sin x - 6}$

۲۹. $\int_0^{\sqrt{e}} \frac{5x^2 dx}{x^2 + 1}$

۳۰. $\int_2^6 \frac{x^2 dx}{x^2 - 2x + 1}$

۳۱. $\int_{-1}^1 \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} dx$

۳۲. $\int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos^2 \theta + \cos \theta - 2}$

۳۳. $\int \frac{2x^2 + x + 2}{x^2 + x} dx$

۳۴. $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$

۳۵. $\int \frac{x^2 + 2x^2}{x^2 + 2x + 3} dx$

۳۶. $\int \frac{2x + 2}{x^2(x^2 + 2)} dx$

۳۷. $\int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx$

۳۸. $\int_{-1}^0 \frac{x^2 - x}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} dx$

۳۹. $\int_{-1}^0 \frac{2x}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} dx$

۴۰. $\int \frac{x^2}{(x - 1)(x^2 + 2x + 1)} dx$

۴۱. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^t dt}{e^{2t} + 3e^t + 2}$

۴۲. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

۴۳. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2}$

۴۴. $\int \frac{(2x^2 - 20x) dx}{x^4 - 10x^2 + 9}$

یا

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} \frac{dx}{dt} = k$$

(k ثابت واکنش است). در دو حالت (الف) $a=b$ و (ب) $a \neq b$ از طرفین این معادله نسبت به t انتگرال بگیرید و رابطه میان x و t را بیابید. در هر دو حالت فرض کنید به ازای $t=0$ داریم $x=0$.

۵۷. واکنشهای خودکاتالیزوری. معادله‌ای را که واکنش خودکاتالیزوری مسئله ۵۵ بخش ۵.۳ را توصیف می‌کند می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dx}{dt} = kx(a-x).$$

برای به دست آوردن اطلاعاتی در این باره، مسئله ۵۵ را مطالعه کنید (ضرورتی ندارد آن را حل کنید) و سپس از معادله بالا x را بر حسب t به دست آورید. فرض کنید به ازای $t=0$ داریم $x=x_0$.



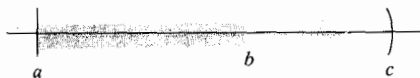
TOOLKIT PROGRAMS

Partial Fractions

۸.۷ انتگرالهای غیرعادی

در بسیاری از کاربردها لازم است که از یک تابع روی یک بازه غیر بسته انتگرال بگیریم. بدین منظور نخست از تابع روی یک بازه بسته که درون بازه غیر بسته قرار دارد انتگرال می‌گیریم، سپس حد این انتگرال را وقتی که بازه بسته گسترش می‌یابد تا بازه غیر بسته را پوشانند محاسبه می‌کنیم. شکل ۲۵.۷ چگونگی این کار را برای یک بازه نیمباز چون $[a, c)$ نشان می‌دهد. معمولاً حد حاصل را، خواه وجود داشته باشد خواه وجود نداشته باشد، انتگرال غیرعادی تابع روی بازه غیر بسته می‌نامند.

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow c^-} \int_a^b f(x) dx$$

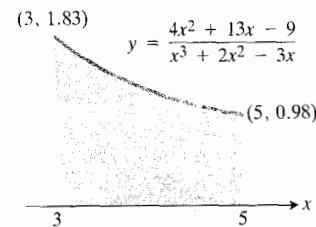


۲۵.۷ برای انتگرال گرفتن از تابع f روی بازه نیمباز $[a, c)$ ، نخست از روی یک بازه بسته چون $[a, b]$ واقع در درون $[a, c)$ انتگرال می‌گیریم، سپس حد آن را وقتی $[a, b]$ گسترش می‌یابد تا $[a, c)$ را پوشانند محاسبه می‌کنیم.

۵۳. مطلوب است مختص x مرکز جرم یک ورقه همگن نازک محدود به محور x ، خطوط $x=3$ و $x=5$ ، و خم

$$y = \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

(شکل ۲۴.۷).



۲۴.۷ ورقه مورد بحث در مسئله ۵۳.

۵۴. مطلوب است طول قوس

$$y = \ln(1-x^2), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

۵۵. بخش خبر در جامعه. در اینجا منظور از خبر هر نوع اطلاعی از قبیل یک شایعه، خبر یک موضوع جالب فرهنگی، یا خبر مربوط به یک اختراع فنی است. در یک جامعه نسبتاً بزرگ، تعداد کسانی که از خبر آگاه‌اند، x ، تابعی مشتق‌پذیر از زمان، t ، در نظر گرفته می‌شود. همچنین فرض می‌شود آهنگ بخش خبر، dx/dt ، با حاصلضرب تعداد کسانی که خبر را شنیده‌اند و تعداد آنان که نشنیده‌اند متناسب است. یعنی داریم

$$\frac{dx}{dt} = kx(N-x)$$

که در آن N تعداد کل افراد آن جامعه است.

فرض می‌کنیم t بر حسب روز باشد، $k=1/250$ ، و در جامعه‌ای با جمعیت $N=1000$ و دو نفر از لحظه $t=0$ شروع به بخش شایعه کنند.

(الف) x را به صورت تابعی از t بیابید.

(ب) پس از چه مدتی نیمی از افراد جامعه شایعه را می‌شنوند؟ (در چنین زمانی شایعه با بیشترین سرعت بخش می‌شود.)

۵۶. واکنشهای شیمیایی مرتبه دوم. بسیاری از واکنشهای شیمیایی نتیجه برهمکنش دو ملکول است که در اثر آن ملکول جدیدی به وجود می‌آید. معمولاً آهنگ واکنش به غلظت دونوع ملکول بستگی دارد. اگر مقدار ماده A و B را در لحظه $t=0$ به ترتیب با a و b و مقدار ملکول جدید را در لحظه t با x نشان دهیم، آهنگ تشکیل x را می‌توان به صورت معادله دیفرانسیل زیر بیان کرد

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

درچه صورت انتگرال غیرعادی وجود دارد؟ در این بخش به این پرسش پاسخ می‌گوییم. وقتی که دانستیم انتگرال وجود دارد، مقدار آن اگر فوراً مشخص نشود، با روشهای عددی قابل تعیین است.

همگرایی و واگرایی

در نظریه خط بالا برنده در آثرو دینامیک لازم می‌شود که از

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (1)$$

روی بازه از $x=0$ تا $x=1$ انتگرال بگیریم. این تابع در $x=1$ تعریف نمی‌شود، اما در هر جای دیگری از بازه $[0, 1]$ تعریف می‌شود و پیوسته است. برای انتگرال گرفتن از f از صفر تا ۱، نخست از این تابع از صفر تا عدد مثبتی چون b که کوچکتر از ۱ است انتگرال می‌گیریم، سپس حد انتگرال معین حاصل را وقتی b به ۱ میل می‌کند محاسبه می‌کنیم. اگر این حد وجود داشت، انتگرال f از صفر تا ۱ را برابر مقدار این حد تعریف می‌کنیم و چنین می‌نویسیم

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx. \quad (2)$$

در این مورد، این طور نیز می‌توان گفت که انتگرال

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

همگراست و مساحت زیر خم $y = \sqrt{(1+x)/(1-x)}$ از ۰ تا ۱ برابر مقدار این انتگرال است. اگر حد مذکور در رابطه (۲) وجود نداشت، می‌گوییم انتگرال واگراست.

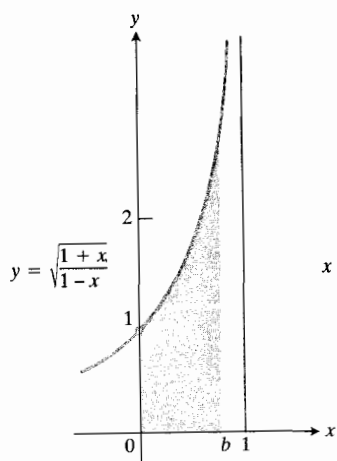
مثال ۱ انتگرال

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

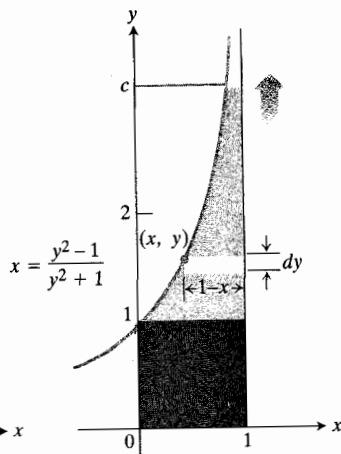
همگراست یا واگرا؟

حل: شکل ۲۶.۷ (الف) را ببینید. صورت و مخرج را در $\sqrt{1+x}$ ضرب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$



(الف)



(ب)

۲۶.۷ (الف) برای محاسبه

$$\int_0^b \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

مقدار

$$\int_0^b \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

را محاسبه می‌کنیم و b را از چپ به ۱ میل می‌دهیم. (ب) اگر خم را نمودار تابع $x = (y^2-1)/(y^2+1)$ در نظر بگیریم می‌توانیم محاسبه‌ای معادل با محاسبه قبلی انجام دهیم به این ترتیب که از این تابع از ۱ تا c نسبت به y انتگرال می‌گیریم و c را به بینهایت میل می‌دهیم. سپس ۱ را که مساحت مربع مشخص شده در شکل است به نتیجه حاصل می‌افزاییم.

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= \lim_{b \rightarrow 1^-} [\sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2}]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} [\sin^{-1} b - \sqrt{1-b^2} + 1] \\ &= \sin^{-1} 1 - 0 + 1 = \frac{\pi}{2} + 1. \end{aligned}$$

پس انتگرال همگراست و مقدارش $1 + (\pi/2)$ است. در محاسبات بالا از نوارهای قائم نسبت به x انتگرال می‌گیریم. اگر از نوارهای افقی نسبت به y انتگرال بگیریم باز هم

تابع

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

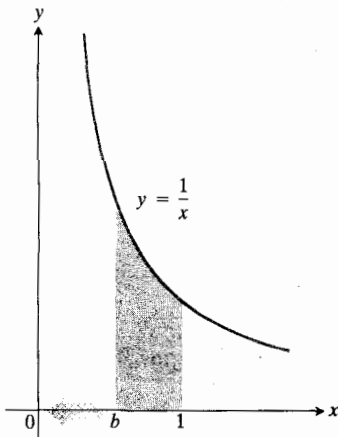
در $x=0$ بینهایت می شود. نقطه $x=0$ را جدا می کنیم و انتگرالگیری را از یک عدد مثبت کوچکتر از ۱ مانند b آغاز می کنیم. (شکل ۲۷.۷ را ببینید). یعنی محاسبه زیر را انجام می دهیم

$$\int_b^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_b^1 = \ln 1 - \ln b = \ln \frac{1}{b}$$

و مقدار نتیجه را وقتی که b از راست به صفر میل می کند به دست می آوریم. چون

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{b} \right) = +\infty$$

می گوییم این انتگرال از $x=0$ تا $x=1$ دایرگراست.



$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 \frac{dx}{x} \quad 27.7$$

اگر تابع f در نقطه ای واقع در درون بازه انتگرالگیری بینهایت شود از روشی که در مثال زیر به کار رفته است استفاده می کنیم.

مثال ۳ در انتگرال

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

تابع

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^{2/3}}$$

همین نتیجه به دست می آید (شکل ۲۶.۷ ب). در این مورد،

$$dA = (1-x) dy = \frac{y^2}{y^2+1} dy$$

و بخشی از مساحت که بالای مربع سایه دار است برابر است با

$$\int_1^\infty \frac{y^2}{y^2+1} dy = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{y^2}{y^2+1} dy$$

$$= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[y \tan^{-1} y \right]_1^c$$

$$= \lim_{c \rightarrow \infty} y \tan^{-1} c - y \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= y \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

اگر مربع سایه دار را منظور کنیم، مساحت برابر $1 + (\pi/2)$ می شود که با محاسبه نخست تطابق دارد.

نماد

$$\int_a^b f(x) dx$$

که برای انتگرالهای غیرعادی به کار می رود همان نماد انتگرالهای معین است. در هر مورد مفروض، معمولاً به سادگی می توان گفت که یک انتگرال خاص باید به صورت یک انتگرال معین عادی محاسبه شود یا به صورت یک حد. اگر a و b متناهی و f در هر نقطه ای از $[a, b]$ پیوسته باشد، انتگرال یک انتگرال معین عادی است. اگر f در یک یا چند نقطه از بازه انتگرالگیری بینهایت باشد، یا یک یا هر دو حد انتگرالگیری بینهایت باشند، انتگرال یک انتگرال غیرعادی است و باید به صورت یک حد محاسبه شود.

تعریف

انتگرالهای غیرعادی

انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ یک انتگرال غیرعادی است اگر

۱. f در یک یا چند نقطه از بازه انتگرالگیری بینهایت شود، یا
۲. یک یا هر دو حد انتگرالگیری بینهایت باشند، یا
۳. هم (۱) و هم (۲) برقرار باشد.

مثال ۲ در انتگرال

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

مقدارش برابر $3 + \sqrt[3]{2}$ است.

انتگرال $\int_1^{\infty} dx/x^p$
همگرایی انتگرال

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

به مقدار نمای p بستگی دارد. در مثال بعدی این مطلب به ازای $p=1$ و $p=2$ تشریح می شود.

مثال ۴ آیا انتگرالهای

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^1} \quad \text{و} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

همگرایی یا واگرایی؟

حل: هردو خم

$$y = \frac{1}{x^2} \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{x}$$

وقتی $x \rightarrow \infty$ به محور x میل می کنند (شکل ۲۹.۷). برای تابع $y = 1/x$ داریم

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^b = \ln b$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$

بنابراین

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty.$$

پس این انتگرال واگراست.
درمورد تابع $y = 1/x^2$ داریم

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

این انتگرال همگرا و مقدارش برابر ۱ است.

در $x=1$ که بین حدود انتگرالگیری ۰ و ۳ قرار دارد بینهایت می شود. در این موارد نیز نقطه‌ای را که $f(x)$ بینهایت می شود جدا می کنیم. در اینجا از ۰ تا b ، که b اندکی کوچکتر از ۱ است، انتگرال می گیریم، و دوباره از c در آن طرف ۱ شروع می کنیم و از c تا ۳ انتگرال می گیریم (شکل ۲۸.۷). به این ترتیب دو انتگرال زیر به دست می آید

$$\int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \quad \text{و} \quad \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

اگر انتگرال اول وقتی که $b \rightarrow 1^-$ حد معینی داشته باشد و انتگرال دوم نیز وقتی که $c \rightarrow 1^+$ دارای حد معینی باشد، گوئیم انتگرال f از ۰ تا ۳ همگراست و مقدار آن برابر است با

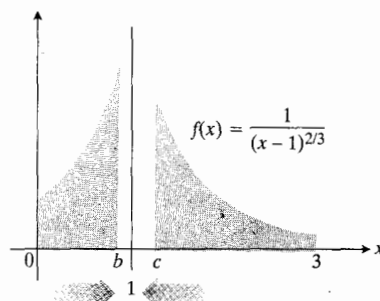
$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

اگر یکی از حدود یا هردوی آنها وجود نداشته باشد می گوئیم انتگرال f از ۰ تا ۳ واگراست. در این مثال

$$\lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b (x-1)^{-2/3} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} [3(b-1)^{1/3} - 3(0-1)^{1/3}] = +3$$

$$\lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^3 (x-1)^{-2/3} dx = \lim_{c \rightarrow 1^+} [3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}] = 3\sqrt[3]{2}.$$

چون هردو حد وجود دارند و متناهی اند، انتگرال f همگرا و



$$\int_0^3 f(x) dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b f(x) dx + \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^3 f(x) dx \quad 28.7$$

حل: حتی اگر نتوان

$$I(b) = \int_1^b e^{-x^2} dx$$

را به صورت ساده تری بیان کرد، می توان نشان داد که $I(b)$ وقتی که $b \rightarrow \infty$ به يك حد متناهی دارد.

تتابع $I(b)$ مساحت ناحیه بین محور x و خم $y = e^{-x^2}$ از $x = 1$ تا $x = b$ را نشان می دهد. این تابع، تابعی صعودی از b است. بنابراین وقتی $b \rightarrow \infty$ ، این تابع یا به بینهایت یا به يك حد متناهی میل می کند.

حال نشان می دهیم که وقتی $b \rightarrow \infty$ ، تابع به بینهایت میل نمی کند. برای این منظور مساحت زیر خم مفروض $y = e^{-x^2}$ را با مساحت زیر خم $y = e^{-x}$ مقایسه می کنیم (شکل ۳۰۷). مساحت زیر خم $y = -e^{-x}$ از $x = 1$ تا $x = b$ چنین به دست می آید

$$\int_1^b e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^b = e^{-1} - e^{-b}$$

که وقتی $b \rightarrow \infty$ به حد متناهی e^{-1} میل می کند. چون به ازای همه مقادیر x بزرگتر از ۱، مقدار e^{-x^2} از e^{-x} کمتر است، مساحت زیر خم مفروض، هر قدر هم که b بزرگ باشد، قطعاً از e^{-1} بزرگتر نیست.

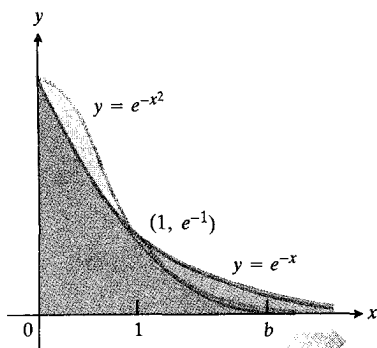
بحث فوق درنا برابریهای زیر خلاصه می شود

$$I(b) = \int_1^b e^{-x^2} dx \leq \int_1^b e^{-x} dx = e^{-1} - e^{-b} \leq e^{-1}.$$

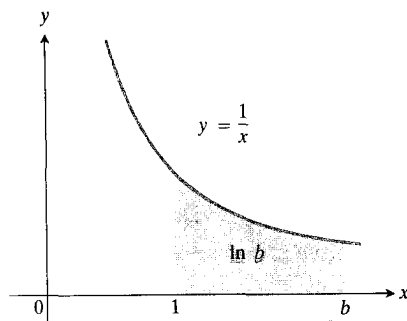
یعنی، $0 < I(b) \leq e^{-1}$. بنابراین وقتی $b \rightarrow \infty$ ، $I(b)$ به بینهایت نمی شود. از این رو باید شق دیگر برقرار باشد؛ یعنی

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x^2} dx$$

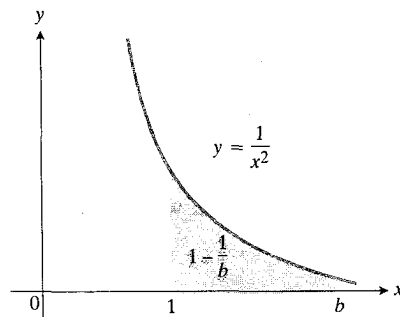
همگراست و مقدار آن متناهی و معین است. گسره این حد را محاسبه نکرده ایم، اما می دانیم که وجود دارد و کمتر از ۰.۳۷ است.



۳۰۷ نمودارهای $y = e^{-x}$ و $y = e^{-x^2}$.



(الف)



(ب)

۲۹۰۷ (الف) مساحت قسمت سایه دار یعنی $\ln b$ وقتی $b \rightarrow \infty$ به يك حد متناهی میل نمی کند. (ب) مساحت قسمت سایه دار یعنی $1 - (1/b)$ وقتی $b \rightarrow \infty$ به ۱ میل می کند.

به طور کلی، انتگرال

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$$

وقتی که $p > 1$ همگرا و وقتی $p \leq 1$ واگراست (مسئله ۴۳).

آزمون تسلط برای همگرایی و واگرایی

گاه می توان همگرایی یا واگرایی يك انتگرال غیرعادی را بدون محاسبه آن تعیین کرد. برای این منظور، انتگرال غیرعادی را با انتگرالی که از همگرایی یا واگرایی آن مطلعیم مقایسه می کنیم. این مطلب را در مثال زیر در مورد انتگرال مهمی از نظریه احتمال تشریح می کنیم.

مثال ۵ آیا انتگرال

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

همگراست یا واگرا؟

گوییم تابع مثبتی چون f وقتی $x \rightarrow \infty$ بر تابع مثبتی چون g مسلط است هرگاه نابرابری

$$g(x) \leq f(x)$$

به ازای همه مقادیر x فراتر از نقطه‌ای چون a برقرار باشد. مثلاً $f(x) = e^{-x}$ وقتی $x \rightarrow \infty$ بر $g(x) = e^{-x^2}$ مسلط است زیرا به ازای همه x های بزرگتر از $a = 1$ داریم $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. اگر وقتی $x \rightarrow \infty$ ، f بر g مسلط باشد، آنگاه

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx, \quad b > a.$$

به کمک این رابطه مانند مثال ۵ می‌توان ثابت کرد که

$$\text{اگر } \int_a^\infty f(x) dx \text{ همگرا باشد } \int_a^\infty g(x) dx \text{ همگراست.}$$

یا

$$\text{اگر } \int_a^\infty g(x) dx \text{ واگرا باشد } \int_a^\infty f(x) dx \text{ نیز واگراست.}$$

ایسنتایج را به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم و سپس مثالی می‌آوریم.

قضیه ۱

آزمون تسلط برای مشخص کردن همگرایی یا واگرایی انتگرالهای غیرعادی

اگر به ازای همه x های بزرگتر از a ، $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ، آنگاه

$$1. \text{ اگر } \int_a^\infty f(x) dx \text{ همگرا باشد } \int_a^\infty g(x) dx \text{ نیز همگراست،}$$

$$2. \text{ اگر } \int_a^\infty g(x) dx \text{ واگرا باشد } \int_a^\infty f(x) dx \text{ نیز واگراست.}$$

در قضیه ۱ فرض بر این است که f و g روی هر بازه متناهی چون $[a, b]$ انتگرال پذیرند، که این فرض مثلاً اگر این توابع پیوسته باشند برقرار است.

مثال ۶

الف) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1} dx$ همگراست چون $\frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{x^2}$ و $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ همگراست.

ب) $\int_1^\infty \frac{1}{e^{2x}} dx$ همگراست چون $\frac{1}{e^{2x}} < \frac{1}{e^x}$ ، و $\int_1^\infty \frac{1}{e^x} dx$ همگراست.

پ) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ واگراست چون به ازای $x > 1$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x}$ ، و $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ واگراست.

ت) $\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ واگراست چون $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x}$ و $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ واگراست.

آزمون مقایسه حدی

نتیجه سودمند دیگری که آن را اثبات نخواهیم کرد، آزمون مقایسه حدی برای تعیین همگرایی یا واگرایی انتگرالهای غیرعادی است. (نتیجه مشابهی را در مورد سریهای نامتناهی در فصل ۱۱ خواهید دید.) این آزمون چنین است:

قضیه ۲

آزمون مقایسه حدی برای مشخص کردن همگرایی یا واگرایی انتگرالهای غیرعادی
اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی مثبت باشند و

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty$$

آنگاه، $\int_a^\infty f(x) dx$ و $\int_a^\infty g(x) dx$ یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا.

در قضیه ۲ نیز مانند قضیه ۱ فرض بر این است که f و g روی هر بازه متناهی چون $[a, b]$ انتگرال پذیرند.

قضیه ۲ به زبان بخش ۸.۶ حاکی است که اگر دو تابع مثبت وقتی که $x \rightarrow \infty$ با آهنگ برابر رشد کنند، انتگرالهایشان از a تا ∞ نظیر هم عمل می‌کنند؛ یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا. البته همان‌طور که در مثال بعد می‌بینیم این بدان معنی نیست که مقدار انتگرالهایشان یکی است.

مثال ۷ به کمک آزمون مقایسه حدی دو انتگرال زیر را با هم مقایسه کنید

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{و} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

و داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x}} \cdot \frac{e^{2x} - 10e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{10}{e^x}\right) = 1 + 0 = 1$$

که يك حد متناهی و مثبت است. بنابراین تا جایی که به همگرایی انتگرالهای غیرعادی مربوط می شود، رفتار $1/(e^{2x} - 10e^x)$ نظیر رفتار $1/e^{2x}$ است. ■

نکاتی دیگر
می دانیم که

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

همگراست، ولی انتگرالهای زیر چطور؟

$$\int_{100}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{و} \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

پاسخ این است که آنها نیز همگرايند. وجود حدهای

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{100}^b \frac{1}{x^2} dx \quad \text{و} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x^2} dx$$

به نقاط شروع $a=100$ و $a=2$ بستگی ندارد، بلکه تنها به مقادیر $1/x^2$ وقتی x به بینهایت میل می کند بستگی دارد. به ازای هر مقدار مثبت a داریم

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}.$$

مقدار این حد به مقدار a بستگی دارد، اما وجود آن به a بستگی ندارد. این حد به ازای هر مقدار مثبت a وجود دارد. همین طور، انتگرالهای

$$\int_{100}^{\infty} \frac{1}{x} dx \quad \text{و} \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

هر دو واگرايند. به ازای هر مقدار مثبت a داریم

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln a) = \infty.$$

همگرایی و واگرایی انتگرالهایی که غیرعادی بودن آنها تنها به علت بینهایت بودن حد بالایی آنهاست، هرگز به حد پایینی انتگرالگیری بستگی ندارد.

در آخرین مثال، نشان می دهیم که يك انتگرال غیرعادی ممکن است واگرا باشد بدون اینکه بینهایت شود.

حل: با فرض

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \frac{1+x^2}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$

که يك حد متناهی و مثبت است. بنابراین

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{همگراست چون} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \quad \text{همگراست.}$$

اما مقدار انتگرالها برابر نیستند. بنا به مثال ۲ داریم

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

و در مورد انتگرال دیگر داریم

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} \quad (\text{تعریف})$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

مثال ۸

$$\int_1^{\infty} \frac{3}{e^x + 5} dx \quad \text{همگراست زیرا} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{e^x} dx \quad \text{همگراست و}$$

داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} \cdot \frac{e^x + 5}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 5}{3e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3e^x}\right) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

که يك حد متناهی و مثبت است. بنابراین، تا جایی که به همگرایی انتگرالهای غیرعادی مربوط می شود، رفتار $3/(e^x + 5)$ نظیر رفتار $1/e^x$ است. ■

مثال ۹

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{e^{2x} - 10e^x} dx \quad \text{همگراست زیرا} \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{e^{2x}} dx \quad \text{همگراست}$$

مثال ۱۰ انتگرال

$$\int_a^b \cos x \, dx = \sin b$$

وقتی که b از $2n\pi - \pi/2$ تا $2n\pi + \pi/2$ تغییر می‌کند (n می‌تواند هر عدد صحیح باشد)، تمام مقادیر از -1 تا $+1$ را اختیار می‌کند. بنا براین

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x \, dx$$

وجود ندارد. می‌توان گفت این انتگرال «واگرای فوسانی» است.

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۱۰، انتگرالها را محاسبه کنید.

۱. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

۲. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

۳. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$

۴. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.001}}$

۵. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

۶. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۷. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.999}}$

۸. $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{2-x}$

۹. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-x} dx$

۱۰. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

در مسائل ۱۱-۴۰، تعیین کنید که آیا انتگرالها همگرايند يا واگرا. (در برخی از موارد، ضرورتی ندارد انتگرال را محاسبه کنید تا بتوانید به این پرسش پاسخ دهید. نام آزمونی را که به کار می‌بردید ذکر کنید.)

۱۱. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

۱۲. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

۱۳. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

۱۴. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

۱۵. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}+1}$

۱۶. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^x}$

۱۷. $\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx$

۱۸. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

۱۹. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{7/6}}$

۲۰. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

۲۱. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

۲۲. $\int_1^{\infty} \frac{5}{x} dx$

۲۳. $\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$

۲۴. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$

۲۵. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

نامتناهی است. نشان دهید که

$$\int_3^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{3} e^{-9} < 0.0000042$$

و در نتیجه $\int_3^{\infty} e^{-x^2} dx < 0.0000042$. بنابراین به جای

$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ می‌توان $\int_0^3 e^{-x^2} dx$ را گذاشت بدون اینکه خطا افزایش یابد. انتگرال دوم را به کمک قاعدهٔ سیمپسون با ضابطه $n=6$ محاسبه کنید. (این یک روش به دست آوردن مقدار تقریبی عددی برای انتگرالهای غیرعادی همگراست.)

۴۲. قوطی دنگ نامتناهی. چنانکه در مثال ۴ دیدیم، انتگرال

$$\int_1^{\infty} (dx/x)$$

واگراست. این بدان معنی است که انتگرال

$$\int_1^{\infty} 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

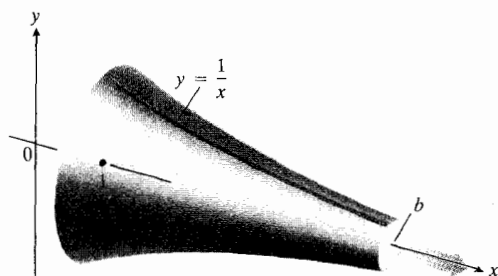
نیز که مقدار مساحت دویسهٔ جسم دوار حاصل از دوران خم $y=1/x$ حول محور x را به دست می‌دهد، واگراست. زیرا مقایسهٔ این دوانتگرال نشان می‌دهد که به ازای هر مقدار متناهی $b > 1$

$$\int_1^b 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx > \int_1^b \frac{dx}{x}.$$

اما، انتگرال

$$\int_1^{\infty} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

که حجم جسم دوار را به دست می‌دهد همگراست. مقدار آن را محاسبه کنید. گاه این جسم دوار را به صورت یک قوطی رنگ توصیف می‌کنند که رنگی که داخل آن جای می‌گیرد به آن اندازه نیست که بتوان با آن رویهٔ بیرونی‌اش را رنگ زد. (شکل ۳۱۰۷)



۳۱۰۷ اگر جسمی که در این شکل دیده می‌شود از طرف راست تا بینهایت امتداد یابد، جسمی «نامتناهی» ایجاد می‌شود که حجمش متناهی و مساحت رویه‌اش نامتناهی است. علت این امر را می‌توانید با مطالعهٔ مسئلهٔ ۴۲ دریا ببید.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

۲۶

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$$

۲۷

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} dx$$

۲۸

$$\int_{-\pi}^{\infty} \frac{2 + \cos x}{x} dx$$

۲۹

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

۳۰

$$\int_6^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+5}} dx$$

۳۱

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x+10}}$$

۳۲

$$\int_2^{\infty} \frac{2}{x^2-1} dx$$

۳۳

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^{\ln x}} dx$$

۳۴

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x} dx$$

۳۵

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-x}} dx$$

۳۶

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-2^x} dx$$

۳۷

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-5} dx$$

۳۸

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$$

۳۹

(داهنمایی: این انتگرال را به ازای x های نزدیک صفر با $\int dx/\sqrt{x}$ و به ازای x های بزرگ با $\int dx/x^2$ مقایسه کنید.)

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx$$

۴۰

۴۱ برآورد کردن مقدار یک انتگرال غیرعادی همگرا که دامنه‌اش

نمی کنند که مستلزم تقسیم عددی بر صفر یا ریشه زوج گرفتن از اعداد منفی باشد. مثلاً در فرمول ۸ باید $a \neq 0$ و در فرمول ۱۳ (الف) باید b منفی باشد.

مثالهای زیر نشان می دهند که از فرمولهای انتگرالها در انتهای کتاب معمولاً چگونه استفاده می شود.

مثال ۱ مطلوب است محاسبه

$$\int x(2x+5)^{-1} dx.$$

حل: فرمول ۸ (و نه فرمول ۷ که در آن باید $n \neq -1$)، یعنی

$$\int x(ax+b)^{-1} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax+b| + C$$

را به ازای $a=2$ و $b=5$ به کار می بریم

$$\int x(2x+5)^{-1} dx = \frac{x}{2} - \frac{5}{4} \ln |2x+5| + C.$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}}.$$

حل: فرمول ۱۳ (ب) یعنی

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} \right| + C, \quad b > 0$$

را به ازای $a=2$ و $b=4$ به کار می بریم

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{4}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{4}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{2x+4}+2} \right| + C.$$

در اینجا فرمول ۱۳ (الف) که در آن باید $b < 0$ ، مناسب نیست. اما استفاده از این فرمول در مثال بعدی مناسب است.

۴۳ نشان دهید که

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}, \quad p > 1$$

و نیز نشان دهید که همین انتگرال به ازای $p < 1$ نامتناهی است. در مثال ۴ مقدار انتگرال به ازای $p=1$ مشخص شده است.

۴۴ به ازای چه مقادیری از p انتگرالهای زیر همگرا آیند؟

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p} \quad (\text{الف})$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \quad (\text{ب})$$

ناحیه مورد نظر در هر یک از مسائل ۴۵-۴۸ در ربع اول واقع و به خم $y=e^{-x}$ و محور x محدود است.

۴۵ مطلوب است مساحت ناحیه.

۴۶ مطلوب است مرکز جرم ناحیه.

۴۷ مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه حول محور y .

۴۸ مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول محور x .

۴۹ مطلوب است مرکز جرم ناحیه محدود به خمهای $y = \pm(1-x^2)^{-1/2}$ و خطوط $x=0$ و $x=1$.

۵۰ مطلوب است مساحت ناحیه واقع در بین خمهای $y = \sec x$ و $y = \tan x$ به ازای $0 \leq x \leq \pi/2$.

۵۱ نشان دهید که مساحت ناحیه بین خم $y = 1/(1+x^2)$ و سراسر محور x برابر مساحت قرص واحد $x^2+y^2 \leq 1$ است.

۹.۷ استفاده از جدولهای انتگرالها

فرمولهای شماره دار انتگرالها در انتهای این کتاب بر حسب ثابتهای a, b, c, m, n ، و غیره بیان شده اند. ضرورتی ندارد که این ثابتها اعداد صحیح باشند و همواره می توان فرض کرد که آنها اعداد حقیقی اند. گاه این ثابتها محدودیتهایی دارند که این محدودیتهای همراه فرمولهای انتگرالها ذکر شده اند. مثلاً در فرمول ۵ باید $n \neq -1$ و در فرمول ۱۱ باید $n \neq -2$ باشد.

همچنین فرض بر این است که این ثابتها مقادیری اختیار

مثال ۳ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}}$$

حل: فرمول ۱۳ (الف) یعنی

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, \quad b < 0$$

را به ازای $a=2$ و $b=-4$ به کار می‌بریم

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{\sqrt{-(-4)}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2x-4}{-(-4)}} + C$$

$$= \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$$

مثال ۴ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$$

حل: نخست فرمول ۱۵ یعنی

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx}$$

$$- \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

را به ازای $a=2$ و $b=-4$ به کار می‌بریم

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = -\frac{\sqrt{2x-4}}{-4x}$$

$$+ \frac{2}{2 \times (-4)} \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} + C.$$

سپس برای محاسبه انتگرال طرف راست، فرمول ۱۳ (الف) را به کار می‌بریم (مثال ۳) و نتیجه زیر را به دست می‌آوریم

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4} \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$$

مثال ۵ مطلوب است محاسبه

$$\int x \sin^{-1} x \, dx.$$

حل: فرمول ۹۹ یعنی

$$\int x^n \sin^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} ax$$

$$- \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-a^2 x^2}}, \quad n \neq -1$$

را به ازای $n=1$ و $a=1$ به کار می‌بریم

$$\int x \sin^{-1} x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

انتگرال سمت راست را می‌توان به کمک فرمول ۳۳ یعنی

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + C$$

به ازای $a=1$ محاسبه کرد

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

نتیجه نهایی این است

$$\int x \sin^{-1} x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \right) + C$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \sin^{-1} x$$

$$+ \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

مثال ۶ ناحیه واقع در ربع اول و محدود به محور x ، خط $x=1$ ، و خم $y=\sin^{-1} x$ حول محور y دوران و جسمی را ایجاد می‌کند. حجم این جسم را بیابید.

حل: شکل ناحیه را رسم می‌کنیم (شکل ۳۲۰۷) و بر مبنای آن تصمیم می‌گیریم که از روش پوسته‌های استوانه‌ای بهره بگیریم.

$$\int_0^{1/2} x \tan^{-1} 2x \, dx \quad ۰۴$$

$$\int \frac{dx}{(9-x^2)^2} \quad ۰۵$$

$$\int_2^{10} \frac{\sqrt{4x+9}}{x^2} dx \quad ۰۶$$

$$\int_2^{11} \frac{dx}{x^2 \sqrt{7+x^2}} \quad ۰۷$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{7-x^2}} \quad ۰۸$$

$$\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x} dx \quad ۰۹$$

$$\int_{-\pi/12}^{\pi/4} \frac{dx}{5+4 \sin 2x} \quad ۰۱۰$$

$$\int \frac{dx}{4+5 \sin 2x} \quad ۰۱۱$$

$$\int_2^6 \frac{x}{\sqrt{x-2}} dx \quad ۰۱۲$$

(داهنمایی: در فرمول ۷ ضرورتی ندارد n عدد صحیح باشد.)

$$\int x \sqrt{2x-3} dx \quad ۰۱۳$$

$$\int \frac{\sqrt{3x-4}}{x} dx \quad ۰۱۴$$

$$\int_0^{\infty} x^{10} e^{-x} dx \quad ۰۱۵$$

$$\int_0^1 x^2 \tan^{-1} x \, dx \quad ۰۱۶$$

در مسائل ۱۷-۲۰، به کمک جانشانیهای داده شده، انتگرال را به انتگرالی تبدیل کنید که بتوان آن را در جدول موجود در انتهای این کتاب یافت. سپس انتگرال را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \sin^{-1} \sqrt{x} \, dx, \quad u = \sqrt{x} \quad ۰۱۷$$

$$\int_{2/4}^1 \frac{\cos^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad u = \sqrt{x} \quad ۰۱۸$$

$$V = \int_0^1 \pi (ارتفاع)(شعاع) \, dx$$

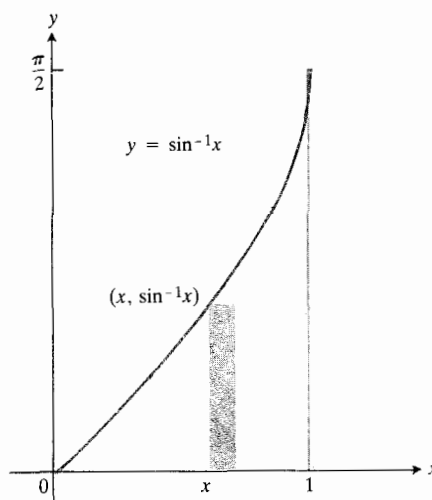
$$= \int_0^1 \pi x \sin^{-1} x \, dx$$

$$= \pi \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \sin^{-1} x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} \right]_0^1$$

(مثال ۵)

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) + 0 \right] - \pi [0 + 0]$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$



۳۲۰۷ ناحیه مورد بحث در مثال ۶.

مسئله‌ها

به کمک فرمولهای انتگرال موجود در انتهای این کتاب، انتگرالهای مسائل ۱-۱۶ را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad ۰۱$$

$$\int x \cos^{-1} x \, dx \quad ۰۲$$

$$\int_2^9 \frac{dx}{x \sqrt{x-3}} \quad ۰۳$$

نظیر این فرمولها در دسترس اند و باید در به کار بردن آنها مهارت پیدا کرد.

مثال ۱ انتگرال

$$\int \cos^n x dx$$

را بر حسب انتگرال توان کوچکتری از $\cos x$ بیان کنید.

حل: انتگرالگیری جزء به جزء را با

$$u = \cos^{n-1} x \quad dv = \cos x dx$$

$$du = (n-1) \cos^{n-2} x (-\sin x dx) \quad v = \sin x$$

$$= -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x dx$$

به کار می بریم. در این صورت فرمول

$$\int u dv = uv - \int v du$$

به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} \int \cos^n x dx &= \int \cos^{n-1} x \cos x dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x \\ &\quad + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x \\ &\quad + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx \\ &\quad - (n-1) \int \cos^n x dx. \end{aligned}$$

اگر

$$(n-1) \int \cos^n x dx$$

را بدو طرف این رابطه بیفزاییم، داریم

$$\begin{aligned} n \int \cos^n x dx &= \cos^{n-1} x \sin x \\ &\quad + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx. \end{aligned}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx, \quad u = \sqrt{x} \quad ۰.۱۹$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x \sqrt{1 - \sin^2 x} dx, \quad u = \sin x \quad ۰.۲۰$$

۰.۲۱ مرکزوار ناحیه‌ای از ربع اول را بیابید که به خم $y = 1/\sqrt{x+1}$ و خط $x = 3$ محدود است.

۰.۲۲ يك ورقه نازك با چگالی ثابت $\delta = 1$ ناحیه‌ای از ربع اول را که به خم $y = 36/(x+3)$ و خط $x = 3$ محدود است اشغال می کند. مطلوب است گشتاوری که این ورقه حول محور y ایجاد می کند.

فرمولهایی که در مسائل ۲۳-۲۶ به آنها اشاره شده است فرمولهای موجود در صفحات انتهای این کتاب اند.

۰.۲۳ فرمول ۵۵ را با مشتگیری از طرف راست ثابت کنید.

۰.۲۴ فرمول ۷۶ را با مشتگیری از طرف راست ثابت کنید.

۰.۲۵ فرمول ۹ را با انتگرالگیری از

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2} dx$$

و با جانشانی $u = ax+b$ ثابت کنید.

۰.۲۶ فرمول ۴۶ را با انتگرالگیری از

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}}$$

و با جانشانی $x = a \sec u$ ثابت کنید.

۱۰.۷ فرمولهای کاهش توان

فرمولی که انتگرال توانی از يك تابع را بر حسب انتگرال توان کوچکتری از آن تابع بیان کند فرمول کاهش توان نام دارد. گاه با استفاده مکرر از این فرمول می توان توان بزرگی از يك تابع را آن قدر کاهش داد که بتوان از تابع به دست آمده مستقیماً انتگرال گرفت. در این بخش، تعدادی از این فرمولهای کاهش توان را به دست می آوریم و چگونگی استفاده از آنها را شرح می دهیم. چنانکه خواهید دید برای این کار عمدتاً از انتگرالگیری جزء به جزء بهره می گیریم.

فرمولهای این بخش را لازم نیست حفظ کنید. در عمل هر گاه به این فرمولها نیاز داشتید می توانید به آنها مراجعه کنید. فرمولهای

مثال ۳ مطلوب است يك فرمول کاهش توان برای

$$\int \tan^n x dx, \quad n > 1.$$

حل: به جای استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء، $\sec^2 x - 1$ را جایگزین يك عامل $\tan^2 x$ می کنیم

$$\begin{aligned} \int \tan^n x dx &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx \\ &= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx. \end{aligned}$$

نتیجه نهایی چنین است

$$\blacksquare \int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx. \quad (۳)$$

فرمول کاهش توان برای کتانژانتها به ازای $n > 1$ چنین است

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx. \quad (۴)$$

مثال ۴ مطلوب است محاسبه

$$\int \cot^5 x dx.$$

حل: رابطه (۴) به ازای $n=5$ چنین است

$$\int \cot^5 x dx = -\frac{\cot^4 x}{4} - \int \cot^3 x dx.$$

برای محاسبه انتگرال باقیمانده با هم از رابطه (۴) اما به ازای $n=3$ استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} \int \cot^3 x dx &= -\frac{\cot^2 x}{2} - \int \cot x dx \\ &= -\frac{\cot^2 x}{2} - \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

حال طرفین را بر n تقسیم می کنیم و نتیجه نهایی زیر را به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \int \cos^n x dx &= \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} \\ &+ \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx. \end{aligned} \quad (۱)$$

با استفاده از این فرمول می توان از توان $\cos x$ به اندازه ۲ کاست که این امر بسیار مهم است. اگر n يك عدد صحیح مثبت باشد، از این فرمول می توان مکرراً استفاده کرد تا انتگرال باقیمانده به یکی از دو صورت زیر تبدیل شود

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

یا

$$\blacksquare \int \cos^0 x dx = \int dx = x + C.$$

فرمول مشابه در مورد سینوس (مسأله ۲۹) چنین است

$$\begin{aligned} \int \sin^n x dx &= -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} \\ &+ \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx. \end{aligned} \quad (۲)$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبه

$$\int \cos^4 x dx.$$

حل: رابطه (۱) به ازای $n=4$ به صورت

$$\int \cos^4 x dx = \frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4} \int \cos^2 x dx$$

و به ازای $n=2$ به صورت زیر درمی آید

$$\int \cos^2 x dx = \frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2} \int dx.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \frac{\cos^3 x \sin x}{4} \\ &+ \frac{3}{4} \left(\frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2} x \right) + C. \end{aligned}$$

فرمول مشابه درمورد کسکانت چنین است

$$\int \csc^n x dx = -\frac{\csc^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx \quad (6)$$

برای امتحان کردن فرمول (۵)، از آن برای محاسبه انتگرال $\sec^3 x$ که نتیجه آن را می‌دانیم (بخش ۳.۷، مثال ۳) استفاده می‌کنیم.

مثال ۶ مطلوب است محاسبه

$$\int \sec^3 x dx.$$

حل: از فرمول (۵) به‌ازای $n=3$ استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x dx &= \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2} \int \sec x dx \\ &= \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C. \end{aligned}$$

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۲۴، انتگرالها را به کمک فرمولهای کاهش توان این بخش محاسبه کنید.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x dx \quad ۱$$

$$\int \cos^4 x dx \quad ۲$$

$$\int \cos^2 x dx \quad ۳$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^3 x dx \quad ۴$$

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x dx \quad ۵$$

$$\int \sin^4 \left(\frac{x}{4} \right) dx \quad ۶$$

بنا بر این

$$\int \cot^5 x dx = -\frac{\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^2 x}{2} + \ln |\sin x| + C.$$

مثال ۵ مطلوب است يك فرمول کاهش توان برای

$$\int \sec^n x dx, \quad n > 1.$$

حل: يك عامل $\sec^2 x$ را جدا و آن را با dx همراهی کنیم و انتگرالگیری جزء به جزء را به کار می‌بریم. با جانشانیهای

$$\begin{aligned} u &= \sec^{n-2} x & dv &= \sec^2 x dx \\ du &= (n-2) \sec^{n-3} x d(\sec x) & v &= \tan x \\ &= (n-2) \sec^{n-2} x \tan x dx \end{aligned}$$

از فرمول

$$\int u dv = uv - \int v du$$

چنین به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \int \sec^n x dx &= \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x \\ &\quad - \int \tan x (n-2) \sec^{n-2} x \tan x dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x \\ &\quad - (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x \\ &\quad - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx \\ &\quad - (n-2) \int \sec^n x dx. \end{aligned}$$

با حل این معادله نسبت به $\int \sec^n x dx$ داریم

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx. \quad (5)$$

برای محاسبه انتگرالها در مسائل ۲۵-۲۸، از يك جانشانی مثلثاتی و يك فرمول کاهش توان استفاده کنید.

$$\int_0^1 (x^2+1)^{-3/2} dx \quad ۲۵$$

$$\int_0^1 (x^2+1)^{3/2} dx \quad ۲۶$$

$$\int_0^{3/5} \frac{dx}{(1-x^2)^3} \quad ۲۷$$

$$\int_1^2 \frac{(x^2-1)^{3/2}}{x} dx \quad ۲۸$$

فرمول ۲۹

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

را به این ترتیب ثابت کنید که از طرف راست آن مشتق بگیرید و نتایج را ترکیب کنید تا $\sin^n x$ به دست آید.

فرمول ۳۰

$$\int \csc^n x dx = -\frac{\csc^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx$$

را به این ترتیب ثابت کنید که از طرف راست آن مشتق بگیرید و نتایج را ترکیب کنید تا $\csc^n x$ به دست آید.

۳۱ الف) فرمول زیر را به دست آورید

$$\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx$$

ب) فرمول نظیر برای $x^n \sin ax$ چیست؟

۳۲ الف) فرمول زیر را به دست آورید

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx$$

ب) فرمول نظیر برای $x^n \cos ax$ چیست؟

۳۳ فرمول زیر را به دست آورید

$$\int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1}$$

$$- \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx \quad ۷$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin^5 2x dx \quad ۸$$

$$\int \tan^3 2x dx \quad ۹$$

$$\int_0^{\pi/2} \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx \quad ۱۰$$

$$\int \tan^5 x dx \quad ۱۱$$

$$\int \tan^5 2x dx \quad ۱۲$$

$$\int \cot^3 x dx \quad ۱۳$$

$$\int \cot^3 \left(\frac{x}{3} \right) dx \quad ۱۴$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cot^5 x dx \quad ۱۵$$

$$\int \cot^5 2x dx \quad ۱۶$$

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec^4 x dx \quad ۱۷$$

$$\int_0^{\pi/4} \sec^4 2x dx \quad ۱۸$$

$$\int \sec^5 x dx \quad ۱۹$$

$$\int \sec^5 \left(\frac{x}{2} \right) dx \quad ۲۰$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc^3 x dx \quad ۲۱$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \csc^3 \left(\frac{x}{2} \right) dx \quad ۲۲$$

$$\int \csc^5 x dx \quad ۲۳$$

$$\int \csc^5 2x dx \quad ۲۴$$

۰۴. دربارهٔ دو نوع انتگرال غیرعادی بحث کنید. همگرایی و واگرایی هر یک از این دو نوع را تعریف کنید. برای هر یک از این دو نوع نمونه‌هایی از انتگرالهای همگرا یا واگرا ذکر کنید. چه آزمون‌هایی در مورد همگرایی یا واگرایی انتگرالهای غیرعادی می‌توان انجام داد؟

۰۵. فرمول کاهش توان یعنی چه؟ چگونه فرمولهای کاهش توان را به کار می‌برند؟ این مطلب را با استفاده از فرمول

$$\int \tan^n ax = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax dx$$

برای محاسبه

$$\int_0^{\pi/2} \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx$$

توضیح دهید.

مسئله‌های گوناگون

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$۱. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}}$$

$$۲. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\sin^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$۳. \int \frac{\tan x dx}{\cos^2 x}$$

$$۴. \int \frac{y}{y^4+1} dy$$

$$۵. \int_0^1 e^{\ln \sqrt{x}} dx$$

$$۶. \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$۷. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$۸. \int_2^5 \frac{(3x-7) dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$۹. \int x^2 e^x dx$$

از این فرمول استفاده کنید و انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_1^2 x^2 (\ln x)^2 dx.$$

۰۳۴. فرمول زیر را به دست آورید

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx.$$

از این فرمول استفاده کنید و انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^1 x^2 e^x dx.$$

پرسشها و تمرینهای مروری

۰۱. روشهای کلی یافتن انتگرالهای نامعین کدام اند؟

۰۲. اگر انتگرالده شامل جملات زیر باشد از چه جانشانی (یا جانشانیهای) می‌توان استفاده کرد؟

$$\sqrt{x^2+9} \quad \text{الف)}$$

$$\sqrt{x^2-9} \quad \text{ب)}$$

$$\sqrt{9-x^2} \quad \text{پ)}$$

$$\sin^3 x \cos^2 x \quad \text{ت)}$$

$$\sin^2 x \cos^3 x \quad \text{ث)}$$

۰۳. اگر انتگرالده شامل جملات زیر باشد از چه روشی (یا روشهایی) می‌توان استفاده کرد؟

$$\sin^{-1} x \quad \text{الف)}$$

$$\ln x \quad \text{ب)}$$

$$\sqrt{1+2x-x^2} \quad \text{پ)}$$

$$x \sin x \quad \text{ت)}$$

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6} \quad \text{ث)}$$

$$\sin 5x \cos 3x \quad \text{ج)}$$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad \text{ج)}$$

$$x\sqrt{2x+3} \quad \text{ح)}$$

$$\int \frac{e^{1/x} dx}{\sqrt{1+e^x}} \quad \cdot 27$$

$$\int_0^1 \ln \sqrt{1+x^2} dx \quad \cdot 28$$

$$\int_{\Delta/4}^{\Delta/2} \frac{dx}{(x^2-1)^{3/4}} \quad \cdot 29$$

$$\int_0^{2/5} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \cdot 30$$

$$\int \frac{dx}{x(2+\ln x)} \quad \cdot 31$$

$$\int \frac{\cos 2x-1}{\cos 2x+1} dx \quad \cdot 32$$

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x+1}} \quad \cdot 33$$

$$\int \frac{2 \sin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x} \sec \sqrt{x}} \quad \cdot 34$$

$$\int_0^2 (16+x^2)^{-3/2} dx \quad \cdot 35$$

$$\int_0^{(e-1)^2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \quad \cdot 36$$

$$\int \sin \sqrt{x+1} dx \quad \cdot 37$$

$$\int \cos \sqrt{1-x} dx \quad \cdot 38$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{2-x^2} \quad \cdot 39$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \quad \cdot 40$$

$$\int \frac{dy}{y(2y^2+1)^2} \quad \cdot 41$$

$$\int \frac{x dx}{1+\sqrt{x}} \quad \cdot 42$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} \quad \cdot 43$$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx \quad \cdot 10$$

$$\int \frac{e^t dt}{1+e^{2t}} \quad \cdot 11$$

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \quad \cdot 12$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} \quad \cdot 13$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \quad \cdot 14$$

$$\int t^{2/3} (t^{5/3}+1)^{2/3} dt \quad \cdot 15$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cot x dx}{\ln(e \sin x)} \quad \cdot 16$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}} \quad \cdot 17$$

$$\int \frac{\sin x e^{\sec x}}{\cos^2 x} dx \quad \cdot 18$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x} \quad \cdot 19$$

$$\int_{1/2}^{(1+\sqrt{2})/2} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \quad \cdot 20$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x} \quad \cdot 21$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2t}{1+\sin 2t} dt \quad \cdot 22$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x \cos x} \quad \cdot 23$$

$$\int \sqrt{1+\sin x} dx \quad \cdot 24$$

$$\int_{-\pi/2}^0 \sqrt{1-\sin x} dx \quad \cdot 25$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^2}} \quad \cdot 26$$

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^7} \quad .61$$

$$\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+2x-3)^{5/2}} \quad .62$$

$$\int \frac{dy}{(2y+1)\sqrt{y^2+y}} \quad .63$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} \quad .64$$

$$\int (1-x^2)^{7/4} dx \quad .65$$

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx \quad .66$$

$$\int x \tan^5 x dx \quad .67$$

$$\int x \cos^5 x dx \quad .68$$

$$\int_0^\pi x^5 \sin x dx \quad .69$$

$$\int x \sin^5 x dx \quad .70$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^6+4t^3+3} \quad .71$$

$$\int \frac{du}{e^{4u}+4e^{2u}+3} \quad .72$$

$$\int_0^5 x \ln \sqrt{x+2} dx \quad .73$$

$$\int (x+1)^5 e^x dx \quad .74$$

$$\int \sec^{-1} x dx \quad .75$$

$$\int \frac{\lambda dx}{x^6+2x^3} \quad .76$$

$$\int \frac{x dx}{x^6-16} \quad .77$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\cos x}} \quad .78$$

$$\int \ln \sqrt{x-1} dx \quad .44$$

$$\int \frac{dx}{e^x-1} \quad .45$$

$$\int \frac{(x+1) dx}{x^2(x-1)} \quad .46$$

$$\int \frac{x dx}{x^2+4x+3} \quad .47$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{15 du}{(e^u-e^{-u})^2} \quad .48$$

$$\int \frac{2 dx}{x^2+2x} \quad .49$$

$$\int \frac{dx}{5x^2+8x+5} \quad .50$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1} dx}{x} \quad .51$$

$$\int e^x \cos 2x dx \quad .52$$

$$\int \frac{dx}{x(3\sqrt{x+1})} \quad .53$$

$$\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})} \quad .54$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cot \theta d\theta}{1+\sin^2 \theta} \quad .55$$

$$\frac{z^5 dz}{\sqrt{1+z^2}} \quad .56$$

$$\int \frac{e^{4t} dt}{(1+e^{2t})^{5/2}} \quad .57$$

$$\int \frac{dx}{x^{1/5}\sqrt{1+x^{2/5}}} \quad .58$$

$$\int \frac{(x^2+x^3) dx}{x^2+x-2} \quad .59$$

$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2-x} dx \quad .60$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\sqrt{1-x}} \quad .96$$

$$\int_0^{\pi} x \sqrt{2x+1} dx \quad .97$$

$$\int \ln(x + \sqrt{x^2-1}) dx \quad .98$$

$$\int \ln(x - \sqrt{x^2-1}) dx \quad .99$$

$$\int_0^{\ln \sqrt{e}} e^{-x} \tan^{-1}(e^x) dx \quad .100$$

$$\int \ln(x + \sqrt{x}) dx \quad .101$$

$$\int \tan^{-1} \sqrt{x} dx \quad .102$$

$$\int_1^{\sqrt{e}} \ln(x^2+x) dx \quad .103$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos \sqrt{x} dx \quad .104$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin \sqrt{x} dx \quad .105$$

$$\int_0^{\sqrt{e}} \tan^{-1} \sqrt{x+1} dx \quad .106$$

$$\int \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x dx \quad .107$$

$$\int_0^{\pi} x \sin^2(2x) dx \quad .108$$

$$\int \frac{\tan x dx}{\tan x + \sec x} \quad .109$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{e^{2t}+1}} \quad .110$$

$$\int \frac{dx}{(\cos^2 x + 2 \sin x - 5) \cos x} \quad .111$$

$$a, b, c \neq 0, \int \frac{dt}{a + be^{ct}} \quad .112$$

$$\int \sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos \alpha - \cos x}} dx \quad .113$$

$$0 < \alpha < x < \pi \text{ (ثابت است } \alpha)$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - \sin x} \quad .99$$

$$\int_0^{\ln 2} \frac{du}{(e^u + e^{-u})^2} \quad .100$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x+x}} \quad .101$$

$$\int \frac{\sec^2 t dt}{\sec^2 t - 3 \tan t + 1} \quad .102$$

$$\int \frac{dt}{\sec^2 t + \tan^2 t} \quad .103$$

$$\int_0^{\tan^{-1} \sqrt{e}} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} \quad .104$$

$$\int e^{e^t} \cos(e^t) dt \quad .105$$

$$\int_0^1 \ln \sqrt{x^2+1} dx \quad .106$$

$$\int x \ln(x^2+x) dx \quad .107$$

$$\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx \quad .108$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 - \cos^2 x}} \quad .109$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{2 - \sec^2 x}} \quad .110$$

$$\int x^2 \sin(1-x) dx \quad .111$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(2+\tan^{-1} x)} \quad .112$$

$$\int \frac{dx}{\cot^2 x} \quad .113$$

$$\int_0^{1/\sqrt{e}} x \ln \sqrt[3]{3x+1} dx \quad .114$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} \quad .115$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 0^2} + \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} \right) \quad ۱۲۹$$

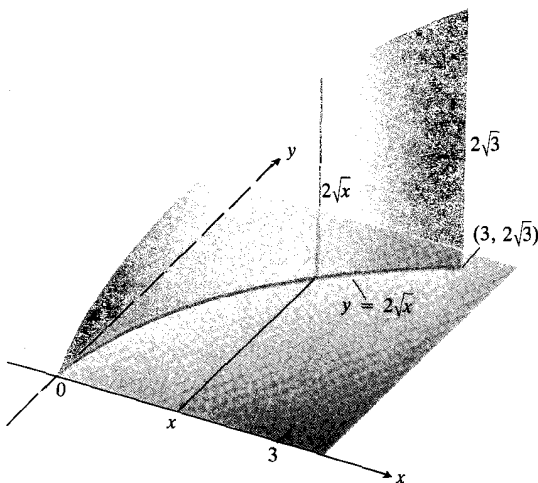
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \sqrt[1 + \frac{k}{n}] \quad ۱۳۰$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} \quad ۱۳۱$$

۱۳۲. نشان دهید که $\int_0^{\infty} x^x e^{-x^x} dx$ همگراست. مقدار آن را بیابید.

۱۳۳. نشان دهید که $\int_0^1 \ln x dx$ همگراست. مقدار آن را بیابید.

۱۳۴. از نقاط روی خم $y = 2\sqrt{x}$ خطوطی به طول $h = y$ عمود بر صفحه مختصات رسم شده‌اند (شکل ۳۳۰۷). مطلوب است مساحت رویه حاصل از این خطوط از $(0, 0)$ تا $(3, 2\sqrt{3})$.



۳۳۰۷ رویه مسأله ۱۳۴.

۱۳۵. ورقه‌ای به یک خط مستقیم و یک قوس 90° از دایره‌ای به شعاع a محدود است. مساحت و مرکز وارش را بیابید.

۱۳۶. مطلوب است مختصات مرکز جرم ناحیه محدود به خمهای $y = 1$ ، $x = 1$ ، $y = e^x$.

۱۳۷. از نقاط واقع بر دایره‌ای به شعاع a ، عمودهایی از صفحه

$$\int \frac{dx}{9x^2 + x^2} \quad ۱۱۴$$

$$\int_0^1 \ln(2x^2 + 4) dx \quad ۱۱۵$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 5 \cos x + 2} \quad ۱۱۶$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 - e^{-t}}} \quad ۱۱۷$$

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx \quad ۱۱۸$$

انتگرالهای مسائل ۱۱۹-۱۲۸ را محاسبه کنید. حتماً می‌توانید از عهده این کار برآیید.

$$\int (\sin^{-1} x)^2 dx \quad ۱۱۹$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2) \dots (x+m)} \quad ۱۲۰$$

$$\int x \sin^{-1} x dx \quad ۱۲۱$$

$$\int \sin^{-1} \sqrt{x} dx \quad ۱۲۲$$

$$\int \frac{d\theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad ۱۲۳$$

$$\int \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) dx \quad ۱۲۴$$

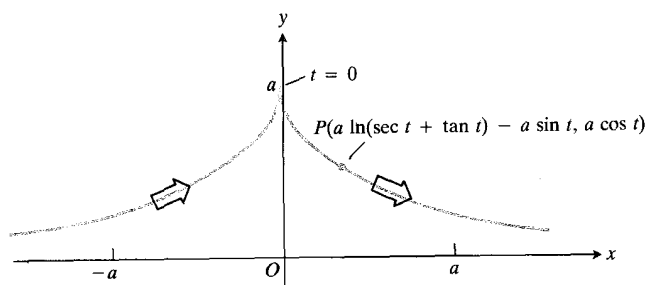
$$\int \frac{dt}{t - \sqrt{1-t^2}} \quad ۱۲۵$$

$$\int \frac{(2e^{2x} - e^x) dx}{\sqrt{3e^{2x} - 6e^x - 1}} \quad ۱۲۶$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2} \quad ۱۲۷$$

$$\int \frac{dx}{x^6 - 1} \quad ۱۲۸$$

در مسائل ۱۲۹-۱۳۱، هر یک از حدها را محاسبه کنید. بدین منظور هر یک را با یک انتگرال معین مناسب بیان، و این انتگرال را محاسبه کنید.



۳۵۰۷ خم مسأله ۱۴۴ چون چتری همه محور x را زیر پوشش دارد. پیکانها جهت افزایش t را نشان می‌دهند.

۱۴۵. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه مسأله ۱۴۴ حول محور x .

۱۴۶. مطلوب است مساحت رویه حاصل از دوران ناحیه مسأله ۱۴۴ حول محور x .

۱۴۷. آیا انتگرال

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}$$

همگراست یا واگرا؟

۱۴۸. خمهای زیر را رسم کنید و رفتار آنها را به ازای $|x|$ های بزرگ شرح دهید.

الف) $y = x - e^x$

ب) $y = e^{(x-e^x)}$

نشان دهید که انتگرالهای زیر همگرا آیند و مقدارشان را محاسبه کنید.

پ) $\int_{-\infty}^b e^{(x-e^x)} dx$

ت) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-e^x)} dx$

۱۴۹. مطلوب است محاسبه

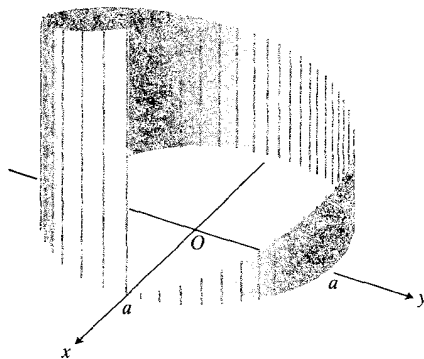
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1+y} dy.$$

۱۵۰. نشان دهید که اگر $p(x)$ یک چند جمله‌ای درجه n باشد، آنگاه

$$\int e^x p(x) dx = e^x [p(x) - p'(x) + p''(x) - \dots$$

$$+ (-1)^n p^{(n)}(x)].$$

آن اخراج می‌شوند. طول هر عمود در نقطه‌ای مانند P برابر ks است که s طول قوسی از دایره از $(a, 0)$ تا P و k یک عدد ثابت مثبت است. مطلوب است مساحت رویه حاصل از غمودهای اخراج شده از قوسی که از $(a, 0)$ شروع می‌شود و پس از یکبار دور زدن دایره پایان می‌یابد. شکل ۳۴.۷ را ببینید.



۳۴.۷ رویه مسأله ۱۳۷.

۱۳۸. ورقه‌ای در ربع اول واقع و به خمهای $y = e^*$ ، $y = 1$ و $x = 1$ محدود است. این ورقه به صورت قائم در آب قرار دارد و گوشه بالای آن در سطح آب است. خط $y = e$ سطح آب را نشان می‌دهد. مطلوب است نیروی کل وارد بر یکی از وجوه ورقه به فرض اینکه وزن مخصوص آب 62.5 lb/ft^3 و x و y بر حسب فوت باشند.

۱۳۹. مطلوب است طول قوس $y = \ln x$ از $x = 1$ تا $x = e$.

۱۴۰. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران قوس مسأله ۱۳۹ حول محور y ایجاد می‌شود.

۱۴۱. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران خم $y = e^*$ ، $0 \leq x \leq 2$ حول محور x ایجاد می‌شود.

۱۴۲. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران خم $y = \cos x$ ، $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ حول محور x ایجاد می‌شود.

۱۴۳. ناحیه‌ای در ربع اول واقع و به خم $y = \ln(1/x)$ و محورهای مختصات محدود است. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول محور x .

۱۴۴. مطلوب است مساحت ناحیه واقع بین محور x و خم

$$y = a \cos t, \quad x = a \ln(\sec t + \tan t) - a \sin t$$

شکل ۳۵.۷ را ببینید. $-\pi/2 < t < \pi/2$.

جانشانی $z = \tan(x/2)$

جانشانی

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$= 2 \tan \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sec^2(x/2)}$$

$$= \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$$

یا

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2} \quad (3)$$

بالاخره چون $x = 2 \tan^{-1} z$ ، داریم

$$dx = \frac{2 dz}{1+z^2} \quad (4)$$

مثال ۱

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\cos x} &= \int \frac{1+z^2}{2} \cdot \frac{2 dz}{1+z^2} \\ &= \int dz = z + C = \tan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

مثال ۲

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+\sin x} &= \int \left(\frac{1+z^2}{2+2z+2z^2} \right) \frac{2 dz}{1+z^2} \\ &= \int \frac{dz}{z^2+z+1} = \int \frac{dz}{(z+1/2)^2 + 3/4} \\ &= \int \frac{du}{u^2+a^2} \quad \left(u = z + \frac{1}{2}, a = \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{1+2 \tan(x/2)}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

انتگرالهای مسائل ۱۵۱-۱۵۸ را به کمک جانشانیهای (۱)-(۴) محاسبه کنید. انتگرالهایی نظیر انتگرالهای مسائل ۱۵۱ و ۱۵۳ در محاسبات مربوط به تعیین سرعت زاویه‌ای متوسط محور خروجی یک مفصل چندسویی (چهارشاخه‌کاردان) پیش می‌آیند وقتی که

$$z = \tan \frac{x}{2} \quad (1)$$

مسئله انتگرالگیری از هر تابع گویایی از $\sin x$ و $\cos x$ را به مسئله انتگرالگیری از تابع گویایی از z تبدیل می‌کند. از تابع اخیر هم می‌توان به کمک روش کسرها ساده انتگرال گرفت. بنابراین جانشانی (۱) وسیله بسیار نیرومندی است، اما استفاده از آن خسته‌کننده است و تنها وقتی به کار می‌رود که از سایر روشها کاری بر نیاید.

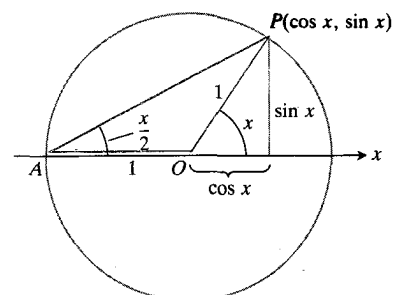
شکل ۳۶.۷، $\tan(x/2)$ را به صورت تابعی گویا از $\sin x$ و $\cos x$ نشان می‌دهد. برای مشاهده اثر این جانشانی چنین عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned} \cos x &= 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)} - 1 \\ &= \frac{2}{1+\tan^2(x/2)} - 1 \\ &= \frac{2}{1+z^2} - 1 \end{aligned}$$

یا

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad (2)$$

و



$$\tan(x/2) = \frac{(\sin x)}{(1+\cos x)} \quad \text{رابطه ۳۶.۷}$$

از این شکل به دست می‌آید. بحث جانشانی $z = \tan(x/2)$ را ملاحظه کنید.

محورهای ورودی و خروجی در يك امتداد نیستند.

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x} \quad .151$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos x} \quad .152$$

$$\int \frac{dx}{1 - \sin x} \quad .153$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x} \quad .154$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{1 - \cos x} \quad .155$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad .156$$

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} \quad .157$$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \tan x} \quad .158$$



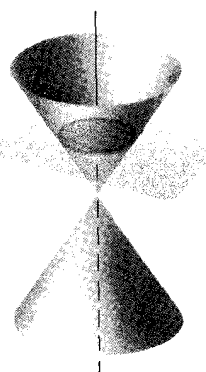
مقاطع مخروطی و سایر خمهای مسطح

چشم انداز

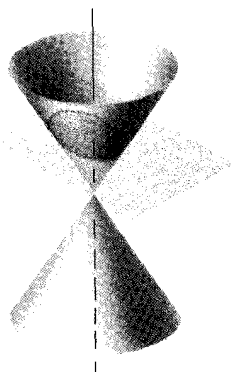
در این فصل عمدتاً به این مطلب می‌پردازیم که مقاطع مخروطی که منشأ آنها هندسه یونانی است چگونه امروز به صورت نمودارهای معادلات درجه دوم در صفحه مختصات مشخص می‌شوند. یونانیان دوران افلاطون این خمها را به صورت مقاطع يك صفحه با يك مخروط دوطبقه توصیف می‌کردند، و نام «مقاطع مخروطی» از اینجا آمده است. از شکل ۱۰۸ برمی‌آید که این مقاطع گوناگون اند. در اواخر فصل با معادلات پارامتری مقاطع مخروطی آشنا می‌شویم و چرخزاد و دیگر خمهای مسطح (واقع در صفحه) خاص را مطرح می‌کنیم. استفاده کپلر از مقاطع مخروطی در اثرش تحت عنوان توضیح حرکت‌های مریخ در ۱۶۰۹، اثری که در آن دو قانون اولش را عرضه کرد (مدارهای بیضوی، مساحت‌های برابر در زمانهای برابر)، سبب شد که برای یافتن ویژگی‌هایی از مقاطع مخروطی که ممکن بود در اخترشناسی مورد استفاده قرار گیرند، این مقاطع مجدداً و به‌طور جدی بررسی شوند. اپتیک ۵م که از زمان یونانیان مورد توجه ریاضیدانان بود (کلاودیوس بطلمیوس به شکست نور پی برده بود، اما چون قانونی نظیر قانون اسنل به نظرش نرسید، یافته‌های خود را بایک سهمی تقریب زد)، پس از اختراع تلسکوپ و میکروسکوپ در اوایل قرن هفدهم توجه بسیار زیادتری را به خود جلب کرد. نتایج حاصل از مطالعه عدسی و آینه به بررسی شکل رویه آنها انجامید، و چون این رویه‌ها دورانی‌اند، مطالعه خم مولد آنها را در پی داشت. این خمها در مورد بسیاری از آینه‌هایی که در تلسکوپ‌های بازتابنده به کار می‌روند، مقاطع مخروطی‌اند. پدپرش این امر که سیارات به دور خورشید می‌چرخند (و

نه به دور زمین) اصول جدیدی از مکانیک را ایجاب کرد که بتوانند مدار سیارات را، و به‌طور کلی مسیر اشیایی را که تحت تأثیر نیرویی حرکت می‌کنند، توضیح دهند. مطالعاتی که در این زمینه به عمل آمد، به بررسی خمهای مسطح، از مسیر سیارات گرفته تا مسیر پرتابه‌ها، منجر شد. قبل از قرن هفدهم توپ می‌توانست هدف‌هایی در فواصل هزاران متری را نشانه‌گیری کند، و لذا پیشگویی دقیق مسیر پرتابه به‌طور فزاینده‌ای اهمیت یافت. (نپر که لگاریتم را ابداع کرد، اسلحه‌ای نیز اختراع نمود که می‌توانست گاوی در فاصله يك مایلی را بزنند. نپر چنان ازدقت این اسلحه وحشت زده شده بود که کار تکمیل آن را کنار گذاشت.) در فصل ۱۳ خواهیم دید که در تقریب اول، مسیر پرتابه يك مقطع مخروطی است.

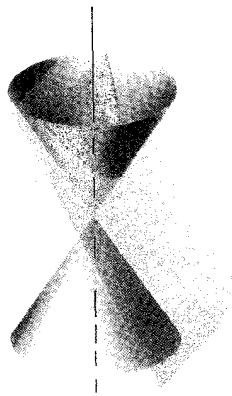
وقتی ریاضیدانان قرون شانزدهم و هفدهم به مطالعه آثار یونانیان پرداختند، کم‌کم فهمیدند که روش‌های اثبات یونانیان از کلیت برخوردار نیست. همان گونه که در بخش ۶.۲ هنگام محاسبه مساحت دیدیم، تقریباً هر قضیه‌ای به استدلال و محاسبات خاص خود نیاز داشت. سرانجام، طرز برخورد با مقاطع مخروطی از صورت برخورد بایک مسئله هندسی محض (مقطعات يك مخروط) به برخوردی تغییر کرد که در آن، مفاهیم مختصات و فاصله مورد توجه بود. مثلاً در سال ۱۵۷۹، گویدوبالدو دل‌مونتیه بیضی را به صورت مجموعه‌ای از نقاط صفحه تعریف کرد که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت مقدار ثابت است. (در بخش ۲۰۸ از این تعریف استفاده خواهیم کرد.)



دایره: صفحه عمود
بر محور مخروط



بیضی

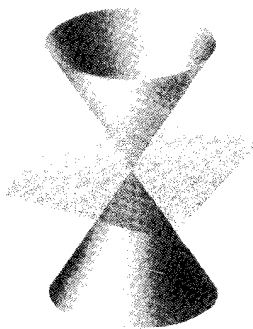


سهمی: صفحه موازی
با یال مخروط

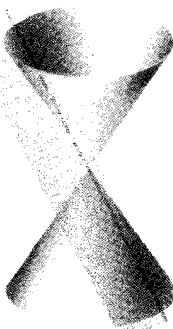


هذلولی: صفحه موازی
با محور مخروط

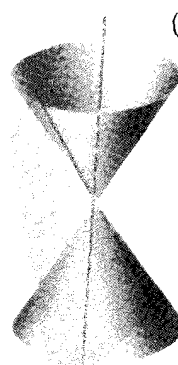
(ب)



نقطه: صفحه فقط از
رأس مخروط می‌گذرد



خط تنها: صفحه
مماس بر مخروط



یک جفت خط متقاطع: صفحه از رأس
مخروط می‌گذرد و آن را قطع می‌کند

۱۰۸ (الف) مقاطع مخروطی «متعارف» خمهایی هستند که از تقاطع یک صفحه با یک مخروط دوپارچه به دست می‌آیند. در مورد هذلولی، مقطع از دو خم تشکیل می‌شود، نه از یک خم، و هر کدام یک «شاخه» هذلولی نامیده می‌شود. مقاطع مخروطی «تباهیده» که در (ب) نشان داده شده‌اند در صورتی به دست می‌آیند که صفحه از رأس مخروط بگذرد.

گونه‌که در فصل ۱۲ خواهیم دید، اطلاعات زیادی دربارهٔ سرعش، شتابش، و نیرویی که آن را به پیش می‌برد، در اختیارمان قرار می‌گیرد.

اگر از تاریخ خوشتان می‌آید، کتاب اندیشه‌ریاضی از دودان باستان قسا عصر جدیداً نوشتهٔ موريس کلاین حساوی مطالب جالبی دربارهٔ مقاطع مخروطی است. مرجع خوب دیگر کتاب ریاضیات دفرهنگ غرب^۲ نوشتهٔ همین نویسنده است.

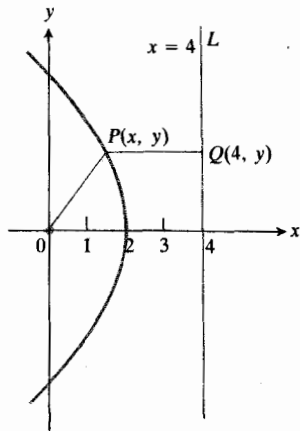
۱۰۸ معادله‌های حاصل از فرمول فاصله

در این بخش برای به دست آوردن معادلات خمهای واقع در صفحه

از نظر جبری، ما در این فصل زمینه را برای این نتیجهٔ شگفت‌آور مهیا می‌کنیم که نمودار یک معادلهٔ درجهٔ دوم بر حسب x و y در صفحه (در صورت وجود) یا یک مقطع مخروطی است یا دو خط متوازی. هیچ شکل دیگری نمی‌تواند نمودار یک معادلهٔ درجهٔ دوم بر حسب x و y باشد.

از نظر کاربردی (و در اینجا حساب دیفرانسیل و انتگرال وارد صحنه می‌شود)، ریاضیات مقاطع مخروطی درست همان است که برای توصیف مسیر سیارات، ستارگان دنباله‌دار، قمرها، اختراوها، ماهواره‌ها، یا هر چیز دیگری که در فضا تحت نیروهای گرانشی حرکت می‌کند، مورد نیاز است. وقتی بدانیم که مسیر حرکت یک جسم متحرک یکی از مقاطع مخروطی است، همان

1. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, (1972).
2. Morris Kline, *Mathematics in Western Culture*, Oxford University Press, (1964).



۳۰۸ خم حاصل از حرکت نقطه‌ای چون P که از مبدأ و خط $x=4$ به یک فاصله است.

این مطلب هم صحیح است که هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادله (۳) صدق کنند، از O و L به یک فاصله است؛ زیرا اگر

$$y^2 = 16 - 8x$$

آنگاه

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{x^2 + (16 - 8x)} = \sqrt{(x - 4)^2} \\ &= |x - 4| = |4 - x|\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$OP = PQ.$$

بنابراین، برای اینکه $P(x, y)$ از O و L به یک فاصله باشد، معادله (۳) هم شرط لازم و هم شرط کافی را بیان می‌کند. به عبارت دیگر، معادله (۳) معادله‌ای برای این نقاط همفاصله است. ■

مسئله‌ها

در هریک از مسائل ۱-۱۱، با استفاده از فرمول فاصله، معادله مجموعه نقاطی چون $P(x, y)$ را بیابید که در شرط داده شده صدق کنند.

۱. فاصله P از مبدأ و از خط $y = -4$ یکی باشد.

۲. فاصله P از نقطه $(0, 1)$ و از خط $y = -1$ یکی باشد.

۳. فاصله P از دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(2, -3)$ یکی باشد.

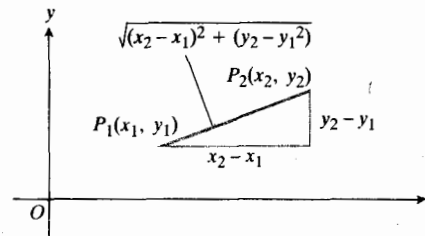
۴. فاصله P تا $F_1(-1, 0)$ دو برابر فاصله‌اش تا $F_2(2, 0)$ باشد.

دکارتی از فرمول فاصله استفاده می‌کنیم.

همان‌طور که می‌دانید، فاصله d بین دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در صفحه، از روی مختصاتشان به وسیله فرمول

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

به دست می‌آید. این فرمول با استفاده از قضیه فیثاغورس در مورد مثلث شکل ۲۰۸ حاصل می‌شود. همان‌گونه که مثال زیر نشان می‌دهد، این فرمول برای یافتن معادلات خمهایی که مشخصه هندسی آنها به یک یا چند فاصله وابسته است، بسیار مفید است.



۲۰۸ فاصله بین دو نقطه در صفحه از روی مختصات آنها با فرمول حاصل از قضیه فیثاغورس محاسبه می‌شود.

مثال ۱ برای مجموعه نقاطی چون $P(x, y)$ که فاصله آنها از مبدأ O و خط $L: x=4$ برابر باشد، معادله‌ای بنویسید.

حل: فاصله بین P و L عبارت است از فاصله عمودی PQ بین $P(x, y)$ و نقطه $Q(4, y)$ واقع بر L که مختص y آن با مختص y مربوط به P یکی است. (شکل ۳۰۸ را ببینید). پس

$$PQ = \sqrt{(4 - x)^2 + (y - y)^2} = |4 - x|.$$

فاصله OP برابر است با

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

P باید در شرط زیر صدق کند

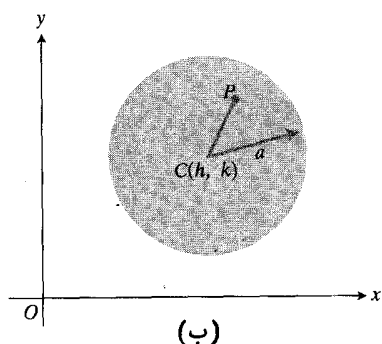
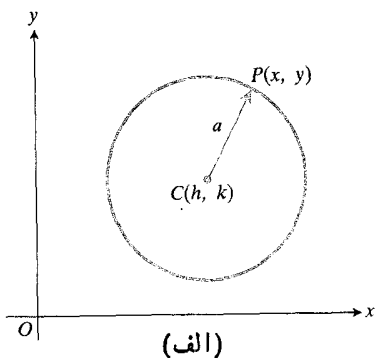
$$\sqrt{x^2 + y^2} = |4 - x| \quad \text{یا} \quad OP = PQ \quad (2)$$

اگر (۲) برقرار باشد، از مجذور کردن دو طرف آن معادله زیر به دست می‌آید که آن هم برقرار است

$$x^2 + y^2 = 16 - 8x + x^2$$

$$y^2 = 16 - 8x. \quad (3)$$

لذا، اگر نقطه‌ای از O و L به یک فاصله باشد، آنگاه مختصاتش باید در معادله (۳) صدق کنند.



$$40.8 \quad (الف) \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

$$(ب) \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 < a^2$$

قسمت درونی دایره به مرکز $C(h, k)$ و به شعاع a است.

اگر (۱) برقرار باشد، (۲) نیز برقرار است، و اگر (۲) برقرار باشد (۱) هم برقرار است. بنابراین، معادله (۲) معادله‌ای برای نقاط دایره است.

معادله متعارف دایره به شعاع a و به مرکز (h, k) عبارت است از

$$(3) \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

مثال ۱ معادله‌ای برای دایره به مرکز مبدأ و به شعاع a بیابید.

حل: اگر $h=k=0$ ، معادله (۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$(4) \quad x^2 + y^2 = a^2$$

مثال ۲ دایره مار بر مبدأ و به مرکز $C(2, -1)$ را بیابید.

حل: اگر $(h, k) = (2, -1)$ ، معادله (۳) به صورت

۵. حاصلضرب فاصله‌های P تا $F_1(-2, 0)$ و $F_2(2, 0)$ باشد.

۶. مجموع فاصله‌های P تا $F_1(1, 0)$ و $F_2(0, 1)$ ثابت باشد، و خم از مبدأ بگذرد.

۷. فاصله P تا خط $x = -2$ دو برابر فاصله‌اش تا نقطه $(2, 0)$ باشد.

۸. فاصله P تا $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ برابر باشد با ۲ به علاوه فاصله P تا $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

۹. فاصله P تا نقطه $(-3, 0)$ برابر باشد با ۴ به علاوه فاصله P تا نقطه $(3, 0)$.

۱۰. فاصله P تا خط $y = 1$ از فاصله‌اش تا مبدأ ۳ واحد کمتر باشد.

۱۱. فاصله P تا نقطه $(2, 3)$ سه واحد باشد.

۱۲. نقاطی از خط $x - y = 1$ را بیابید که فاصله‌شان تا نقطه $(3, 0)$ برابر با ۲ واحد باشد.

۱۳. نقطه‌ای بیابید که از سه نقطه $A(0, 1)$ ، $B(1, 0)$ ، و $C(4, 3)$ به یک فاصله باشد. شعاع دایره گذرنده از نقاط A ، B ، و C چیست؟

۲۰۸ دایره

در این بخش معادلات دایره واقع در صفحه مختصات را به دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان مستقیماً از هر یک از این معادلات، شعاع و مرکز را یافت.

تئوریم

دایره مجموعه نقاطی از یک صفحه است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت مفروض در صفحه، مقداری ثابت باشد.

معادله دایره

فرض کنید نقطه ثابت مفروض $C(h, k)$ ، مرکز دایره و فاصله ثابت a ، شعاع دایره باشد. نیز فرض کنید $P(x, y)$ یکی از نقاط دایره (شکل ۴۰۸ الف) باشد. آنگاه

$$(1) \quad CP = a$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = a$$

$$(2) \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

زیر درمی آید

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = a^2.$$

چون دایره از مبدأ می گذرد، $x=y=0$ باید در معادله صدق کند.

$$a^2 = 5 \quad \text{یا} \quad (0-2)^2 + (0+1)^2 = a^2$$

لذا معادله عبارت است از

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5.$$

مثال ۳ چه نقاط $P(x, y)$ در نابرابری زیر صدق می کنند؟

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 < a^2 \quad (5)$$

حل: طرف چپ (۵) مربع فاصله $C(h, k)$ تا $P(x, y)$ است. نابرابری برقرار است اگر و تنها اگر

$$CP < a$$

یعنی، اگر و تنها اگر P درون دایره به شعاع a و با مرکز $C(h, k)$ قرار گیرد (شکل ۴.۸ ب).

مثال ۴ مرکز و شعاع دایره زیر را بیابید

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12.$$

حل: جملات بر حسب x و بر حسب y را به صورت مربع کامل درمی آوریم

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 12 + 4 + 9$$

یا

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

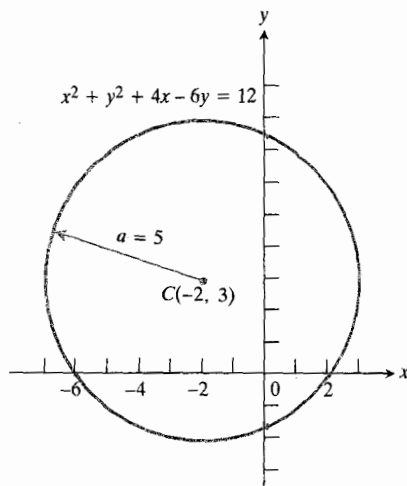
این همان معادله (۳) با ضابطه $(h, k) = (-2, 3)$ و $a^2 = 25$ است؛ بنابراین نمایش دهنده دایره ای است با مشخصات زیر

$$C(-2, 3) \quad \text{مرکز:}$$

$$a = 5 \quad \text{شعاع:}$$

شکل ۵.۸ را ببینید.

معادله $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ $A \neq 0$
معادله به صورت



۵.۸ نمودار $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A \neq 0 \quad (6)$$

را می توان با کامل کردن مربعات، نظیر آنچه که در مثال ۴ انجام دادیم، به صورت معادله (۳) درآورد. ابتدا (۶) را بر A بخش می کنیم و می نویسیم

$$\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + \left(y^2 + \frac{E}{A}y\right) = -\frac{F}{A}. \quad (7)$$

سپس بسا افزودن عبارات $(D/2A)^2 = D^2/(4A^2)$ و $(E/2A)^2 = E^2/(4A^2)$ مربعات را کامل می کنیم. البته اینجا را باید به هر دو طرف معادله افزود. لذا داریم

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 &= -\frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} \\ &= \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

معادله (۸) نظیر معادله (۳) است که در آن

$$a^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} \quad (9)$$

با این شرط که عبارت سمت راست مثبت باشد. پس معادله (۶) نمایش دهنده دایره ای است با مشخصات زیر

$$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right) \quad \text{مرکز:}$$

$$a = \sqrt{(D^2 + E^2 - 4AF)/4A^2} \quad \text{شعاع:} \quad (10)$$

مسئله‌ها

اگر طرف راست معادله (۹) صفر باشد، خم به يك تك نقطه بدل می‌شود. اگر طرف راست معادله (۹) منفی باشد، هیچ نقطه‌ای از صفحه در (۸) و یا در (۶) صدق نمی‌کند.
در تحلیل معادله

$$C(0, 2), \quad a=2 \quad ۰۱$$

$$C(-2, 0), \quad a=3 \quad ۰۲$$

$$C(3, -4), \quad a=5 \quad ۰۳$$

$$C(1, 1), \quad a=\sqrt{2} \quad ۰۴$$

۰۵. يك نابرابری بنویسید كه نقاط درون دایره به مرکز $C(-2, -1)$ و به شعاع $a=\sqrt{6}$ را توصیف کند.

۰۶. يك نابرابری بنویسید كه نقاط بیرون دایره به مرکز $C(-4, 2)$ و به شعاع $a=4$ را توصیف کند.

در مسائل ۷-۱۶، مرکز و شعاع دایره مفروض را بیابید. سپس دایره را رسم کنید. (دانهمایی برای دسم دایره: ابتدا دایره را رسم، و مرکز آن را مشخص کنید. سپس با استفاده از این مرکز و شعاع جای محورهای مختصات را تعیین، و آنها را رسم کنید.)

$$x^2 + y^2 = 16 \quad ۰۷$$

$$x^2 + y^2 + 6y = 0 \quad ۰۸$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 3 \quad ۰۹$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 8 \quad ۰۱۰$$

$$x^2 + 4x + y^2 = 12 \quad ۰۱۱$$

$$3x^2 + 3y^2 + 6x = 1 \quad ۰۱۲$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y = -1 \quad ۰۱۳$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0 \quad ۰۱۴$$

$$2x^2 + 2y^2 + x + y = 0 \quad ۰۱۵$$

$$2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 114 = 0 \quad ۰۱۶$$

در مسائل ۱۷ و ۱۸، چه نقاطی در نابرابری صدق می‌کنند؟

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 \leq 0 \quad ۰۱۷$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y + 9 \geq 0 \quad ۰۱۸$$

۰۱۹. برای دایره گذرنده از نقطه (۴، ۵) و به مرکز (۲، ۲) معادله‌ای بیابید.

۰۲۰. برای دایره گذرنده از نقاط (۰، ۰) و (۶، ۰) و مماس بر خط $y = -1$ معادله‌ای بنویسید.

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A \neq 0 \quad (۱۱)$$

توصیه می‌کنیم به جای حفظ کردن فرمول (۱۰)، از روش مذکور در مثال ۴ استفاده کنید. کافی است به یاد داشته باشید كه يك معادله درجه دوم نظیر (۶) كه در آن ضرایب x^2 و y^2 برابرند و جمله xy وجود ندارد، يك دایره را نمایش می‌دهد (یا يك تك نقطه را نمایش می‌دهد، یا هیچ نقطه‌ای را نمایش نمی‌دهد).
اگر معادله (۶) را بر A تقسیم کنیم، معادله‌ای به صورت

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (۱۲)$$

به دست می‌آید كه در آن a, b ، و c ثابت‌اند. ثابتهای a, b ، و c را غالباً می‌توان از مفروضات هندسی به دست آورد. مثلاً، ممكن است بدانیم كه دایره از سه نقطه مشخص (غیرواقع بريك خط) می‌گذرد، یا اینکه مماس بر سه خط مفروض است كه هر سه از يك نقطه نمی‌گذرند، یا اینکه از يك نقطه مفروض می‌گذرد و بر دو خط داده شده‌ای كه از این نقطه نمی‌گذرند، مماس است.

مثال ۵. برای دایره مسابری سه نقطه $(8, 0)$ ، $(0, 6)$ ، و $(0, 0)$ معادله‌ای بنویسید.

حل: در معادله (۱۲) مختصات این سه نقطه را قرار می‌دهیم و سه معادله به دست می‌آوریم كه از حل آنها a, b ، و c به دست می‌آیند:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$(8, 0): \quad 64 + 0 + 8a + 0 + c = 0 \quad (۱۳)$$

$$(0, 6): \quad 0 + 36 + 0 + 6b + c = 0 \quad (۱۴)$$

$$(0, 0): \quad 0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \quad (۱۵)$$

از معادله (۱۵)، $c = 0$ به دست می‌آید. با قراردادن $c = 0$ در معادلات (۱۳) و (۱۴) داریم

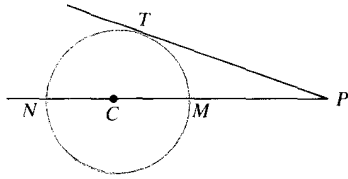
$$64 + 8a = 0 \quad 36 + 6b = 0$$

$$a = -8 \quad b = -6$$

معادله مطلوب، معادله (۱۲) به ازای $a = -8$ ، $b = -6$ ، و $c = 0$ است

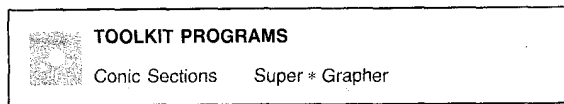
$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$$

خط ماربر نقاط P و مرکز دایره، C ، دایره را در نقاط M و N قطع می‌کند. ثابت کنید که $(PM)(PN) = (PT)^2$.



۶.۸ دایره و خطوط مذکور در مسأله ۳.۳.

۳.۴ می‌دانیم که هر زاویه محاط در یک نیم‌دایره یک زاویه قائمه است. عکس این مطلب را ثابت کنید: نشان دهید که اگر به ازای هر نقطه $P(x, y)$ واقع بر یک خم C که O و A را به هم وصل می‌کند زاویه OPA یک زاویه قائمه باشد، آنگاه خم یک دایره به قطر OA است.



۳.۸ سهمی

در این بخش، معادلات سهمیهایی را به دست می‌آوریم که محورشان با یکی از محورهای مختصات موازی است، و نشان می‌دهیم چگونه می‌توان کانونها و هادیهای این سهمیها را مستقیماً از این معادلات به دست آورد. همچنین توضیح می‌دهیم که چرا آینه‌های سهمی بازتابنده‌های خوبی هستند و نیز نشان می‌دهیم با کمک نخ-ابزار مورد استفاده کپلر برای رسم سهمی- چگونه می‌توان سهمی رسم کرد.

تقریب

سهمی مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه و یک خط ثابت مفروض در صفحه به یک فاصله باشند.

نقطه ثابت را کانون سهمی و خط ثابت را هادی آن می‌نامند. اگر کانون F بر هادی L واقع باشد، آنگاه سهمی چیزی جز خط عمود بر L و گذرنده از F نیست. این حالت، حالت تباهیده سهمی است.

سهمیهایی که روبه بالا باز می‌شوند

اگر F بر L قرار نداشته باشد، محور y مثبت را چنان انتخاب می‌کنیم که از F بگذرد و بر L عمود باشد. مبدأ را در نیمه راه F و L اختیار می‌کنیم و بدین ترتیب دستگاه مختصاتی به دست می‌آوریم

۲.۱. برای دایره به مرکز $(1, -1)$ که بر خط $x + 2y = 4$ مماس باشد، معادله‌ای بنویسید.

۲.۲. برای دایره گذرنده از نقاط $(0, 0)$ و $(17, 7)$ که مرکزش بر خط $12x - 5y = 0$ قرار داشته باشد، معادله‌ای بنویسید.

۲.۳. برای دایره گذرنده از نقاط $(2, 3)$ ، $(3, 2)$ ، و $(-2, 3)$ معادله‌ای بنویسید.

۲.۴. برای دایره گذرنده از نقاط $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ ، و $(2, 2)$ معادله‌ای بنویسید.

۲.۵. برای دایره گذرنده از نقاط $(7, 1)$ ، $(0, 0)$ ، و $(-1, 7)$ معادله‌ای بنویسید. مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

۲.۶. آیا نقطه $(31, 1)$ درون دایره

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$$

واقع است، یا بیرون آن یا روی آن؟ چرا؟

۲.۷. اگر فاصله نقطه $P(x, y)$ تا نقطه $(6, 0)$ دو برابر فاصله‌اش تا نقطه $(0, 3)$ باشد، نشان دهید که P بر یک دایره واقع است. مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

۲.۸. مجموع مجذورات فواصل نقطه $P(x, y)$ تا دو نقطه $A(-5, 2)$ و $B(1, 4)$ برابر با ۵۲ است. نشان دهید که مکان P دایره‌ای است که مرکزش وسط پاره خط AB است. آیا A و B ، درون این دایره واقع اند یا بیرون آن یا روی آن؟

۲.۹. مطلوب است ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت که درون بخش کوچکتراحاصل از تقاطع دایره $x^2 + y^2 = 36$ با خط $x = 1$ جای می‌گیرد. فرض کنید که یکی از اضلاع این مستطیل در امتداد خط مفروض قرار داشته باشد.

۳.۰. مطلوب است طول قاعده بالایی ذوزنقه‌ای با بیشترین مساحت که در یک نیم‌دایره به شعاع a محاط می‌شود، با این شرط که قاعده پایینی آن روی قطر نیم‌دایره قرار داشته باشد. مساحت ذوزنقه را بیابید.

۳.۱. به طریق هندسی نشان دهید که طول s هر یک از خطوطی که از یک نقطه (x_1, y_1) واقع در بیرون دایره $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ بر دایره مماس شود، در معادله $s^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - a^2$ صدق می‌کند.

۳.۲. نشان دهید که خط عمود بر دایره $x^2 + y^2 = a^2$ در نقطه (x_1, y_1) از مبدأ می‌گذرد.

۳.۳. در شکل ۶.۸ خط PT در نقطه T بر دایره مماس است، و

مجاور تقارن سهمی را محور سهمی می نامند. نقطه ای که روی این محور قرار داشته، و در نیمه راه کانون و خط هادی باشد نقطه ای از سهمی است، زیرا فاصله اش از کانون و هادی یکی است. این نقطه، رأس سهمی نام دارد. در شکل ۷.۸ مبدأ، رأس سهمی است. خط مماس بر سهمی در رأس، با هادی موازی است. از معادله (۲) درمی یابیم که شیب مماس در هر نقطه دلخواه، $dy/dx = x/2p$ است که در مبدأ صفر است.

مثال ۱ کانون و هادی سهمی زیر را بیابید

$$x^2 = 8y. \quad (3)$$

حل: شکل ۸.۸ را ببینید. از مقایسه معادله (۳) با معادله (۲) داریم

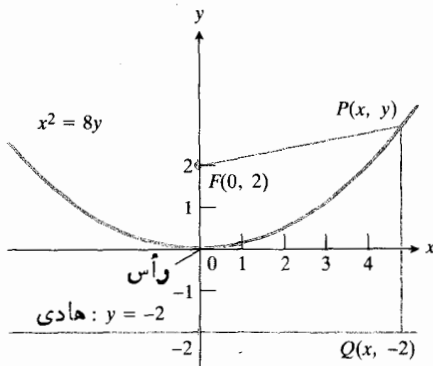
$$4p = 8, \quad p = 2.$$

کانون بر محور y و به فاصله $p = 2$ واحد از رأس قرار دارد، یعنی، داریم

$$F(0, 2) \quad \text{کانون:}$$

هادی $y = -2$ خط $y = -p$ است

$$y = -2 \quad \text{هادی:}$$



$$x^2 = 8y \quad \text{سهمی ۸.۸}$$

سهمیهایی که روبه پایین باز می شوند

اگر سهمی مطابق شکل ۹.۸ روبه پایین باز شود و کانونش در $F(0, -p)$ و هادی اش $y = p$ باشد، آنگاه معادله (۲) به صورت زیر درمی آید

$$x^2 = -4py. \quad (4) \quad \text{(روبه پایین باز می شود)}$$

که معادله ساده ای برای سهمی به دست می دهد. اگر فاصله بین F و L ، $2p$ فرض شود، آنگاه F نقطه $(0, p)$ و L خط $y = -p$ خواهد بود. شکل ۷.۸ را ببینید.

با توجه به نمادهای شکل ۷.۸، نقطه $P(x, y)$ بر سهمی قرار دارد اگر و تنها اگر فواصل PQ و PF برابر باشند

$$PF = PQ. \quad (1)$$

بنابراین فاصله داریم

$$PF = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} \quad \text{و} \quad PQ = \sqrt{(y+p)^2}$$

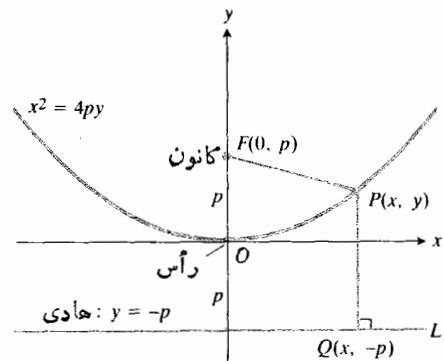
با برابر قرار دادن این دو عبارت، مجذور کردن حاصل، و ساده کردن نتیجه داریم

$$x^2 = 4py. \quad (2) \quad \text{(روبه بالا باز می شود)}$$

هر نقطه از سهمی در معادله فوق صدق می کند. به عکس، اگر (۲) برقرار باشد، آنگاه

$$PF = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{4py + (y^2 - 2py + p^2)} \\ = \sqrt{(y+p)^2} = PQ$$

یعنی $P(x, y)$ بر سهمی قرار می گیرد. خلاصه، نمودار معادله $x^2 = 4py$ سهمی است.



۷.۸ سهمی $x^2 = 4py$. توجه کنید که یک سهمی همواره از میان کانون و هادی اش می گذرد.

محور و رأس

چون در معادله (۲)، p مثبت است، (اگر x عددی حقیقی باشد) y نمی تواند منفی باشد، و این خم هیچگاه زیر محور x قرار نمی گیرد.

این خم نسبت به محور y متقارن است زیرا نمای x زوج است.

انتقال محورها

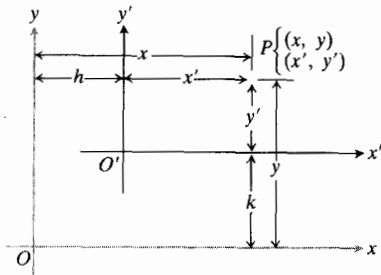
اگر رأس سهمی در نقطه‌ای غیر از مبدأ مانند $V(h, k)$ واقع باشد، معادلات (۲)، (۴)، و (۵) دیگر به کار نمی‌آیند. اما، با در نظر گرفتن دستگاه مختصات جدیدی که مبدأ آن O' در V واقع باشد و محورهایش موازی با محوره‌های اصلی باشند، می‌توان به معادلات مناسبی برای سهمی دست یافت. در این صورت، هر نقطه چون P از صفحه دودسته مختصات دارد، مثلاً (x, y) در دستگاه اصلی، و (x', y') در دستگاه جدید. برای اینکه از O به P برویم، یک انتقال افقی به اندازه x ، و سپس یک انتقال قائم به اندازه y انجام می‌دهیم. مقدار x از دوانتقال افقی به دست می‌آید: h برای رسیدن از O به O' و x' برای رسیدن از O' به P (شکل ۱۱۰۸). به همین ترتیب، y از دوانتقال قائم به دست می‌آید: k برای رسیدن از O به O' و y' برای رسیدن از O' به P . پس این دو دسته مختصات با معادلات زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \quad (۶ \text{ الف})$$

یا

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases} \quad (۶ \text{ ب})$$

معادلات (۶) را معادلات انتقال محورها می‌نامند زیرا محوره‌های مختصات جدید را می‌توان با انتقال محوره‌های مختصات قدیم به دست آورد.



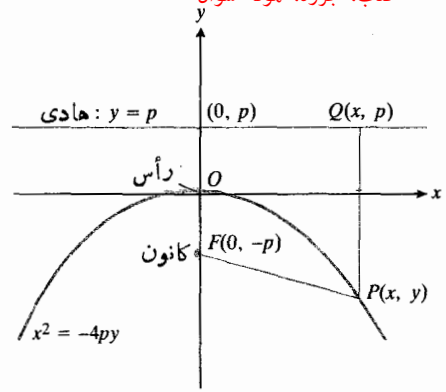
۱۱۰۸ انتقال محوره‌های مختصات. توجه

کنید که $x = h + x'$ و $y = k + y'$ و $x' = x - h$ و $y' = y - k$ را به دست می‌آوریم؛

حال فرض کنید یک سهمی با رأس $V(h, k)$ نظیر شکل ۱۲۰۸ داده شده باشد که روبه بالا باز شود. معادله (۲) در دستگاه مختصات $x'O'y'$ معادله سهمی را بدصورت

$$(x')^2 = 4py' \quad (۷)$$

به دست می‌دهد. با استفاده از معادلات (۶ الف)، معادله اخیر در



$$x^2 = -4py \quad \text{سهمی ۹۰۸}$$

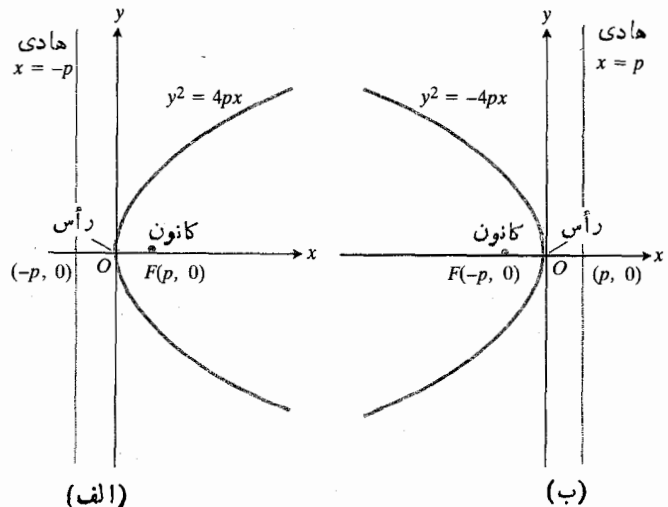
سهمیهایی که روبه راست یا روبه چپ باز می‌شوند اگر نقش x و y را در معادلات (۲) و (۴) با هم عوض کنیم، معادلات حاصل

$$y^2 = 4px \quad (۵ \text{ الف}) \quad (\text{روبه راست باز می‌شود})$$

و

$$y^2 = -4px \quad (۵ \text{ ب}) \quad (\text{روبه چپ باز می‌شود})$$

نیز سهمیهایی را نمایش می‌دهند (شکل ۱۵۰۸). این سهمیها نسبت به محور y متقارن‌اند زیرا با یک، توان زوج ظاهر می‌شود. باز هم رأس در مبدأ است. هادی بر محور تقارن عمود، و فاصله آن تا رأس p واحد است. کانون بر محور تقارن و در «درون» خم قرار دارد، و فاصله‌اش تا رأس p واحد است. سهمی (۵ الف) روبه راست باز می‌شود زیرا x نباید کمتر از صفر باشد، حال آنکه سهمی (۵ ب) روبه چپ باز می‌شود.



$$x^2 = 4px \quad \text{سهمی ۱۵۰۸ (الف)} \quad \text{و} \quad y^2 = -4px \quad \text{سهمی (ب)}$$

عدد p فاصله بین V و F است، پس

$$p = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2} = 4.$$

معادله مطلوب عبارت است از

$$(y-2)^2 = 4(4)(x+1) \quad \text{یا} \quad (y-2)^2 = 16(x+1)$$

هادی خط قائمی است که به فاصله p واحد در سمت چپ رأس $(-1, 2)$ قرار دارد. چون $p=4$ ، هادی خط $x=-5$ است.

مثال ۳ برای سهمی با رأس $V(1, 2)$ و هادی $y=3$ ، معادله‌ای بیابید. مختصات کانون آن چه هستند؟

حل: چون سهمی رو به پایین باز می‌شود، از معادله (۸ب) به‌ازای $h=1$ و $k=2$ استفاده می‌کنیم

$$(x-1)^2 = -4p(y-2).$$

عدد p ، فاصله بین رأس $(1, 2)$ و هادی $y=3$ ، برابر است با

$$p = 3 - 2 = 1.$$

معادله مطلوب چنین است

$$(x-1)^2 = -4(y-2).$$

کانون به فاصله $p=1$ واحد در پایین رأس $(1, 2)$ ، در نقطه $F(1, 1)$ قرار دارد.

تبدیل معادله سهمی به صورت متعارف

ویژگی اصلی معادله یک سهمی واقع در صفحه xy که محورهای موازی با یکی از محورهای مختصات است، این است که نسبت به یکی از مختصاتها خطی، و نسبت به دیگری از درجه دوم است. هرگاه چنین معادله‌ای در دست باشد، می‌توانیم با طی کردن مراحل زیر آن را به یکی از چهار صورت متعارف معادله (۸) درآوریم:

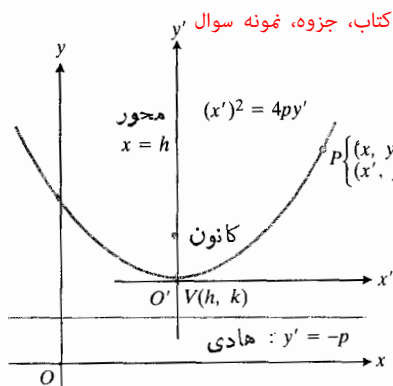
۱. جملات مربوط به مختصاتی را که به صورت درجه دوم ظاهر می‌شود، به صورت مربع کامل درمی‌آوریم.

۲. بقیه جملات را به صورت $\pm 4p(x-h)$ یا $\pm 4p(y-k)$ که p مثبت است، می‌نویسیم.

رأس سهمی، فاصله رأس تا کانون، محور تقارن، و جهت باز شدن را طبق معمول می‌توان از صورت متعارف به دست آورد.

مثال ۴ رأس، محور، کانون، و هادی سهمی زیر را بیابید

$$y^2 - 2y - 12x - 23 = 0.$$



۱۲۰۸ یک سهمی با رأس $V(h, k)$ که رو به بالا باز می‌شود.

دستگاه مختصات xOy به صورت معادله زیر درمی‌آید

$$(x-h)^2 = 4p(y-k). \quad (8 \text{ الف})$$

محور سهمی (۸ الف) خط $x=h$ است. معادله این خط از مساوی صفر قرار دادن جمله درجه دوم $(x-h)^2$ مذکور در (۸ الف) به دست می‌آید. کانون بر محور تقارن و p واحد بالاتر از رأس، در $x=h$ واقع است. هادی $y=k+p$ ، واقع است. عمود بر محور تقارن است؛ لذا معادله‌اش $y=k-p$ است. صورتهای دیگر معادلات سهمی همراه با معادله (۸ الف) در فهرست زیر آمده‌اند.

معادلات متعارف سهمیهای با رأس (h, k) و محوری که با یکی از محورهای مختصات موازی است

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \quad (8 \text{ الف}) \quad (\text{رو به بالا باز می‌شود})$$

$$(x-h)^2 = -4p(y-k) \quad (8 \text{ ب}) \quad (\text{رو به پایین باز می‌شود})$$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \quad (8 \text{ پ}) \quad (\text{رو به راست باز می‌شود})$$

$$(y-k)^2 = -4p(x-h) \quad (8 \text{ ت}) \quad (\text{رو به چپ باز می‌شود})$$

p برابر است با فاصله کانون تا رأس یا فاصله رأس تا هادی

سهمیهای (۸ الف) و (۸ ب) نسبت به خط $x=h$ و سهمیهای (۸ پ) و (۸ ت) نسبت به خط $y=k$ متقارن‌اند.

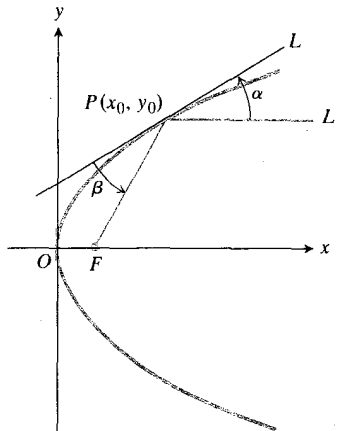
مثال ۲ معادله سهمی به رأس $V(-1, 2)$ و کانون $F(3, 2)$ را بیابید. هادی آن چیست؟

حل: چون سهمی رو به راست باز می‌شود، از معادله (۸ پ) به‌ازای $h=-1$ و $k=2$ استفاده می‌کنیم

$$(y-2)^2 = 4p(x+1).$$

ویژگی بازتابندگی سهمیها

کاربرد عمده سهمی بازتاباندن نور و امواج رادیویی است. پرتوهایی که از کانون سهمی ساطع شوند، موازی با محور از سهمی خارج می شوند، و پرتوهایی که موازی با محور به سهمی بتابند، در کانون جمع می شوند. شکل ۱۴.۸ دلیل این امر را نشان می دهد. خط L بر سهمی مماس، F کانون، و پرتو PL' با محور سهمی موازی است. چون α و β برابرند (مسئله ۳۴)، هر پرتوی که از F بتابد در امتداد PL' خارج می شود. به همین ترتیب، هر پرتوی که در امتداد PL' به سهمی بتابد، به طرف F باز می تابند.



۱۴.۸ بازتابنده سهموی تمام پرتوهای نور ساطع شده از کانون را موازی با محور سهمی به خارج باز می تاباند.

در آینه های سهموی تلسکوپ، در چراغهای جلو اتومبیل، در انواع چراغهای جستجو، در آنتنهای سهموی رادار و میکروویو، و در گیرنده های «بشقابی» تلویزیون از این ویژگی استفاده می شود.

توسیم سهمی به روش کپلر

برای رسم سهمی به روش کپلر (با ابزارهای جدید) باید ریسمانی به طول یک خطکش T و نیز میزی داشت که لبه آن بتواند به عنوان هادی سهمی به کار رود. طبق شکل ۱۵.۸، یک طرف ریسمان را در نقطه ای که می خواهید کانون سهمی باشد محکم کنید و طرف دیگرش را به انتهای خطکش T وصل کنید. سپس در حالی که ریسمان را با مدادی در امتداد خطکش T نگه می دارید، خطکش را در امتداد لبه میز حرکت دهید. مداد حین حرکت یک سهمی رسم می کند: PF همواره با PB برابر است زیرا طول خط ثابت است و مقدار آن AB است.

حل: این معادله نسبت به y از درجه دوم و نسبت به x خطی است. معادله را به صورت زیر می نویسیم

$$y^2 - 2y = 12x + 23$$

و با افزودن $1 = (-2/2)^2$ به دو طرف، طرف راست را به صورت مربع کامل در می آوریم. در نتیجه

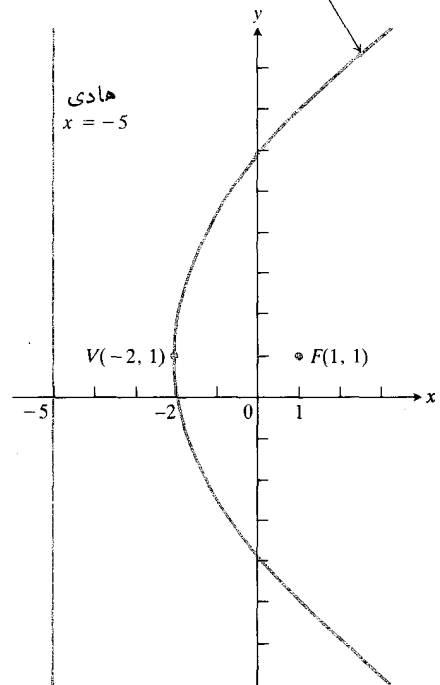
$$y^2 - 2y + 1 = 12x + 24 \quad \text{یا} \quad (y-1)^2 = 12(x+2)$$

معادله اخیر به صورت

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

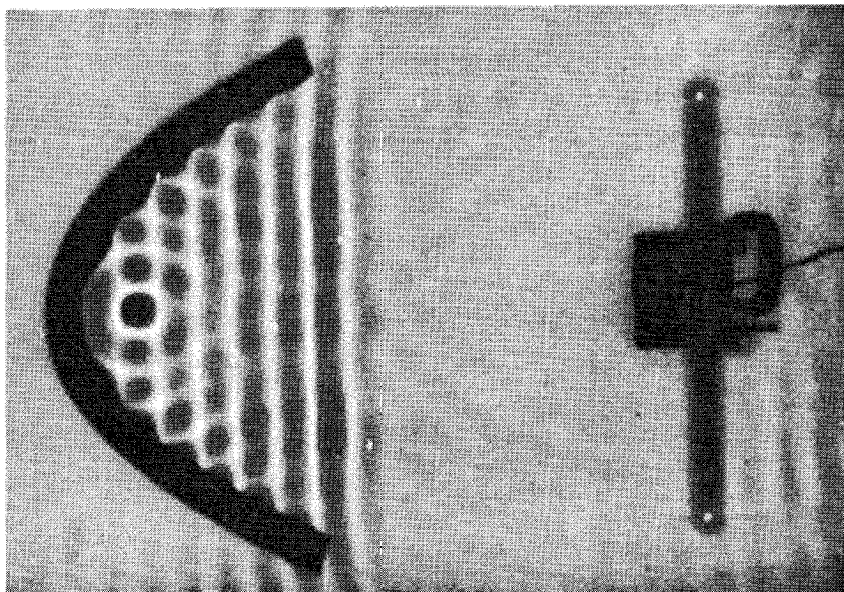
است که در آن $h = -2$ ، $k = 1$ ، و $p = 3$. پس رأس، $V(-2, 1)$ است. محور سهمی خط $y = 1$ یا $y = k$ است. سهمی روبه راست باز می شود زیرا برای اینکه y حقیقی باشد، x باید در نابرابری $0 \leq (x+2)$ یا $x \geq -2$ صدق کند. کانون به فاصله ۳ واحد در طرف راست رأس $(-2, 1)$ ، یعنی در نقطه $F(1, 1)$ است. هادی خطی است موازی با محور y که به فاصله p واحد در سمت چپ رأس $(-2, 1)$ واقع است. چون $p = 3$ ، هادی خط $x = -5$ است. شکل ۱۳.۸ را ببینید.

$$y^2 - 2y - 12x - 23 = 0, \\ \text{یا} \\ (y-1)^2 = 12(x+2)$$



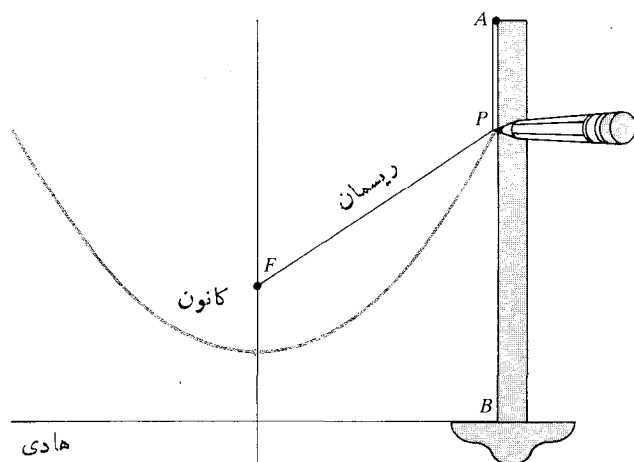
$$y^2 - 2y - 12x - 23 = 0 \quad \text{سهمی ۱۳.۸}$$

مذکور در مثال ۴.



بکشید، و کانون، رأس و هادی اش را مشخص کنید.

۱. $V(0, 0), F(0, 2)$
۲. $V(0, 0), F(-2, 0)$
۳. $V(0, 0), F(0, -4)$
۴. $V(0, 0), F(4, 0)$
۵. $V(-2, 3), F(-2, 4)$
۶. $V(0, 3), F(-1, 3)$
۷. $V(-3, 1), F(0, 1)$
۸. $V(1, 3), F(1, 0)$



۱۵۰۸ نحوه استفاده کپلر از رسمان برای رسم سهمی.

در هر يك از مسائل ۹-۱۴، رأس و هادی يك سهمی داده شده‌اند. معادله سهمی و مختصات کانونش را بیابید. سپس سهمی را بکشید، و کانون، رأس، و هادی اش را مشخص کنید.

۹. $V(2, 0)$ ، محور y
۱۰. $V(1, -2)$ ، محور x
۱۱. $V(-3, 1)$ ، خط $x = 1$
۱۲. $V(-2, -2)$ ، خط $y = -3$
۱۳. $V(0, 1)$ ، خط $x = -1$
۱۴. $V(0, 1)$ ، خط $y = 2$

در مسائل ۱۵-۲۶، رأس، محور، کانون، و هادی سهمی مفروض

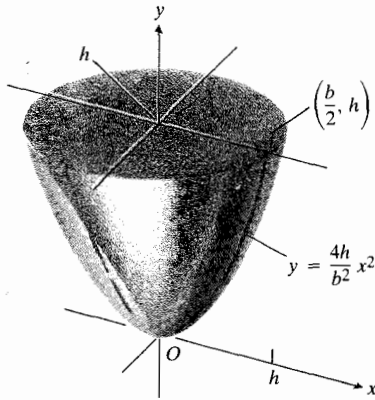
کاربرد

سطح مسایع در يك استوانه قائم که با آهنگ ثابت می‌چرخد، سهمی‌شکل است. اما، کوششهایی که برای ساختن تلسکوپ از دوران دادن جیوه به عمل آمده ناموفق بوده است، زیرا بدون حرکت نگاه داشتن سطح به‌طوری‌کس و واقعاً صاف باشد مشکلاتی دارد.

مسأله‌ها

در هر يك از مسائل ۱-۸ رأس V و کانون F يك سهمی داده شده‌اند. معادلات سهمی و هادی آن را بیابید. سپس سهمی را

۳۱. فرمول ازشمیدس در مورد حجم يك جسم سهموی. ناحیه محدود به سهمی $y = (4h/b^2)x^2$ و خط $y = h$ را حول محور y دوران می دهیم تا جسمی به دست آید. نشان دهید که حجم این جسم $3/2$ برابر حجم مخروط محاطی است. شکل ۱۷۰۸ را ببینید.



۱۷۰۸ مخروط و جسم سهموی مذکور در
مسألة ۳۱.

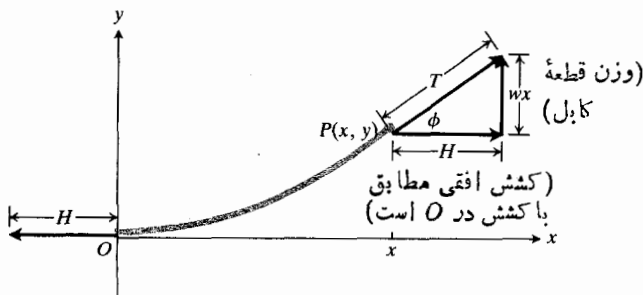
۳۲. کابل پل معلق. شرط تعادل برای قطعه OP از کابلی که وزن یکنواخت w کیلو گرم بر متر، در امتداد افق، را تحمل می کند (شکل ۱۸۰۸) عبارت است از

$$\frac{dy}{dx} = \tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{T \sin \phi}{T \cos \phi} = \frac{wx}{H}$$

یا

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{w}{H}\right)x$$

که در آن مبدأ O در پایینترین نقطه کابل انتخاب شده است، و H کشش افقی در O است. نشان دهید که کابل به صورت يك سهمی آویزان می شود. (به همین دلیل، کابل های اصلی پل های معلق را به شکل سهمی در نظر می گیرند. کابلها و زنجیرهایی که «آزادانه» از دو انتها



۱۸۰۸ قطعه کابل در مسألة ۳۲.

را بیابید. سپس سهمی را رسم کنید، و این مشخصات را روی شکل نشان دهید.

۱۵. $y^2 = 8x$

۱۶. $y^2 = -36x$

۱۷. $x^2 = 100y$

۱۸. $x^2 = -9y$

۱۹. $x^2 - 2x + 8y - 7 = 0$

۲۰. $x^2 + 8x - 2y + 4 = 0$

۲۱. $y^2 + 4x - 8 = 0$

۲۲. $x^2 + 8y - 4 = 0$

۲۳. $x^2 + 2x - 4y - 3 = 0$

۲۴. $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$

۲۵. $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

۲۶. $y^2 + 6y + 2x + 5 = 0$

۲۷. چه نواحی از صفحه در نا برابرهای $y^2 < x$ و $y^2 > x$ صدق می کنند؟ شکل بکشید.

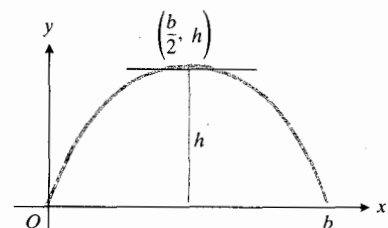
۲۸. چه نواحی از صفحه در نا برابرهای $x^2 < 8y$ و $x^2 > 8y$ صدق می کنند؟ شکل بکشید.

۲۹. نشان دهید که مماسهایی که از هر نقطه خط $x = -p$ بر خم $y^2 = 4px$ رسم شوند برهم عمودند.

۳۰. فرمول ازشمیدس در مورد مساحت ناحیه محدود به یک طاق سهموی.

الف) معادله طاق سهموی شکل ۱۶۰۸ را که قاعده آن b و ارتفاع آن h است، بیابید.

ب) نشان دهید که مساحت ناحیه محصور بین این طاق و محور x عبارت است از $(2/3)bh$.



۱۶۰۸ طاق سهموی مذکور در مسألة ۳۰.

باشند، و مجموع فاصله‌ها، $PF_1 + PF_2$ ، با $2a$ نمایش داده شود، آنگاه مختصات نقطه‌ای چون $P(x, y)$ واقع بر بیضی در معادله زیر صدق می‌کنند (شکل ۱۹۰۸)

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

برای ساده کردن این معادله، رادیکال دوم را به سمت راست معادله می‌بریم، رابطه حاصل را دوبار به توان دو می‌رسانیم، و پس از ساده کردن نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (1)$$

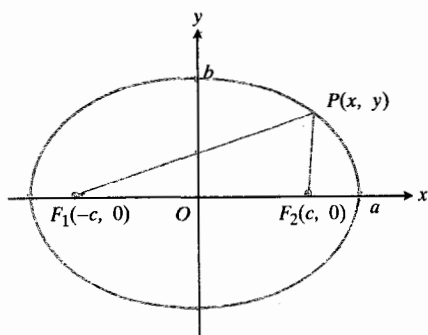
چون مجموع دو ضلع مثلث $F_1 F_2 P$ ، $PF_1 + PF_2 = 2a$ ، از ضلع سوم، $F_1 F_2 = 2c$ ، بزرگتر است، عبارت $(a^2 - c^2)$ در (۱) مثبت است، و ریشه دوم حقیقی مثبتی دارد که با b نمایش داده می‌شود

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}. \quad (2)$$

پس (۱) به صورت فشرده‌تر زیر درمی‌آید

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

معادله (۳) نشان می‌دهد که این خم نسبت به هر دو محور متقارن است، و داخل مستطیلی با اضلاع $x = -a$ ، $x = a$ ، $y = -b$ ، $y = b$ قرار دارد. نقاط تقاطع این خم با محورها عبارت‌اند از $(\pm a, 0)$ و $(0, \pm b)$. خم، هر یک از محورها



۱۹۰۸ بیضی نشان داده شده در شکل با معادله زیر تعریف می‌شود

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

همان گونه که در متن ملاحظه می‌شود، این معادله به معادله زیر می‌انجامد

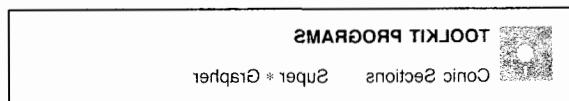
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

آویزان شوند، و هیچ بار اضافی نداشته باشند به شکل خمی موسوم به خم ذنجیری درمی‌آیند که در بخش ۳۰۹ مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

۳۳. رسم مماس بر سهمی. نشان دهید که مماس بر سهمی $y^2 = 4px$ در $P_1(x_1, y_1)$ ، محور تقارن سهمی را در نقطه‌ای قطع می‌کند که به فاصله x_1 واحد در سمت چپ رأس آن است. از اینجا راه ساده‌ای برای رسم مماس بر سهمی در هر نقطه بجز رأس (که در اینجا محور y بر سهمی مماس است) به دست می‌آید: نقطه تماس P را بر سهمی مشخص کنید. از آن نقطه خطی بر محور x عمود کنید، به اندازه $2x_1$ واحد به چپ بروید، نقطه حاصل را علامتگذاری کنید، و بالاخره آن نقطه را به P وصل کنید.

۳۴. ویژگی بازتابندگی سهمی.

الف) نشان دهید که زوایای α و β در شکل ۱۴۰۸ برابرند (دانهمایی: محل تقاطع خط مماس L و محور x را بیابید. خط L و محور x چه زاویه‌ای تشکیل می‌دهند؟)
ب) فرض کنید وقتی یک پرتو نور به یک آینه می‌تابد، زاویه تابش و زاویه بازتاب برابر باشند. اگر یک سهمی را حول محورش دوران دهیم، و با نقره اندود کردن رویه حاصل آینه‌ای بسازیم، نشان دهید هر پرتو نوری که از کانون سهمی ساطع شود، موازی با محور سهمی از آن خارج می‌شود.



۴۰۸ بیضی

در این بخش معادله بیضی و اقبع در صفحه مختصات را به دست می‌آوریم، و چگونگی یافتن ابعاد و کانونهای بیضی را با استفاده از معادله آن نشان می‌دهیم. همچنین عددی موسوم به خروج از مرکز بیضی را معرفی می‌کنیم که میزان کشیدگی بیضی را مشخص می‌کند. از این عدد برای توصیف شکل مدارهای بیضوی سیارات و ستارگان دنباله‌داری که حول خورشید می‌چرخند و ماهواره‌هایی که حول زمین می‌چرخند استفاده می‌شود.

تعریف

بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل هر یک از آنها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه مقدار ثابتی باشد.

معادله بیضی

اگر دو نقطه ثابت، به نام کانونها، نقاط $F_1(-c, 0)$ و $F_2(c, 0)$

با جمع کردن این دو می بینیم که مقدار $PF_1 + PF_2$ به ازای هر موضع P روی خم، برابر با $2a$ است. پس ویژگی هندسی و معادله جبری فوق هم ارزند.

محورها

در معادله (۳)، $b^2 = a^2 - c^2$ از a^2 کمتر است. قطر بزرگ بیضی پاره خط به طول $2a$ بین نقاط تقاطع بیضی با محور x ، $(\pm a, 0)$ ، است. قطر کوچک آن پاره خط به طول $2b$ بین نقاط تقاطع بیضی با محور y ، $(0, \pm b)$ ، است. عدد a را نصف [طول] قطر بزرگ و عدد b را نصف [طول] قطر کوچک می نامند. اگر $a = 4$ ، $b = 3$ ، $c = 5$ ، آنگاه معادله (۳) به صورت زیر درمی آید

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1. \quad (۴ \text{ الف})$$

اگر در (۴ الف) جای x و y را باهم عوض کنیم، معادله

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (۴ ب)$$

را به دست می آوریم که يك بیضی را نشان می دهد که قطر بزرگش به جای اینکه افقی باشد، قائم است. شکل ۲۰۰۸ را ببینید.

در تحلیل معادلاتی نظیر (۴ الف) و (۴ ب) دلیلی برای سردرگمی وجود ندارد. کافی است نقاط تقاطع با محوره های تقارن را بیابیم و از این راه می توانیم امتداد قطر بزرگ را معلوم کنیم، زیرا این قطر بزرگترین دو قطر است. کانونها همواره بر قطر بزرگ قرار دارند.

اگر از حروف a ، b ، c به ترتیب برای نمایش نصف قطر بزرگ، نصف قطر کوچک، و نصف فاصله بین کانونها استفاده

را به زاویه 90° قطع می کند، زیرا شیب

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2y}$$

در $x = \pm a$ ، $y = 0$ برابر با صفر، و در $y = \pm b$ ، $x = 0$ برابر با بینهایت است.

نشان داده ایم که مختصات P در (۱) صدق می کنند، هرگاه P در شرط هندسی $PF_1 + PF_2 = 2a$ صدق کند. حال عکس این مطلب را ثابت می کنیم. فرض کنید x و y در (۱) با شرط $0 < c < a$ صدق کنند. آنگاه

$$y^2 = (a^2 - c^2) \frac{a^2 - x^2}{a^2}.$$

اگر این مقدار را در رادیکالهای زیر قرار دهیم، داریم

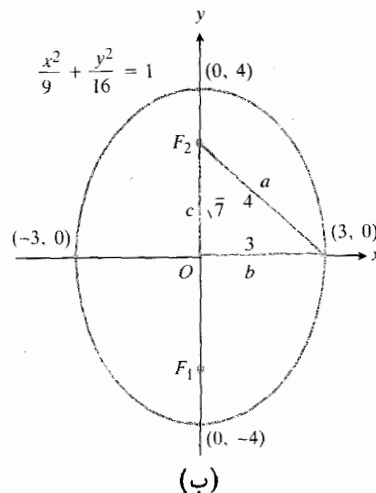
$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \left| a + \frac{c}{a}x \right| \quad (۴ الف)$$

و

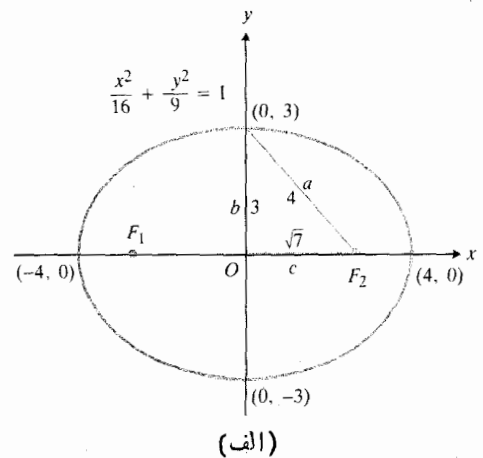
$$PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left| a - \frac{c}{a}x \right| \quad (۴ ب)$$

چون x به سازه $-a \leq x \leq a$ محدود می شود، مقدار $(c/a)x$ بین $-c$ و c قرار می گیرد، و لذا هم $a + (c/a)x$ مثبت است و هم $a - (c/a)x$ ، چون که هر دو بین $a - c$ و $a + c$ هستند. پس قدرمطلقهای موجود در (۴ الف) و (۴ ب) را می توان حذف کرد

$$PF_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad PF_2 = a - \frac{c}{a}x. \quad (۵)$$



(ب)



(الف)

۲۰۰۸ (الف) قطر بزرگ

$$(x^2/16) + (y^2/9) = 1$$

افقی است. (ب) قطر بزرگ

$$(x^2/9) + (y^2/16) = 1$$

قائم است.

تا رابطه

$$9(x^2 + 4x) + 4(y^2 - 2y) = -4$$

حاصل شود. حال اگر هر يك از پرانتزها را به صورت مربع كامل درآوریم، داریم

$$9(x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = -4 + 36 + 4.$$

دو طرف را بر ۳۶ بخش می کنیم تا معادله به صورت متعارف زیر درآید

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

چون $9 > 4$ ، این همان معادله (۹) با ضوابط $a=3$ ، $b=2$ ، $h=-2$ ، $k=1$ است. مرکز این بیضی نقطه $(h, k) = (-2, 1)$ است

مرکز: $(-2, 1)$

رأسها نقاط $(h, k \pm a) = (-2, 1 \pm 3)$ اند.

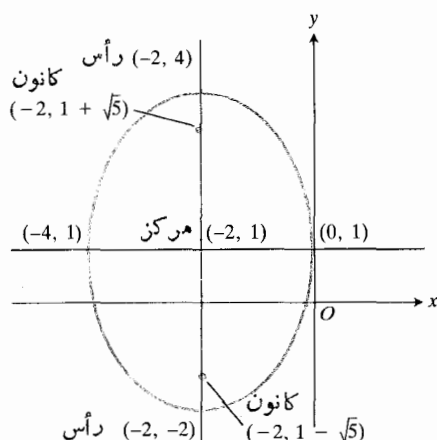
رأسها: $(-2, 4)$ و $(-2, -2)$

کانونها عبارت اند از نقاط

$$(h, k \pm \sqrt{a^2 - b^2}) = (-2, 1 \pm \sqrt{9 - 4}) \\ = (-2, 1 \pm \sqrt{5})$$

کانونها: $(-2, 1 + \sqrt{5})$ و $(-2, 1 - \sqrt{5})$

شکل ۲۱۰۸ را ببینید.



۲۱۰۸ بیضی $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$

خروج از مرکز

برای بحث دقیقتر درباره ویژگیهای بیضی، فرض می کنیم که

کنیم، از معادله (۲) درمی یابیم که

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{یا} \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad (۷)$$

پس a وتر يك مثلث قائم السزاویه است كه دوضلع دیگرش b و c اند؛ شكل ۲۰۸ را ببینید. وقتی با معادله ای نظیر (۶ الف) یا (۶ ب) آغاز می کنیم، بلافاصله می توانیم a^2 و b^2 را بیابیم. سپس اختلاف آنها را می یابیم و از معادله (۷)، c^2 را تعیین می کنیم. پس در هر يك از معادلات (۶ الف) و (۶ ب) داریم

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7.$$

بنابراین، کانونها به فاصله $c = \sqrt{7}$ واحد از مرکز بیضی واقع اند.

وقتی مرکز در مبدأ نباشد

مرکز بیضی محل تقاطع اقطار آن است. در زیر، فهرست معادلات متعارف بیضیهایی که اقطارشان موازی با محورهای مختصات هستند و مرکزشان در نقطه (h, k) قرار دارد، آمده است.

معادلات متعارف بیضیهایی که مرکزشان (h, k) است و اقطارشان با محورهای مختصات موازی اند

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (۸) \quad \text{(قطر بزرگ، افقی)}$$

کانونها: $(h \pm \sqrt{a^2 - b^2}, k)$ رأسها: $(h \pm a, k)$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad (۹) \quad \text{(قطر بزرگ، قائم)}$$

کانونها: $(h, k \pm \sqrt{a^2 - b^2})$ رأسها: $(h, k \pm a)$

در هر حالت، a نصف قطر بزرگ، و b نصف قطر كوچك است.

معادلات (۸) و (۹) با استفاده از انتقال $x' = x - h$ ، $y' = y - k$ و با ملاحظه این امر که معادلات حاصل بر حسب مختصات پریم دار به صورت زیرند، به دست می آیند

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

مثال ۱ مرکز، رأسها، و کانونهای بیضی زیر را بیابید

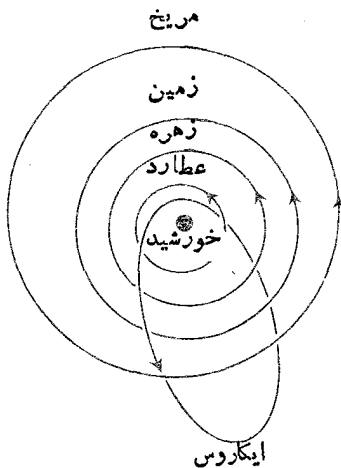
$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0.$$

حل: x ها را با هم و y ها را با هم در نظر می گیریم

است. اما، پلوتون با $e = 0.25$ ، و عطارد با $e = 0.21$ ، مسداری تقریباً بیضوی دارند. مدار سیارات دیگر منظومه شمسی از این دو مدار هم کشیده ترند. ایکاروس، اخترواری است که حدوداً ۱ مایل قطر دارد و در هر ۴۰۹ روز (به مقیاس روزهای زمین) یک بار دور خورشید می چرخد. خروج از مرکز این اختروار ۰.۸۳ است (شکل ۲۳.۸).

جدول ۱۰.۸ خروج از مرکزهای مدارهای سیارات

| | | | |
|-------|------|---------|-------|
| عطارد | ۰.۲۱ | زحل | ۰.۰۵۶ |
| زهره | ۰.۰۱ | اورانوس | ۰.۰۵ |
| زمین | ۰.۰۲ | نپتون | ۰.۰۱ |
| مریخ | ۰.۰۹ | پلوتون | ۰.۲۵ |
| مشتری | ۰.۰۵ | | |



۲۳.۸ مدار اختروار ایکاروس.

مثال ۲ مدار ستاره دنباله دار کوهورتک^۱ (شکل ۲۲.۸) تقریباً ۴۲ واحد نجومی پهنا و ۳۶۰۰ واحد نجومی درازا دارد. (یک واحد نجومی (AU) برابر است با نصف قطر بزرگ مدار زمین، یعنی تقریباً ۹۲۶۰۰۰۰۰ مایل). خروج از مرکز مدار آن را بیابید.

حل:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{(1800)^2 - (22)^2}}{1800} \approx 0.9999.$$

معادله اش به صورت زیر نوشته شده باشد

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0. \quad (10)$$

هر چند c ، فاصله مرکز بیضی تا هر یک از کانونها، در این معادله به چشم نمی خورد، ولی c را می توان از معادله زیر به دست آورد

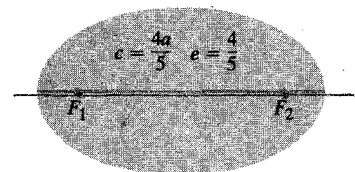
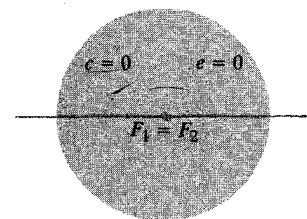
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (11)$$

اگر a را ثابت نگه داریم و فاصله کانونی c را در بازه $0 \leq c \leq a$ تغییر دهیم، شکل بیضیهای حاصل تغییر خواهد کرد. وقتی $c = 0$ (یعنی $a = b$) این بیضیها مستدیر هستند و وقتی به مقدار c افزوده شود، بیضی کشیده تر می شود، تا اینکه در حالت نهایی، $c = a$ ، «بیضی» به صورت پاره خط $F_1 F_2$ درمی آید که دو کانون را به هم می پیوندد (شکل ۲۲.۸). نسبت

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (12)$$

را خروج از مرکز بیضی می نامند؛ این عدد از ۰ تا ۱ تغییر می کند و میزان اختلاف شکل بیضی با دایره را نشان می دهد.

سیارات منظومه شمسی در مدارهایی بیضوی که خورشید در یکی از کانونهای آنها واقع است، حول خورشید می گردند. بیشتر سیارات، از جمله زمین، مداری تقریباً مستدیر دارند. خروج از مرکز چند سیاره که در جدول ۱۰.۸ دیده می شود مؤید این مطلب



$$F_1 \quad c=a \quad e=1 \quad F_2$$

۲۲.۸ خروج از مرکز بیضی، شکل آن را توصیف می کند.

مسافراقیانوس منجمد جنوبی، اخترشناس، مشاور استحکامات، مؤسس و مدیر شرکت، استاد ادبیات کلاسیک، و بالاخره، ریاضیدانی بود که برای نشر کتاب پرینکپیا [اصول]، اثر نیوتن، سرمایه گذاری کرد و از نظریه نیوتن برای محاسبه مدار ستاره دنباله دار بزرگ ۱۶۸۲ استفاده نمود. چون بازگشت بعدی این ستاره طبق پیش بینی هالی در ۱۸۵۱ اتفاق افتاد، از این زمان به بعد آن را ستاره دنباله دار هالی نامیدند.

آخرین باری که ستاره دنباله دار هالی خورشید را دور زد، در زمستان و بهار ۱۹۸۵-۱۹۸۶ بود؛ تاریخ بازگشت بعدی این ستاره سال ۲۰۶۲ است. نخستین مسدود موجود درباره این ستاره مربوط است به سال ۲۴۰ قبل از میلاد که از آن تاریخ تا به حال ۳۵ بار خورشید را دور زده است. مطالعات اخیر حاکی است که دنباله دار هالی تاکنون تقریباً ۲۰۰۰ بار خورشید را دور زده است، و قبل از اینکه خورشید کاملاً از میان برود، ۲۰۰۰ بار دیگر هم آن را دور خواهد زد.

مدار دنباله دار هالی يك بیضی به درازای 18 AU و پهنای 9.12 AU است. پس خروج از مرکزش عبارت است از

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{(18.09)^2 - (9.12)^2}}{18.09} \approx 0.97.$$

رده بندی مقاطع مخروطی بر حسب خروج از مرکز

سه می یک کانون و یک هادی دارد، در حالی که بیضی دارای دو کانون و دو هادی است. هادیها دو خط عمود بر قطر بزرگ بیضی هستند که فاصله شان از مرکز بیضی $\pm a/e$ است. ویژگی مهمی این است که به ازای هر نقطه P روی آن،

$$PF = 1 \cdot PD \quad (13)$$

که در آن F کانون، و D نزدیکترین نقطه هادی به P است. در مورد بیضی به آسانی می توان نشان داد که دو معادله زیر جای معادله (۱۳) را می گیرند

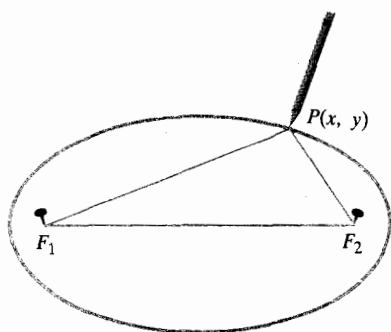
$$PF_1 = e \cdot PD_1, \quad PF_2 = e \cdot PD_2. \quad (14)$$

در اینجا e خروج از مرکز، P نقطه دلخواهی از بیضی، F_1 و F_2 کانونها، و D_1 و D_2 نزدیکترین نقاط هادیها به P هستند. در معادله (۱۴)، هادی و کانون باید متناظر باشند به این معنا که اگر فاصله P تا کانون F_1 را در نظر می گیریم، باید فاصله P تا هادی واقع در همان طرف بیضی را هم در نظر بگیریم (شکل ۲۵.۸ را ببینید). لذا هادی $x = -a/e$ را با کانون $F_1(-c, 0)$ و هادی $x = a/e$ را با کانون $F_2(c, 0)$ در تناظر قرار می دهیم. اگر a نصف قطر بزرگ و $e < 1$ خروج از مرکز باشد، وقتی در امتداد

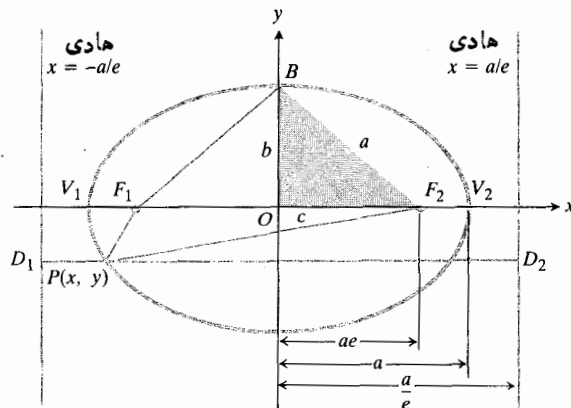
۲۴.۸ در اینجا مدار ستاره دنباله دار کوهورتک تقریباً با مقیاس دقیق رسم شده است. دایره کوچک حد نهایی مدار پلوتون را نشان می دهد.

ستاره دنباله دار هالی

ادموند هالی انگلیسی، زیست شناس، زمین شناس، ناخدا، جاسوس،



۲۶۰۸ شیوه رسم يك بیضی.



$$۲۵۰۸ \text{ بیضی } 1 = (x^2/a^2) + (y^2/b^2)$$

قطر بزرگ از مرکز دور می‌شویم به ترتیب سه موارد زیر برمی‌خوریم:

يك كانون به فاصله ae از مرکز

يك رأس به فاصله a از مرکز

يك هادی به فاصله a/e از مرکز.

ویژگی «کانون-به-هادی»، سهمی، بیضی و هذلولی را به روش زیر تحت لوای واحدی درمی‌آورد (بخش بعد). فرض کنید که فاصله PF یعنی فاصله P تا يك نقطه ثابت F (کانون)، با حاصلضرب مقداری ثابت در فاصله P تا يك خط ثابت (هادی) برابر باشد، یعنی

$$PF = e \cdot PD \quad (۱۵)$$

که در آن e ثابت تناسب است. در این صورت مسیری که P می‌پیماید الف) يك سهمی است، هرگاه $e = ۱$ ،

ب) يك بیضی با خروج از مرکز e است هرگاه $e < ۱$ ، و

پ) يك هذلولی با خروج از مرکز e است هرگاه $e > ۱$. همان گونه که مشاهده می‌شود سهمی حالت بسیار خاصی است.

ترسیم

سرعت‌ترین راه رسم يك بیضی از به کار بردن مستقیم تعریف آن به دست می‌آید. دوسر ریسمانی را گره می‌زنیم، از يك مداد و دومین ثابت F_1 و F_2 استفاده می‌کنیم و طبق شکل ۲۶۰۸، مداد را به ریسمان تکیه می‌دهیم و خم را رسم می‌کنیم. این خم بیضی است زیرا $PF_1 + PF_2$ مقداری ثابت است (این مقدار ثابت برابر است با طول ریسمان منهای فاصله بین میخها).

کاربرد

از شکل بیضی در سال هواپیما، و گاه در طراحی چرخ زنجیر

دو چرخه‌های مسابقه استفاده می‌شود. دستگاه‌های استریو غالباً سوزنهای بیضی دارند. مقاطع لوله‌های آب گاه به شکل بیضی طراحی می‌شوند، تا هنگام یخ‌زدن آب لوله‌ها بتوانند بدون شکسته شدن منبسط شوند. در دستگاه‌های مورد استفاده در تونل‌های بادی برای مطالعه صدای هواپیما نیز بیضی ظاهر می‌شود (صدای موجود در يك کانون را می‌توان در کانون دیگر شنید، حال آنکه در بقیه جاها صدا نسبتاً خفیف است). مکانیسم چکاندن در بعضی از لیزرها بیضی است. برخورد موج آب دریا به سنگ‌های موجود در ساحل آنها را رفته رفته به صورت بیضی درمی‌آورد. در بحث تشکیل فسیل نیز شکل بیضی مطرح است.

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۴، مطلوب است معادله بیضی که مرکز آن C ، کانون آن F ، و نصف قطر بزرگ آن a باشد. سپس خروج از مرکز را محاسبه و بیضی را رسم کنید.

$$۱. \quad C(0, 0), \quad F(0, 2), \quad a = 4$$

$$۲. \quad C(0, 0), \quad F(-3, 0), \quad a = 5$$

$$۳. \quad C(0, 2), \quad F(0, 0), \quad a = 3$$

$$۴. \quad C(-3, 0), \quad F(-3, -2), \quad a = 4$$

مرکز، رأسها، و کانونهای بیضیهای مسائل ۵-۱۸ را بیابید.

$$۵. \quad \frac{(x-7)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

$$۶. \quad \frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$$۷. \quad \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1$$

$$۰.۲۶ (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + 9y^2 - 9) \leq 0$$

۰.۲۷ يك بیضی با خروج از مرکز ۴/۵ رسم کنید.

۰.۲۸ مدار پلوتون را با مقیاس رسم کنید.

۰.۲۹ ستاره دنباله دار هالی.

الف) معادله مدار ستاره دنباله دار هالی را نسبت به دستگاه مختصاتی بنویسید که در آن خورشید در مبدأ قرار دارد، کانون دیگر بر بخش مثبت محور x واقع است، و مقیاس بر حسب واحد نجومی است.

ب) این ستاره بر حسب واحد نجومی چقدر به خورشید نزدیک می شود؟ بر حسب مایل چقدر؟
پ) این ستاره بر حسب واحد نجومی حداکثر چقدر از خورشید دور می شود؟ بر حسب مایل چقدر؟

۰.۳۰ مطلوب است ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت که بتواند درون بیضی $4 = x^2 + 4y^2$ جا گیرد و اضلاعش با محورهای مختصات موازی باشند. مساحت این مستطیل چقدر است؟

۰.۳۱ مرکز جرم ورق همگن نازکی را بیابید که از پایین به محور x ، و از بالا به بیضی $1 = (x^2/9) + (y^2/16)$ محدود باشد.

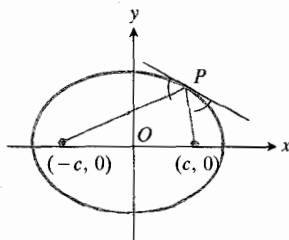
۰.۳۲ مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به بیضی $1 = (x^2/4) + (y^2/9)$ حول (الف) محور x ، (ب) محور y .

۰.۳۳ به ازای چه مقادیر ثابت a ، b ، و c بیضی

$$4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

در مبدأ بر محور x مماس است و از نقطه $(-1, 2)$ می گذرد؟

۰.۳۴ ویژگی بازتابندگی بیضی. بیضیوار از دوران بیضی حول قطر بزرگش پدید می آید. آینه را با نقره اندود کردن درون رویه بیضیوار می سازند. نشان دهید پرتویی از نور که از یکی از کانونها ساطع شود به کانون دیگر بازمی تابد. امواج صوتی هم این مسیر را طی می کنند، و از این ویژگی بیضیوار برای ساختن برخی از تالارهای هنری استفاده می کنند. (داهنمایی: مطابق شکل ۲۷۰۸ بیضی را در وضع متعارف قرار دهید، و نشان دهید که خطوط



۲۷۰۸ بیضی مذکور درمسأله ۳۴.

$$۰.۸ \frac{(x-8)^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1$$

$$۰.۹ 25(x-3)^2 + 4(y-1)^2 = 100$$

$$۰.۱۰ 9(x-4)^2 + 16(y-3)^2 = 144$$

$$۰.۱۱ x^2 + 10x + 25y^2 = 0$$

$$۰.۱۲ x^2 + 16y^2 + 96y + 128 = 0$$

$$۰.۱۳ x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 4 = 0$$

$$۰.۱۴ 4x^2 + y^2 - 32x + 16y + 124 = 0$$

$$۰.۱۵ 2x^2 + y^2 - 16x + 4y + 16 = 0$$

$$۰.۱۶ x^2 + 4y^2 + 2x + 8y + 1 = 0$$

$$۰.۱۷ 9x^2 + 16y^2 + 18x - 96y + 9 = 0$$

$$۰.۱۸ 25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$$

۰.۱۹ بیضیهای زیر را رسم کنید.

$$\text{الف) } 9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\text{ب) } 4x^2 + 9y^2 = 144$$

$$\text{پ) } \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$$\text{ت) } 4x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{ث) } 16(x-2)^2 + 9(y+3)^2 = 144$$

۰.۲۰ مطلوب است معادله بیضی گذرنده از مبدأ با کانونهای $(-1, 1)$ و $(1, 1)$.

۰.۲۱ نقاط انتهایی قطرهای بزرگ و کوچک يك بیضی عبارت اند از $(1, 1)$ ، $(3, 4)$ ، $(1, 7)$ ، و $(-1, 4)$. بیضی را رسم کنید، معادله آن را بیابید، و کانونهایش را پیدا کنید.

۰.۲۲ خروج از مرکز يك بیضی $2/3$ است، خط $x = 9$ یکی از هادیها، و نقطه $(4, 0)$ کانون متناظر آن هادی است. معادله ای برای این بیضی بیابید.

در هر يك از مسائل ۲۳-۲۶، شکل ناحیه ای را رسم کنید که مختصات نقاطش در نابرابری یا نابرابریهای داده شده صدق کنند.

$$۰.۲۳ 9x^2 + 16y^2 \leq 144$$

$$۰.۲۴ 4x^2 + y^2 \leq 4 \text{ و } x^2 + y^2 \geq 1$$

$$۰.۲۵ 4x^2 + 9y^2 \leq 36 \text{ و } x^2 + 4y^2 \geq 4$$

معادله دوم نظیر معادله اول است، با این تفاوت که به جای $2a$ ، $2a$ قرار گرفته است. پس در اولی می نویسیم $2a \pm 0$ یکی از رادیکالها را به طرف راست معادله منتقل، دو طرف را مجذور، و نتیجه را ساده می کنیم. باز یک رادیکال باقی خواهد ماند آن را در یک طرف تنها نگه می داریم، و نتیجه را باز هم مجذور می کنیم و سرانجام به معادله زیر دست می یابیم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (1)$$

تا اینجا، معادله (۱) کاملاً شبیه معادله بیضی است. اما در این حالت $a^2 - c^2$ منفی است زیرا تفاضل دو ضلع مثلث $F_1 F_2 P$ از ضلع سوم کوچکتر است

$$2a < 2c.$$

لذا در این حالت $c^2 - a^2$ مثبت است و یک ریشه دوم حقیقی مثبت دارد که آن را با b نمایش می دهیم

$$a^2 - c^2 = -b^2 \quad \text{یا} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (2)$$

پس معادله هذلولی به صورت زیر است

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

که شبیه معادله بیضی است. اختلاف آنها تنها در علامت منهای (-) موجود در معادله هذلولی و رابطه جدید بین a ، b ، و c و مذکور در معادله (۲) است.

هذلولی هم مانند بیضی نسبت به هر دو محور و نسبت به مبدأ متقارن است، اما با محور y تقاطعی ندارد. در واقع، هیچ بخشی از خم بین خطوط $x = a$ و $x = -a$ قرار نمی گیرد. اگر با یک نقطه $P(x, y)$ که مختصاتش در معادله (۳) صدق می کنند، آغاز کنیم، می بینیم که مانند حالت بیضی فاصله های PF_1 و PF_2 از

$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \left| a + \frac{c}{a}x \right| \quad (\text{الف } 4)$$

$$PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left| a - \frac{c}{a}x \right| \quad (\text{ب } 4)$$

به دست می آیند. اما در اینجا c از a بزرگتر است، و P یا در سمت راست خط $x = a$ قرار می گیرد، یعنی $x > a$ ، یا در سمت چپ خط $x = -a$ واقع می شود، یعنی $x < -a$. قدرمطلقهای موجود در معادلات (۴) را می توان چنین از میان

گذرنده از نقطه P واقع بر بیضی و دو کانون آن بسا خط مماس بر بیضی در P زوایای برابر تشکیل می دهند.



TOOLKIT PROGRAMS

Conic Sections Super * Grapher

۵.۸ هذلولی

در این بخش معادله هذلولی واقع در صفحه مختصات را به دست می آوریم، و نشان می دهیم که چگونه می توان کانونها و مجانبهای هذلولی را مستقیماً از این معادله به دست آورد.

تعریف

هذلولی مجموعه نقاطی از صفحه است که تفاضل فواصل هر یک از آنها از دو نقطه ثابت در صفحه مقدار ثابتی باشد.

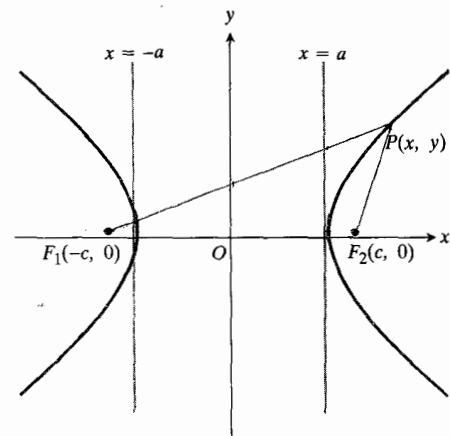
معادله هذلولی

اگر دو نقطه ثابت موسوم به کانونها را در $F_1(-c, 0)$ و $F_2(c, 0)$ بگیریم و مقدار ثابت را $2a$ فرض کنیم (شکل ۲۸.۸ را ببینید)، آنگاه نقطه ای چون $P(x, y)$ بر هذلولی واقع است اگر و تنها اگر

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

یا

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$



۲۸.۸ هذلولی دوشاخه دارد. در مورد نقاط واقع بر شاخه راست این شکل داریم $PF_1 - PF_2 = 2a$ و در مورد نقاط واقع بر شاخه چپ داریم $PF_2 - PF_1 = 2a$.

می‌شوند، و عبارت سمت راست (۶ الف) به صفر نزدیک می‌شود. پس، طرف چپ هم باید همین وضع را پیدا کند. در نتیجه

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) = 0 \quad (۶ ب)$$

که منجر می‌شود به اینکه فکر کنیم خط

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{یا} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad (۷)$$

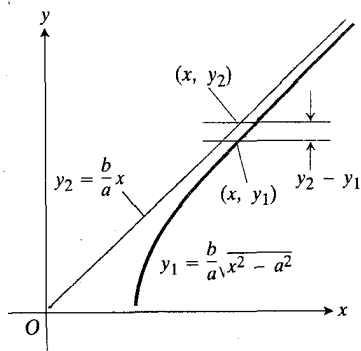
ممکن است مجانبی برای خم باشد. برای اینکه ببینیم آیا واقعاً چنین است، به بررسی فاصله قائم بین این خط و خم

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

می‌پردازیم (شکل ۲۹.۸). وقتی $x \rightarrow \infty$ ، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \right) &= b \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) \\ &= b \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \quad (۸) \\ &= b \cdot 0 \quad (\text{بنا به رابطه ۶ ب}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

چون فاصله قائم بین خط و هذلولی وقتی $x \rightarrow \infty$ به صفر میل می‌کند، فاصله عمودی بین نقاط هذلولی و خط $y = (b/a)x$ نیز به صفر میل می‌کند. بنابراین، خط $y = (b/a)x$ مجانب هذلولی است.



۲۹.۸ وقتی $x \rightarrow \infty$ ، نقطه (x, y_1) روی هذلولی صعود می‌کند، و به طرف مجانب $y_2 = (b/a)x$ می‌رود.

$$\left. \begin{aligned} PF_1 &= a + \frac{c}{a}x \\ PF_2 &= \frac{c}{a}x - a \end{aligned} \right\} \text{ اگر } x > a \quad (۵ الف)$$

و

$$\left. \begin{aligned} PF_1 &= -\left(a + \frac{c}{a}x\right) \\ PF_2 &= a - \frac{c}{a}x \end{aligned} \right\} \text{ اگر } x < -a \quad (۵ ب)$$

پس، وقتی P در سمت راست خط $x = a$ قرار داشته باشد، $PF_1 - PF_2 = 2a$ ، حال آنکه اگر P در سمت چپ $x = -a$ واقع باشد، $PF_2 - PF_1 = 2a$ (شکل ۲۸.۸). در هر حالت، هر نقطه P که در شرایط هندسی صدق کند، باید در معادله (۳) نیز صدق کند. برعکس، هر نقطه‌ای که در معادله (۳) صدق کند، شرایط هندسی را نیز برمی‌آورد.

مجانبها

همان گونه که در فصل ۳ دیدیم، ممکن است وقتی نقطه‌ای چون P واقع بر یک خم از مبدأ دور و دورتر می‌شود، فاصله بین P و خط ثابتی به سمت صفر میل کند. چنین خطی را مجانب خم می‌نامیم. حال نشان می‌دهیم که هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (۳)$$

دو مجانب دارد که عبارت‌اند از خطهای

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

عبارت سمت چپ معادله (۳) را می‌توان تجزیه کرد و معادله را به صورت

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 1$$

یا

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{ab}{bx + ay} \quad (۶ الف)$$

نوشت. تحلیل معادله (۳) نشان می‌دهد که یکی از شاخه‌های خم در ربع اول قرار دارد و تا بینهایت امتداد دارد. اگر نقطه P واقع بر این شاخه رفته رفته از مبدأ دور شود، x و y بینهایت

بنا به تقارن، خط

$$y = -\frac{b}{a}x \quad \text{یا} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad (۹)$$

نیز مجانب این هذلولی است.

هر دو مجانب را می توان با قراردادن ۰ به جای ۱ در طرف راست معادله (۳) و سپس تجزیه کردن طرف راست، به دست آورد.

نکته گاه مجانب را چنان تعریف می کنند که لازم است وقتی $x \rightarrow \infty$ ، شیب خم به شیب مجانب نزدیک شود. برای اینکه نشان دهیم این تعریف نیز در اینجا صادق است، شیب خم را محاسبه می کنیم. داریم

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

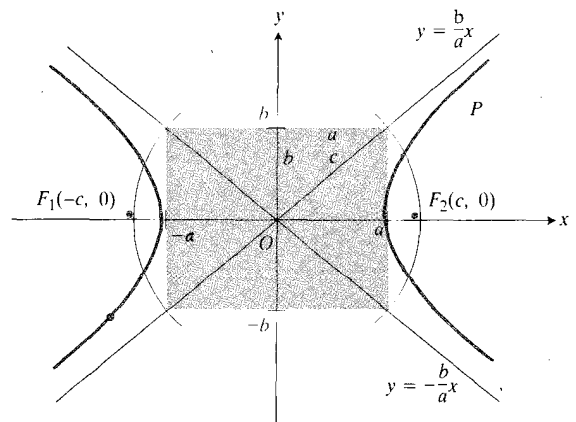
و از آن نتیجه می گیریم که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \cdot 1 = \frac{b}{a} \quad (۱۰)$$

که همان شیب مجانب $y = (b/a)x$ است.

رسم هذلولی

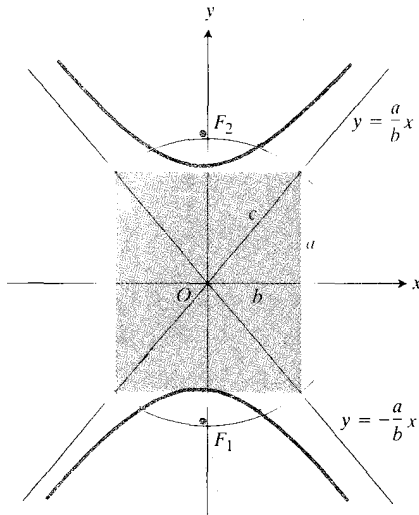
در رسم هذلولی مفید است که بر محور x ، نقاط $\pm a$ ، و بر محور y ، نقاط $\pm b$ را مشخص کنیم، و مستطیلی بکشیم که اضلاع آن موازی با محورهای مختصات باشند و از این نقاط نیز بگذرند. اگر قطرهای این مستطیل را امتداد دهیم، مجانبهای هذلولی به دست می آیند (شکل ۳۰.۸). نیمقطر $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ را می توان به عنوان شعاع دایره ای که محور x را در کانونها، $F_1(-c, 0)$ و $F_2(c, 0)$ قطع می کند، در نظر گرفت.

اگر در معادله (۳) جای x و y را عوض کنیم، معادله جدید

$$(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1 \quad \text{هذلولی} \quad ۳۰.۸$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (۱۱)$$

یک هذلولی را نشان می دهد که کانونهایش بر محور y واقع اند (شکل ۳۱.۸).



$$(y^2/a^2) - (x^2/b^2) = 1 \quad \text{هذلولی} \quad ۳۱.۸$$

وقتی مرکز در مبدأ نباشد

مرکز یک هذلولی محل تقاطع محورهای تقارن آن است. فهرست زیر معادلات متعارف هذلولیهایی را نشان می دهد که محورهایشان بسا محورهای مختصات موازی اند، و مرکزشان در نقطه (h, k) واقع است.

معادلات متعارف هذلولیهایی که محورهایشان با محورهای مختصات موازی اند و مرکزشان در (h, k) واقع است.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (۱۲)$$

(خط گذرنده از کانونها موازی با محور x)

$$(h \pm a, k) \quad \text{رأسها:}$$

$$(h \pm \sqrt{a^2 + b^2}, k) \quad \text{کانونها:}$$

$$(y-k) = \pm (b/a)(x-h) \quad \text{مجانبا:}$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (۱۳)$$

(خط گذرنده از کانونها موازی با محور y)

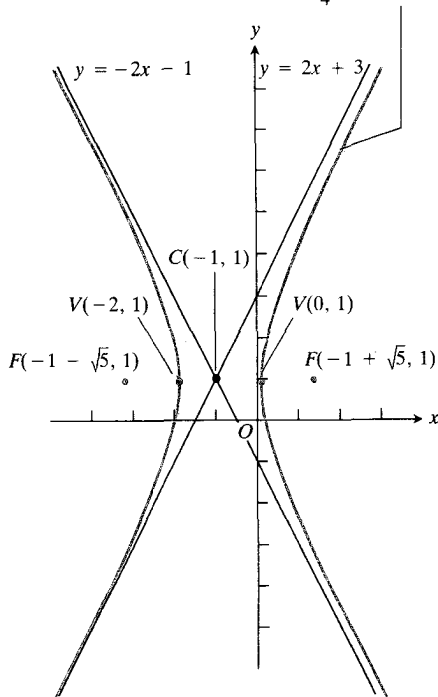
$$(h, k \pm a) \quad \text{رأسها:}$$

$$(h, k \pm \sqrt{a^2 + b^2}) \quad \text{کانونها:}$$

$$(y-k) = \pm (a/b)(x-h) \quad \text{مجانبا:}$$

$$4x^2 - y^2 + 8x + 2y - 1 = 0,$$

$$\text{یا} \quad (x+1)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$



۳۲۰۸ هذلولی مذکور در مثال ۱.

مثال ۲ مرکز، رأسها، کانونها، و مجانبهای هذلولی زیر را بیابید

$$x^2 - y^2 - 4x + 2y + 11 = 0.$$

حل: ترتیب جملات معادله را تغییر می‌دهیم، مجذورهای کامل را به دست می‌آوریم، و معادله حاصل را به صورت متعارف می‌نویسیم

$$x^2 - y^2 - 4x + 2y + 11 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - (y^2 - 2y + 1) = -11 + 4 - 1$$

$$(x-2)^2 - (y-1)^2 = -8$$

$$\frac{(y-1)^2}{8} - \frac{(x-2)^2}{8} = 1.$$

این همان معادله (۱۳) به ازای $a = 2\sqrt{2}, b = 2\sqrt{2}, h = 2$ و $k = 1$ است. مرکز هذلولی $(h, k) = (2, 1)$ است

مرکز: $(2, 1)$.

رأسها عبارت‌اند از نقاط $(h, k \pm a) = (2, 1 \pm 2\sqrt{2})$ یا

رأسها: $(2, 1 + 2\sqrt{2})$ و $(2, 1 - 2\sqrt{2})$.

معادلات (۱۲) و (۱۳) را می‌توان با انتقال $x' = x - h$ و $y' = y - k$ و توجه به این مطلب که معادلات حاصل بر حسب مختصات پریم‌دار به صورت زیرند، به دست آورد

$$(12) \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

توجه کنید که در معادله مجانب مربوط به (۱۲)، b بر a و در معادله مجانب مربوط به (۱۳)، a بر b تقسیم می‌شود.

مثال ۱ مرکز، رأسها، کانونها، و مجانبهای هذلولی زیر را بیابید

$$4x^2 - y^2 + 8x + 2y - 1 = 0.$$

حل: جملات شامل x و y را جداگانه به صورت مجذور کامل درمی‌آوریم و معادله را به صورت متعارف می‌نویسیم

$$4x^2 - y^2 + 8x + 2y - 1 = 0$$

$$4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1) = 1 + 4 - 1$$

$$4(x+1)^2 - (y-1)^2 = 4$$

$$(x+1)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

این همان معادله (۱۲) به ازای $a = 1, b = 2, h = -1$ و $k = 1$ است. مرکز هذلولی نقطه $(h, k) = (-1, 1)$ است

مرکز: $(-1, 1)$.

رأسها عبارت‌اند از نقاط $(h \pm a, k) = (-1 \pm 1, 1)$

رأسها: $(0, 1)$ و $(-2, 1)$.

کانونها نقاط زیرند

$$(h \pm \sqrt{a^2 + b^2}, k) = (-1 \pm \sqrt{1 + 4}, 1) \\ = (-1 \pm \sqrt{5}, 1)$$

کانونها: $(-1 + \sqrt{5}, 1)$ و $(-1 - \sqrt{5}, 1)$.

مجانبها عبارت‌اند از خطوط $(y - k) = \pm (b/a)(x - h)$ ، یا

$$(y - 1) = \pm \frac{2}{1}(x + 1)$$

مجانبها: $y = 2x + 3$ و $y = -2x - 1$.

شکل ۳۲۰۸ را ببینید.

در این صورت

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

و

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (۱۶)$$

خروج از مرکز هذلولی، e ، را نظیر خروج از مرکز بیضی به صورت زیر تعریف می کنیم

$$e = \frac{c}{a}.$$

چون $c > a$ ، خروج از مرکز هذلولی از ۱ بزرگتر است. خطوط

$$x = \frac{a}{e}, \quad x = -\frac{a}{e}$$

هادیهای هذلولی هستند.

ویژگی کانون-هادی

حال نشان می دهیم که اگر مختصات نقطه ای چون $P(x, y)$ در معادله (۱۵) صدق کنند، P این ویژگی را نیز دارد که

$$PF_1 = e \cdot PD_1 \quad (۱۷ \text{ الف})$$

و

$$PF_2 = e \cdot PD_2 \quad (۱۷ \text{ ب})$$

که در آنها $F_1(c, 0)$ و $F_2(-c, 0)$ کانونها، و $D_1(-a/e, y)$ و $D_2(a/e, y)$ نزدیکترین نقاط هادیها به P هستند.

در اینجا معادلات (۱۷ الف) و (۱۷ ب) را تنها برای شاخه راست هذلولی اثبات می کنیم؛ روش اثبات برای شاخه چپ شبیه همین است. با مراجعه به معادلات (۵ الف) داریم

$$PF_1 = \frac{c}{a}x + a = e \left(x + \frac{a}{e} \right) \quad (۱۸ \text{ الف})$$

$$PF_2 = \frac{c}{a}x - a = e \left(x - \frac{a}{e} \right).$$

با توجه به شکل ۳۴.۸ دیده می شود که

$$PD_1 = x + \frac{a}{e}, \quad PD_2 = x - \frac{a}{e}. \quad (۱۸ \text{ ب})$$

کانونها عبارت اند از نقاط

$$(h, k \pm \sqrt{a^2 + b^2}) = (2, 1 \pm \sqrt{8+8}) = (2, 1 \pm 4)$$

یا

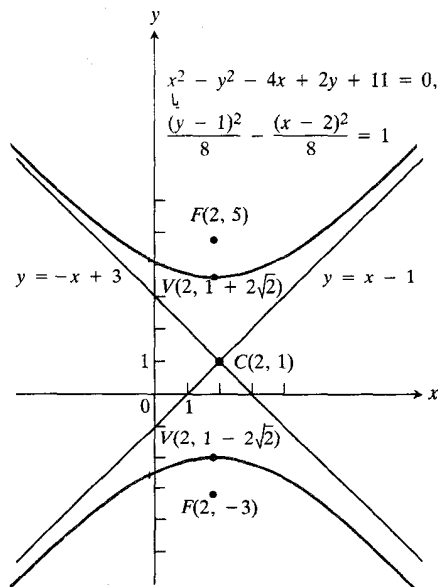
$$\text{کانونها: } (2, 5) \text{ و } (2, -3).$$

مجانیها عبارت اند از خطوط $(y-k) = \pm(a/b)(x-h)$ یا

$$(y-1) = \pm \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(x-2) = \pm(x-2)$$

$$\text{مجانیها: } y = -x + 3 \text{ و } y = x - 1$$

شکل ۳۳.۸ را ببینید.



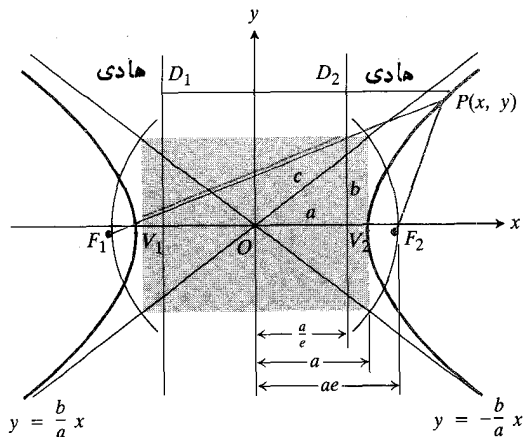
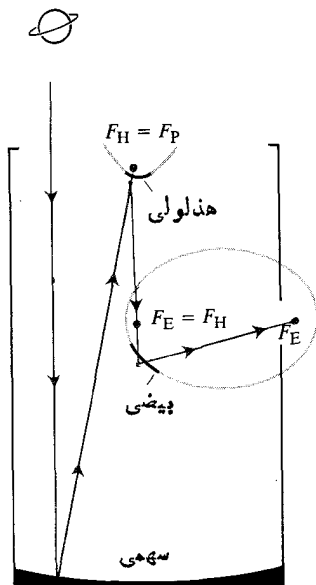
۳۴.۸ هذلولی مذکور در مثال ۲.

خروج از مرکز

محدودیت $a > b$ که در مورد بیضی وجود دارد، در مورد هذلولی وجود ندارد. جهت باز شدن هذلولی را علامتها مشخص می کنند، و نه نسبت اندازه های ضرایب جملات درجه دوم.

برای بحث بیشتر درباره هذلولی، فرض می کنیم که محورهای مختصات از مرکز هذلولی بگذرند و نیز فرض می کنیم که معادله آن به صورت زیر باشد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (۱۵)$$



$$PF_1 = e \cdot PD_1, \quad PF_2 = e \cdot PD_2 \quad ۳۴.۸$$

از تلفیق این نتایج می توان ویژگی «کانون-هادی» هذلولی را که در معادلات (۱۷ الف، وب) ذکر شده، به دست آورد. به عکس، اگر (۱۸ الف) برقرار باشد، معادله زیر نیز برقرار است

$$PF_1 - PF_2 = 2a.$$

در نتیجه، P در این شرط که تفاضل فواصل از دو کانون ثابت باشد صدق می کند.

کاربرد

مسیرهای هذلولوی در نظریه نسبیت اینشتین مطرح می شوند، و اساس سیستم هوانوردی رادیویی لوران^۱ نیز هستند. مسیر ستاره دنباله داری که به خورشید خودش بر نمی گردد، هذلولوی است (احتمال اینکه سهموی باشد صفر است). تلسکوپهای بازتابنده، نظیر تلسکوپ ۲۵۰ اینچی هاله^۲، واقع در کوه پالومار کالیفرنیا، و تلسکوپ فضایی ناسا که قرار بوده در ۱۹۸۸ به فضا پرتاب شود، از آینه های هذلولوی کوچک، همراه با آینه های سهموی بزرگتر، استفاده می کنند. (شمایی از آن در شکل ۳۵.۸ آمده است.)

مسأله ها

در مسائل ۱-۲، هذلولی و مجانبهای آن را رسم کنید.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad ۱.۰۱$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad ۱.۰۲$$

۳۵.۸ در این شکل شماتیک از یک تلسکوپ بازتابنده، نور یک سیاره پس از برخورد با یک آینه سهموی اصلی به کانون آینه، F_P ، بازتابانده می شود. سپس این پرتو نور را آینه هذلولوی کوچکی که یکی از کانونهایش $F_H = F_P$ است به طرف کانون دوم هذلولی، $F_E = F_H$ ، باز می تاباند. چون این کانون بزرگ کانون یک آینه بیضی منطبق است، نور به کانون دیگر بیضی بازتابانده می شود و در آنجا ناظری آن را می بیند. برای به دست آوردن اطلاعات بیشتری درباره ویژگی بازتابندگی هذلولی به کار رفته، مسأله ۲۳ را ببینید.

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 \quad ۳.۰۳$$

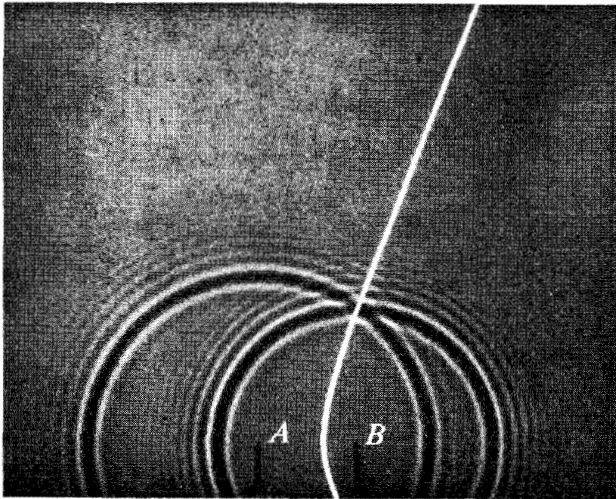
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1 \quad ۴.۰۴$$

در مسائل ۵-۱۴، مرکز، رأسها، کانونها، خروج از مرکز، و مجانبهای هذلولی داده شده را بیابید. سپس هذلولی را رسم کنید و در آن این مشخصات را نشان دهید.

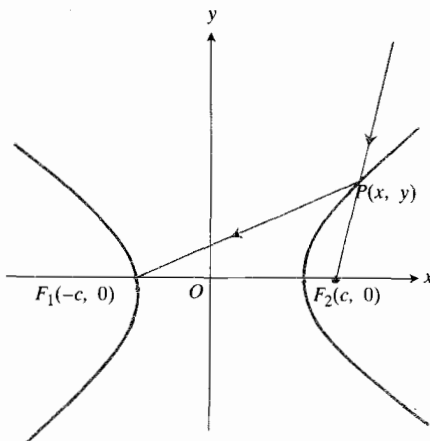
$$9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 36 \quad ۵.۰۵$$

$$x^2 - 9(y-1)^2 = 9 \quad ۶.۰۶$$

نقطه B لمس کرده ایم. وقتی امواج گسترده می شوند، نقاط تقاطع آنها هذلولی پدید می آورند که کانونهایش A و B اند. چرا؟ (دانهمایی: سرعت حرکت موج ثابت است.)



۲۳. ویژگی بازتابندگی هذلولی. نشان دهید که اگر طبق شکل ۳۶۰۸ یک پرتو نور را به طرف یک کانون آینه ای هذلولوی بتابانیم، بازتاب آن به طرف کانون دیگر است. (دانهمایی: نشان دهید که مماس بر هذلولی در نقطه P از شکل ۳۶۰۸ زاویه بین پاره خطهای PF_1 و PF_2 را نصف می کند.)



۳۶۰۸ ویژگی بازتابندگی هذلولی مربوط به مسئله ۲۳.

۲۴. نشان دهید که اگر، مطابق شکل ۳۷۰۸، یک بیضی و یک هذلولی دارای کانونهای مشترک A و B باشند، تحت زاویه قائمه یکدیگر را قطع می کنند. (دانهمایی: اگر از کانون A یک پرتو نور ساطع شود و هذلولی را در P قطع کند، چنان از هذلولی بازتابیده می شود که گویی مستقیماً از B ساطع شده است (مسئله ۲۳). همین پرتو

$$۰۷. ۴(x-۲)^2 - ۹(y+۳)^2 = ۳۶$$

$$۰۸. (y+۳)^2 - ۹(x-۲)^2 = ۹$$

$$۰۹. ۱۶(y-۳)^2 - ۹(x-۴)^2 = ۱۴۴$$

$$۰۱۰. y^2 - (x+۲)^2 = ۸$$

$$۰۱۱. ۵x^2 - ۴y^2 + ۲۰x + ۸y = ۴$$

$$۰۱۲. ۲x^2 = y^2 - ۴y + ۸$$

$$۰۱۳. ۲y^2 = x^2 - ۴x$$

$$۰۱۴. ۴x^2 - ۵y^2 - ۱۶x + ۱۰y + ۳۱ = ۰$$

۰۱۵. معادله ای برای هذلولی بسا کانونهای $(۰, ۰)$ و $(۰, ۴)$ بنویسید که از نقطه $(۱۲, ۹)$ می گذرد.

۰۱۶. یکی از کانونهای یک هذلولی در نقطه $(۱, -۳)$ است، و هادی مربوط به آن خط $y = ۲$ است. اگر خروج از مرکز این هذلولی $۳/۲$ باشد، معادله ای برای آن بنویسید.

۰۱۷. لودان، از دو برج A و B واقع بر سواحل کالیفرنیا که چند صد مایل از هم فاصله دارند به طور همزمان سیگنالی رادیویی فرستاده شده است. یک کشتی سیگنال فرستاده شده از A را ۱۴۰۰ میکروثانیه زودتر از سیگنال فرستاده شده از B دریافت می کند. فرض کنید سیگنالهای رادیویی در هر میکروثانیه ۹۸۰ فوت از فرستنده دور می شوند. درباره محل تقریبی کشتی نسبت به دو برج چه می توانید بگویید؟

۰۱۸. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین خط $x = ۵$ و شاخه راست هذلولی $x^2 - y^2 = a$ حول محور (الف) x ، (ب) y .

۰۱۹. مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین هذلولی $x^2 - y^2 = ۱$ و خطوط $y = ۳$ و $y = -۳$ حول محور (الف) x ، (ب) y .

۰۲۰. ناحیه محصور بین شاخه راست هذلولی $۳x^2 - ۴y^2 = ۱۲$ و خط $x = ۵$ را حول محور y دوران می دهیم و جسمی را به دست می آوریم. حجم این جسم را بیابید.

۰۲۱. مطلوب است مرکز جرم ورق نازک همگنی که از چپ و راست به هذلولی $x^2 - y^2 = ۹$ ، از پایین به محور x ، و از بالا به خط $y = ۴$ محدود است.

۰۲۲. امواج مستدیر شکل زیر به این صورت ایجاد شده اند که سطح مایع درون یک مخزن را ابتدا در نقطه A و پس از چند لحظه در

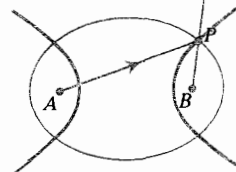
۶.۸ نمودار معادلات درجه دوم

در این بخش، به اثبات یکی از شگفت انگیز ترین قضایای هندسه تحلیلی می پردازیم. این قضیه حاکی است که نمودار دکارتی هر معادله به صورت

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

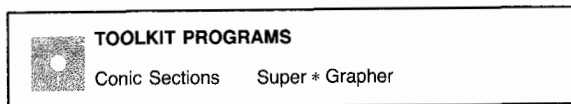
که در آن A, B, C و همه صفر نیستند، تقریباً همیشه یک مقطع مخروطی است. تنها موارد استثناء، مربوط به معادلاتی می شوند که نمودارشان دو خط متوازی است، یا معادلاتی که اصلاً نمودار ندارند. بنا به قسرا داد تمام نمودارهای معادله (۱) را خدای درجه دوم می نامیم، هر چند برخی از آنها خمیدگی نداشته باشند.

کتاب، جزوه نمونه سوال



۳۷۰۸ بیضی و هذلولی هم کانون درمسأله ۲۴.

نور را بیضی چنان باز می تاباند که از نقطه B بگذرد. لذا BPC خط مستقیم است.



جدول ۲.۸ مثالهایی از خدای درجه دوم

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

| ملاحظات | معادله | F | E | D | C | B | A | |
|---|----------------------|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| | $A = C$ | $x^2 + y^2 = 4$ | -۲ | | ۱ | | ۱ | دایره |
| نسبت به y درجه دوم، نسبت به x خطی | $y^2 = 9x$ | | | -۹ | ۱ | | | سهی |
| $A \neq C$ ، هم علامت، A, C با علامات مختلف | $4x^2 + 9y^2 = 36$ | -۳۶ | | | ۹ | | ۲ | بیضی |
| | $x^2 - y^2 = 1$ | -۱ | | | -۱ | | ۱ | هذلولی |
| محور y | $x^2 = 0$ | | | | | | ۱ | یک خط (که باز هم یک مقطع مخروطی است) |
| به صورت: $(x-1)(y+1)=0$ تجزیه می شود، پس $y = -1, x = 1$ | $xy + x - y - 1 = 0$ | -۱ | -۱ | ۱ | | ۱ | | خطوط متقاطع (که باز هم یک مقطع مخروطی است) |
| به صورت زیر تجزیه می شود $(x-1)(x-2)=0$ لذا $x = 1$ و $x = 2$ | $x^2 - 3x + 2 = 0$ | ۲ | | -۳ | | | ۱ | خطوط متوازی (مقطع مخروطی نیست) |
| مبدأ | $x^2 + y^2 = 0$ | | | | ۱ | | ۱ | نقطه |
| | $x^2 = -1$ | ۱ | | | | | ۱ | نمودار ندارد |

جمله xy

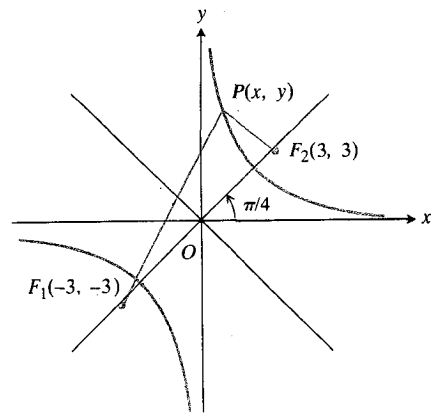
شاید توجه کرده باشید که در این فصل تا به حال به معادله‌ای در مورد مقاطع مخروطی برخورد نکرده‌ایم که شامل جمله xy باشد. دلیل این امر این است که محورهای مختصات و محورهای مقاطع مخروطی همواره متوازی بوده‌اند. برای اینکه ببینیم در غیر این صورت چه رخ می‌دهد، برای هذلولی شکل ۳۸.۸ که کانونهایش در $F_1(-3, -3)$ و $F_2(3, 3)$ قرار دارند معادله‌ای می‌نویسیم. به ازای هر نقطه P واقع بر این هذلولی، معادله $|PF_1 - PF_2| = 2a$ به صورت $|PF_1 - PF_2| = 2(3) = 6$ درمی‌آید و داریم

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \pm 6.$$

اگر یکی از رادیکالها را به طرف دیگر منتقل، و دو طرف عبارت حاصل را مجذور کنیم، و سپس رادیکال حاصل را در یک طرف نگاهداریم، و مجدداً دو طرف را مجذور کنیم، به معادله زیر می‌رسیم

$$2xy = 9 \quad (2)$$

که حالت خاصی از معادله (۱) است، و در آن جمله شامل حاصلضرب x و y وجود دارد. مجانبهای هذلولی معادله (۲) محورهای x و y هستند، و محور تقارنی که کانونها بر آن قرار دارند، با قسمت مثبت محور x زاویه $\pi/4$ رادیان می‌سازد. معادله (۱) تنها وقتی شامل جمله xy است که محورهای مقطع مخروطی مانند این مثال کج باشند.



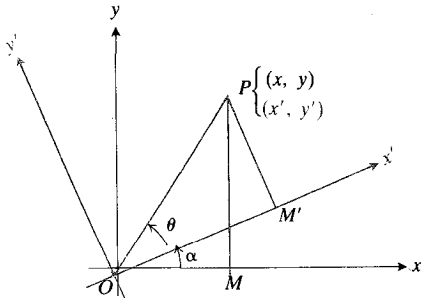
۳۸.۸ محور کانونی (محور تقارن گذرنده از کانونهای) هذلولی $2xy = 9$ با قسمت مثبت محور x زاویه‌ای برابر با $\pi/4$ رادیان می‌سازد.

را از بین می‌بریم. معادلاتی که برای دوران به کار می‌روند چنین به دست می‌آیند. با استفاده از نمادهای شکل ۳۹.۸، که نشان‌دهنده دوران در خلاف جهت ساعت حول مبدأ به اندازه زاویه α است، داریم

$$\begin{aligned} x &= OM = OP \cos(\theta + \alpha) \\ &= OP \cos \theta \cos \alpha - OP \sin \theta \sin \alpha \\ y &= MP = OP \sin(\theta + \alpha) \\ &= OP \cos \theta \sin \alpha + OP \sin \theta \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3 \text{ الف})$$

چون

$$OP \sin \theta = M'P = y' \quad \text{و} \quad OP \cos \theta = OM' = x' \quad (3 \text{ ب})$$



۳۹.۸ دوران در خلاف جهت ساعت حول مبدأ به اندازه زاویه α .

معادلات (۳ الف) به صورت زیر درمی‌آیند.

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha. \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

مثال ۱ محورهای x و y را حول مبدأ به اندازه $\pi/4$ رادیان دوران می‌دهیم. معادله هذلولی $2xy = 9$ را بر حسب مختصات جدید بیابید.

حل: چون $\cos \pi/4 = \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$ ، با استفاده از معادلات (۴) جانشانیهای

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

دوران دادن محورهای مختصات برای حذف جمله xy

برای حذف جمله xy از معادله یک مقطع مخروطی، محورهای مختصات را دوران می‌دهیم و «کجی» محورهای مقطع مخروطی

حاصل را حل می‌کنیم

$$B \cos 2\alpha + (C - A) \sin 2\alpha = 0$$

لذا در عمل باید α را از یکی از دو معادله زیر به دست آوریم

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} \quad \text{یا} \quad \cot 2\alpha = \frac{A-C}{B} \quad (۷)$$

مثال ۲ می‌خواهیم محورهای مختصات را به اندازه زاویه‌ای چون α دوران دهیم که برای خم

$$x^2 + xy + y^2 - 6 = 0 \quad (۸)$$

معادله‌ای به دست آید که جمله xy نداشته باشد. α و معادله جدید را بیابید.

حل (۱): با استفاده از معادلات (۷)، (۶)، و (۵).
در معادله (۸) داریم $A=B=C=1$. برای یافتن α این مقادیر را در معادله (۷) قرار می‌دهیم

$$\cot 2\alpha = \frac{A-C}{B} = \frac{1-1}{1} = 0, \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

اگر در معادلات (۶) جانشانیهای $\alpha = \pi/4$ ، $A=B=C=1$ ، $D=E=0$ و $F=-6$ را انجام دهیم، داریم

$$A' = \frac{3}{4}, \quad B' = 0, \quad C' = \frac{1}{4}$$

$$D' = E' = 0, \quad F' = -6.$$

لذا، بنا به معادله (۵)

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{12} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{3}{4}x'^2 + \frac{1}{4}y'^2 - 6 = 0$$

این، معادله بیضی است که کانونهایش بر محور جدید y' قرار دارند. شکل ۴۱.۸ را ببینید.

حل (۲): مستقیماً از معادلات دورانی استفاده می‌کنیم.
این روش به فرمولهای کمتری نیاز دارد، ولی محاسبات آن بیشتر است. ابتدا مانند راه حل (۱)، α را می‌یابیم، و مقدار حاصل، $\alpha = \pi/4$ ، را در معادلات دورانی قرار می‌دهیم و نتایج زیر را به دست می‌آوریم

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'.$$

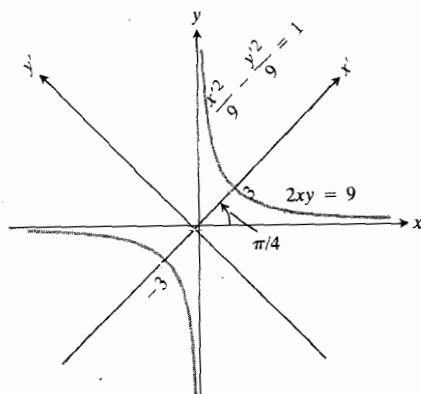
را در معادله $2xy = 9$ انجام می‌دهیم. داریم

$$2 \left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right) = 9$$

$$x'^2 - y'^2 = 9$$

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{9} = 1.$$

شکل ۴۰.۸ را ببینید.



۴۰.۸ جدولی مذکور در مثال ۱.

اگر معادلات دورانی (۲) را در معادله درجه دوم کلی (۱) به کار ببریم، معادله درجه دوم جدیدی به دست می‌آوریم

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0. \quad (۵)$$

معادلات زیر ارتباط بین ضرایب جدید و قدیم را نشان می‌دهند

$$A' = A \cos^2 \alpha + B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha$$

$$B' = B \cos 2\alpha + (C - A) \sin 2\alpha$$

$$C' = A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha$$

$$D' = D \cos \alpha + E \sin \alpha$$

$$E' = -D \sin \alpha + E \cos \alpha$$

$$F' = F.$$

این معادلات، از این مطلب نیز حکایت دارند که اگر در معادله خمی جمله xy نیز باشد ($B \neq 0$)، می‌توانیم یک زاویه دوران چون α بیابیم که با استفاده از آن معادله‌ای فاقد جمله حاصلضرب xy ($B' \neq 0$) به دست آید. برای یافتن α ، در معادله دوم از معادلات (۶)، به جای B' صفر می‌گذاریم، و معادله

(حالات خاص: نمودار يك نقطه است، یا اصلاً نموداری وجود ندارد)؛

(ت) هذلولی، اگر A و C علامتهای مختلف داشته باشند (حالت خاص: يك جفت خط متقاطع)؛

(ث) خط مستقیم، اگر A و C صفر باشند، و دست کم یکی از D یا E مخالف با صفر باشد؛

(ج) يك یا دو خط مستقیم، اگر عبارت سمت چپ معادله (۹) را بتوان به حاصل ضرب دو عامل خطی تجزیه کرد.

□ نحوه استفاده ماشین حساب از دوران

برخی از ماشینهای حساب برای محاسبه سینوس و کسینوس يك زاویه دلخواه از دوران استفاده می کنند. شیوه کار از این قرار است: به حافظه ماشین

۱. مثلاً ده زاویه نظیر

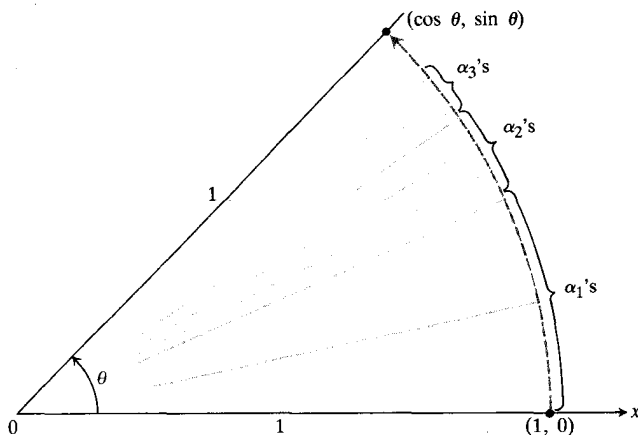
$$\alpha_1 = \sin^{-1}(10^{-1}),$$

$$\alpha_2 = \sin^{-1}(10^{-2}), \dots, \alpha_{10} = \sin^{-1}(10^{-10})$$

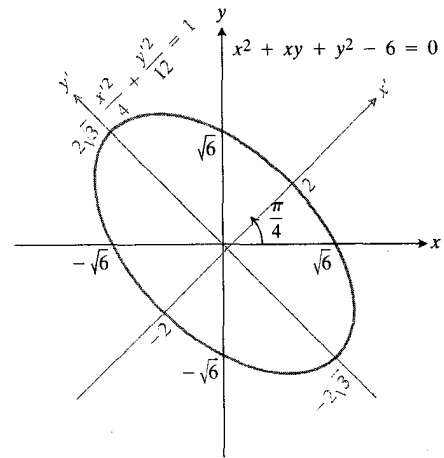
و

۲. بیست عدد، سینوس و کسینوس زوایای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$ ، داده می شود.

برای محاسبه سینوس و کسینوس زاویه دلخواهی چون θ (بر حسب رادیان)، θ را به ماشین می دهیم. ماشین ضرایبی از 2π را به θ می افزاید یا از آن کم می کند تا زاویه ای بین 0 و 2π به دست آورد که سینوس و کسینوس آن همان سینوس و کسینوس θ باشند. (این زاویه را هم θ می نامیم). سپس ماشین θ را به صورت



۴۲۰۸ برای محاسبه سینوس و کسینوس زاویه ای چون θ که بین 0 و 2π است، ماشین حساب نقطه $(1, 0)$ را به موضع مناسبی واقع بر دایره واحد می برد و مختصات حاصل را به نمایش می گذارد.



۴۱۰۸ بیضی مثال ۲.

حال عبارتهای پریم دار x و y را در معادله اصلی $x^2 + xy + y^2 - 6 = 0$ قرار می دهیم. و نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right)^2 \\ & + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) \\ & + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right)^2 - 6 = 0 \end{aligned}$$

پس از انجام محاسبات لازم داریم

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{12} = 1.$$

نمودار معادلات درجه دوم

حال به بررسی نمودار معادله درجه دوم کلی می پردازیم. چون همواره می توان محورها را دوران داد و جمله xy را حذف کرد، بدون از بین رفتن کلیت بحث می توانیم فرض کنیم که معادله به صورت زیر است

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (9)$$

معادله (۹) یکی از اشکال زیر را نمایش می دهد:
الف) دایره، اگر $A = C \neq 0$ (حالات خاص: نمودار يك نقطه است، یا اصلاً نموداری وجود ندارد)؛
ب) سهمی، اگر معادله (۹) نسبت به یکی از متغیرها از درجه دوم، و نسبت به دیگری خطی باشد؛
پ) بیضی، اگر A و C هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند

محورهای مختصات به اندازه آن دوران کنند، معادله حاصل فاصله جمله xy باشد. اما، دوران را انجام ندهید.

۱۳. نشان دهید که در معادلات دورانی، زاویه α هر چه باشد معادله $x^2 + y^2 = a^2$ به صورت $x'^2 + y'^2 = a^2$ درمی‌آید.

۱۴. نشان دهید که هر گاه در معادله (۱) داشته باشیم $A = C$ ، با دوران محورها به اندازه زاویه $\pi/4$ رادیان، جمله xy از معادله حذف می‌شود.

۱۵. مطلوب است معادله خم $x^2 + 2xy + y^2 = 1$ پس از دوران محورها، چنانکه A' مذکور در معادله (۶) صفر شود.

مجموعی از مضرب α_1 (بزرگترین مضرب ممکن به طوری که حاصل از θ بیشتر نشود) به علاوه مضربی از α_2 (باز هم بزرگترین مضرب ممکن)، و همین طور تا α_n ، «می‌نویسد». در نتیجه

$$\theta \approx m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \dots + m_n\alpha_n.$$

سپس ماشین حساب نقطه $(1, 0)$ را به اندازه m_1 برابر α_1 (به طور متوالی به اندازه m_1 بار α_1)، به علاوه m_2 برابر α_2 ، و ...، و بالاخره m_n برابر α_n ، دوران می‌دهد. شکل ۲۲.۸ را ببینید. مختصات نقطه نهایی $(1, 0)$ واقع بر دایره واحد، مقادیری هستند که ماشین برای $(\cos \theta, \sin \theta)$ ارائه می‌کند.

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۱۰ با دوران دادن محورها، مختصات معادله مفروض را به معادله‌ای تبدیل کنید که جمله xy نداشته باشد. آنگاه نمودار معادله را مشخص کنید. (معادلات جدید به اندازه و جهت دورانی بستگی دارند که انتخاب می‌کنید.)

$$xy = 2 \quad 0.1$$

$$x^2 + xy + y^2 = 1 \quad 0.2$$

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 8x + 8\sqrt{3}y = 0 \quad 0.3$$

$$x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 1 \quad 0.4$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2 \quad 0.5$$

$$x^2 - 3xy + y^2 = 5 \quad 0.6$$

$$\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 - 8x + 8y + 2\sqrt{2} = 0 \quad 0.7$$

$$xy - y - x + 1 = 0 \quad 0.8$$

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 19 \quad 0.9$$

$$3x^2 + 4\sqrt{3}xy - y^2 = 7 \quad 0.10$$

۱۱. سینوس و کسینوس زاویه‌ای را بیابید که اگر محورها مختصات به اندازه آن دوران کنند جمله xy از معادله زیر حذف می‌شود

$$14x^2 + 16xy + 2y^2 - 10x + 26.370y - 17 = 0.$$

دوران را انجام ندهید.

۱۲. $F_1(0, \sqrt{3})$ و $F_2(-1, 0)$ کانونهای یک بیضی هستند و این بیضی از نقطه $(1, 0)$ می‌گذرد. (با استفاده از تعریف) معادله‌ای برای این بیضی بنویسید. سپس زاویه‌ای چون α بیابید که اگر

TOOLKIT PROGRAMS

Conic Sections Super * Grapher

۲.۸ سهمی، بیضی یا هذلولی؟ مبین پاسخ می‌دهد

در این بخش، راهی را ارائه می‌کنیم که فوراً به ما می‌گوید نمودار

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

سهمی است یا بیضی یا هذلولی. در این آزمون نیازی به حذف جمله xy نیست.

مبین

در بخش قبل دیدیم که اگر B صفر نباشد، آنگاه با دوران محورها به اندازه زاویه α که از معادله

$$\cot 2\alpha = \frac{A-C}{B} \quad (2)$$

به دست می‌آید معادله (۱) به صورت

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \quad (3)$$

درمی‌آید که در آن جمله xy وجود ندارد.

حال نمودار معادله (۳):

(الف) سهمی (واقعی یا تباهیده) است هر گاه $A' = 0$ یا

$C' = 0$ ؛ یعنی، اگر $A'C' = 0$ ؛

(ب) بیضی (واقعی یا تباهیده) است هر گاه A' و C'

همعلامت باشند؛ یعنی، اگر $A'C' > 0$ ؛

(ب) هذلولی (واقعی یا تباهیده) است هر گاه A' و C'

مختلف علامه باشند؛ یعنی، اگر $A'C' < 0$.

با استفاده از معادلات (۶) بخش قبل می‌توان نشان داد که

به ازای هردورانی از محورها داریم

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C' \quad (۴)$$

این مطلب به این معناست که مقدار $B^2 - 4AC$ با دوران تغییر نمی کند. اما وقتی دوران به اندازه زاویه α مذکور در معادله (۲) انجام شود، B' صفر می شود و لذا داریم

$$B^2 - 4AC = -4A'C'.$$

چون خم سهمی است هرگاه $A'C' = 0$ ، بیضی است هرگاه $A'C' > 0$ ، و هذلولی است هرگاه $A'C' < 0$ ، پس خم

الف) اگر $B^2 - 4AC = 0$ ، سهمی است؛

ب) اگر $B^2 - 4AC < 0$ ، بیضی است؛

پ) اگر $B^2 - 4AC > 0$ ، هذلولی است.

عدد $B^2 - 4AC$ را مبین معادله (۱) می نامند. هم اینک دیدیم که معادله (۱) یک سهمی است هرگاه مبین صفر باشد، بیضی است هرگاه مبین منفی باشد، و هذلولی است هرگاه مبین مثبت باشد (با توجه به این مطلب که گهگاه موارد تباهیده هم پیش می آید).

مثال ۱

الف) $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x - 7 = 0$ معادله یک سهمی است زیرا

$$B^2 - 4AC = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0.$$

ب) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ معادله یک بیضی است زیرا

$$B^2 - 4AC = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0.$$

پ) $xy - y^2 - 5y + 1 = 0$ معادله یک هذلولی است زیرا

$$B^2 - 4AC = (1)^2 - 4(0)(-1) = 1 > 0.$$

نامتغیر [ناوردای] $A+C$

مقدار نامتغیر دیگری که می توان در ارتباط با معادلات (۱) و (۳) در نظر گرفت عبارت است از مجموع ضرایب جملات مجذور. چون به ازای هر زاویه α ، $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، از معادلات (۶) در بخش ۶.۸ داریم

$$A' + C' = A(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + C(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = A + C. \quad (۶)$$

با استفاده از دو نامتغیر $B^2 - 4AC$ و $A+C$ می توان

احتمال وقوع خطاهای عددی در دوران محورها را بررسی کرد. همچنین از آنهایی توان برای محاسبه ضرایب A' و C' موجود در معادله (۳)، وقتی که محورها را دوران می دهیم تا B' را صفر کنیم، استفاده کرد.

مثال ۲ با دوران دادن محورها، جمله xy موجود در معادله

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

را حذف کنید و معادله جدید را بنویسید.

حل: از معادله مفروض روابط زیر را می یابیم

$$B^2 - 4AC = -3, \quad A+C=2.$$

حال، اگر B' را برابر با صفر بگیریم، از معادلات (۴) و (۶) داریم

$$-4A'C' = -3, \quad A' + C' = 2$$

و از آن نتیجه می گیریم که خم یک بیضی است. اگر $C' = 2 - A'$ از معادله دوم را در معادله اول قرار دهیم، داریم

$$-4A'(2 - A') = -3$$

$$4A'^2 - 8A' + 3 = 0$$

$$(2A' - 3)(2A' - 1) = 0$$

و

$$A' = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad A' = \frac{3}{2}$$

مقادیر متناظر C' عبارت اند از

$$C' = \frac{3}{2} \quad \text{یا} \quad C' = \frac{1}{2}$$

پس معادله بر حسب مختصات جدید به صورت

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 1 \quad (۷ \text{ الف})$$

یا

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 = 1 \quad (۷ \text{ ب})$$

است. برتری معادلات (۷ الف و ب) بر معادله اصلی این است که فوراً اطلاعاتی درباره شکل بیضی یعنی طول قطرها، فاصله مرکز تا کانون، و خروج از مرکز به ما می دهند.

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۱۷ به کمک مبین تعیین کنید که معادله مفروض دایره است، یا سهمی، یا بیضی، و یا هذلولی.

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \quad ۰۱$$

$$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0 \quad ۰۲$$

$$y^2 - 4x - 4 = 0 \quad ۰۳$$

$$x^2 + y^2 - 10 = 0 \quad ۰۴$$

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 4 = 0 \quad ۰۵$$

$$x^2 + y^2 + xy + x - y = 3 \quad ۰۶$$

$$2x^2 - y^2 + 4xy - 2x + 3y = 6 \quad ۰۷$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x = 6 \quad ۰۸$$

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y = 10 \quad ۰۹$$

$$xy + y^2 - 3x = 5 \quad ۰۱۰$$

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12 \quad ۰۱۱$$

$$x^2 - y^2 = 1 \quad ۰۱۲$$

$$2x^2 + 3y^2 - 4x = 7 \quad ۰۱۳$$

$$x^2 - 3xy + 3y^2 + 6y = 7 \quad ۰۱۴$$

$$25x^2 - 4y^2 - 350x = 0 \quad ۰۱۵$$

$$6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y + 2 = 0 \quad ۰۱۶$$

$$3x^2 + 12xy + 12y^2 + 435x - 9y + 72 = 0 \quad ۰۱۷$$

۰۱۸ یک فرمول جالب برای مساحت بیضی. وقتی $B^2 - 4AC$ منفی باشد، خم

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$$

بیضی است. اگر نصف قطرها a ، و b باشند، مساحت این بیضی πab است. نشان دهید مساحت این بیضی از فرمول $2\pi/\sqrt{4AC - B^2}$ نیز به دست می آید. (دانهمایی: محورهای مختصات را دوران دهید تا جمله xy حذف شود، سپس معادله ۴ را در مورد معادله جدید به کار ببرید.)

۰۱۹ با استفاده از معادلات (۶) در بخش ۶.۸ نشان دهید که به ازای هر زاویه دوران α

$$D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2.$$

۰۲۰ اگر در معادله (۱) داشته باشیم $C = -A$ ، نشان دهید

دوران خاصی از محورها وجود دارد به قسمی که در معادله حاصل، معادله ۳، داشته باشیم $A' = C' = 0$. در این حالت زاویه α ، زاویه دوران، را بیابید. (دانهمایی: چون $A' + C' = 0$ ، کافی است در معادله (۳)، A' را مساوی صفر قرار دهید.)

۰۲۱ اثبات رابطه (۴). برای اینکه نشان دهید به ازای هر دورانی از محورها داریم $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ ، از معادلات (۶) در بخش ۶.۸ استفاده کنید. (محاسبات با شکیبایی به نتیجه می‌رسند.)

۸.۸ مقاطع مخروطی

در این بخش نشان می‌دهیم که اگر یک مخروط دو دامنه را با صفحه‌ای قطع کنیم، خم حاصل در معادله $PD = e \cdot PF$ ، که در آن D و F به طرز مناسبی انتخاب شده‌اند، صدق می‌کند. پس، هر مقطع مخروطی «هندسی» یک مقطع مخروطی «جبری» هم هست. فرض می‌کنیم صفحه قاطع با محور مخروط زاویه حاده‌ای چون α بسازد، و زاویه حاده بین مولد و محور مخروط β باشد (شکل ۴۳.۸ را ببینید). بدین ترتیب مقطع

(i) دایره است، هرگاه $\alpha = 90^\circ$ ؛

(ii) بیضی است، هرگاه $\beta < \alpha < 90^\circ$ ؛

(iii) سهمی است، هرگاه $\alpha = \beta$ ؛

(iv) هذلولی است، هرگاه $0 \leq \alpha < \beta$.

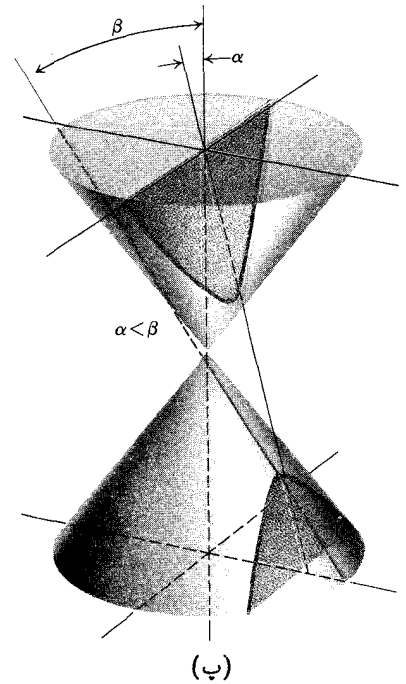
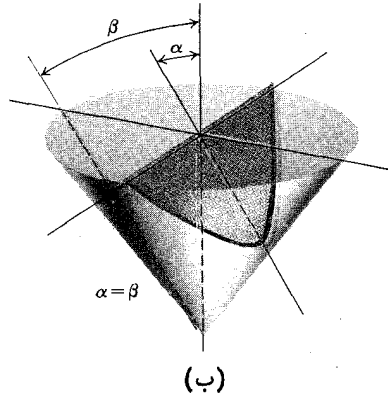
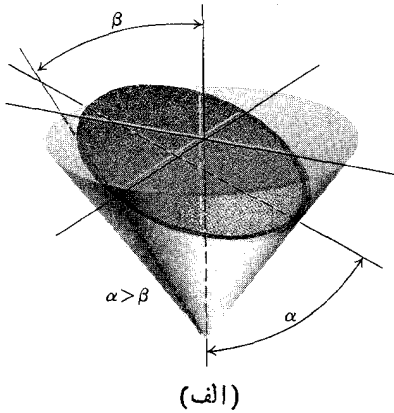
شکل ۴۴.۸ ارتباط بین خمهایی را که به صورت فوق تعریف کرده‌ایم با مقاطع یک مخروط نشان می‌دهد. هر چند شکلی که دیده می‌شود، بیضی است، اما استدلال در سایر موارد هم کار است. روش کلی به دست آوردن آن به شرح زیر است:

کره‌ای را چنان در مخروط محاط می‌کنیم که دایره C محل تماس آن با مخروط، و نقطه F محل تماس آن با صفحه قاطع باشد. نقطه P نقطه دلخواهی از مقطع مخروطی است. خواهیم دید که F یکی از کانونهای این خم است، و خط L یعنی فصل مشترک صفحه قاطع و صفحه دایره C یک هادی از خم است. برای رسیدن به این نتایج، فرض کنید Q محل تلاقی صفحه C باشد با خطی که از P به موازات محور مخروط رسم می‌شود، و A نقطه تماس C با خطی باشد که P را به رأس مخروط وصل می‌کند، و فرض کنید خط PD در نقطه D بر خط L عمود باشد. آنگاه دو خط PA و PF از نقطه مشترک P بسر کره مماس شده‌اند، و در نتیجه طول برابر دارند:

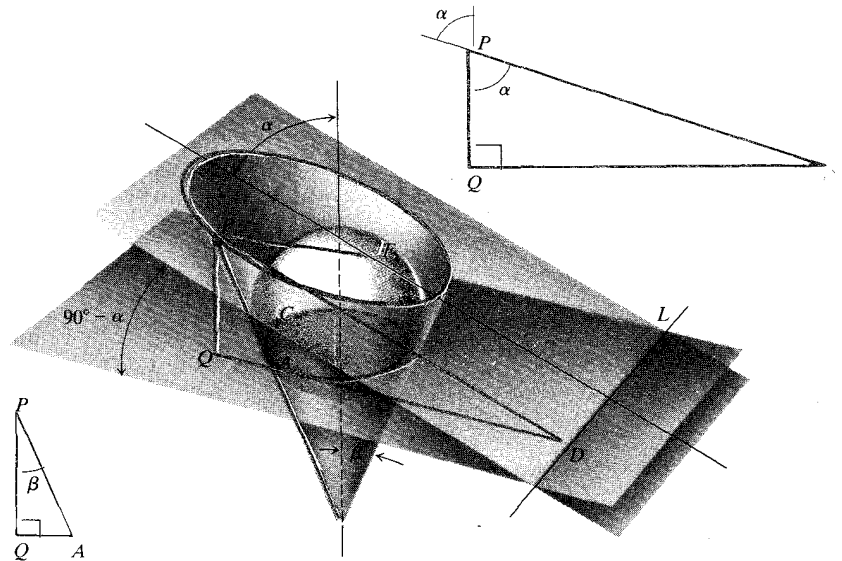
$$PA = PF.$$

همچنین، با توجه به مثلث قائم الزاویه PQA داریم

$$PQ = PA \cos \beta$$



۴۳۰۸ مقطع يك صفحه با يك مخروط دو پارچه؛ (الف) يك بیضی (ب) يك سهمی، (پ) يك هذلولی. زاویه β زاویه بین یال و محور مخروط است. زاویه α زاویه حاده بین صفحه و محور مخروط است.



۴۴۰۸ خط L هادی متناظر با کانون F بیضی است.

$$\frac{PA}{PD} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \quad (۱)$$

اما، چون $PA = PF$ ، داریم

$$\frac{PF}{PD} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \quad (۲)$$

و از مثلث قائم الزاویه PQD می بینیم که

$$PQ = PD \cos \alpha.$$

پس

$$PA \cos \beta = PD \cos \alpha$$

یا

واقع بر چرخهای غلطان به دست می آیند. توصیه می شود قبل از مطالعه این بخش، بخش ۸.۲ را به اختصار مرور کنید.

معادلات پارامتری مقاطع مخروطی

معادلات پارامتری موضع يك ذره متحرك در صفحه را گاه معادلات پارامتری مسیر حاصل از حرکت ذره می نامند. پس، معادلاتی را که حرکت يك ذره به دور يك دایره را توصیف می کنند می توان معادلات پارامتری دایره نامید. همچنین معادلاتی را که حرکت يك ذره بر سهمی را توصیف می کنند می توان معادلات پارامتری سهمی خواند. مثالهای زیر این مطلب را نشان می دهند.

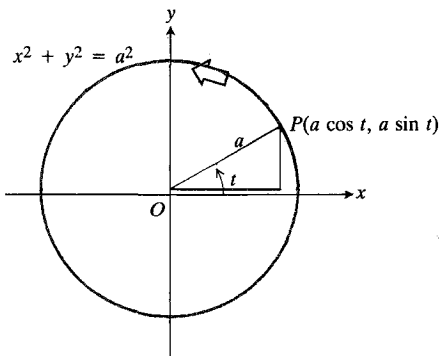
مثال ۱ معادلات پارامتری دایره $x^2 + y^2 = a^2$. حرکت ذره ای را توصیف کنید که موضع آن، $P(x, y)$ ، در لحظه t از معادلات زیر به دست آید

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (۱)$$

حل: چون

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2$$

ذره روی دایره به مرکز مبدأ و به شعاع a حرکت می کند. وقتی t برابر با صفر است، ذره حرکت خود را از نقطه $(a, 0)$ آغاز می کند، و وقتی t از ۰ تا 2π افزایش می یابد، يك بار در خلاف جهت ساعت به دور دایره می چرخد. شکل ۴۵.۸ را ببینید.



۴۵.۸ معادلات $x = a \cos t, y = a \sin t$

معادلات پارامتری دایره $0 \leq t \leq 2\pi$

$x^2 + y^2 = a^2$ اند.

مثال ۲ معادلات پارامتری سهمی $y^2 = x$. حرکت ذره ای را توصیف کنید که موضع آن، $P(x, y)$ ، در لحظه t از معادلات زیر به دست آید

$$x = t^2, \quad y = t, \quad -\infty < t < \infty.$$

یا

$$PF = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} PD. \quad (۳)$$

از آنجا که α و β برای يك مخروط و يك صفحه قاطع ثابت اند، معادله (۳) به صورت زیر درمی آید

$$PF = e \cdot PD. \quad (۴)$$

این مطلب حاکی است که بسته به اینکه $e = 1$ ، $e < 1$ ، یا $e > 1$ ، که در آن

$$e = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

نقطه P به ترتیب متعلق است به يك سهمی، يك بیضی، یا يك هذلولی به کانون F و هادی L . بنابراین در اینجا عدد e همان خروج از مرکز است.

مسئله ها

۱. برای حالتی که مقطع مخروطی سهمی باشد شکلی نظیر شکل ۴۴.۸ رسم کنید، و براساس این شکل، استدلال این بخش را تکرار کنید.

۲. برای حالتی که مقطع مخروطی هذلولی باشد شکلی نظیر شکل ۴۴.۸ رسم کنید، و براساس این شکل، استدلال این بخش را تکرار کنید.

۳. در حالتی که مقطع مخروطی دایره باشد، چه بخشهایی از توسیعات مذکور در این بخش ناممکن می شود؟

۴. فرض کنید یکی از هادیه خط $x = -p$ و کانون متناظر این هادی، مبدأ باشد. با استفاده از معادله $PF = e \cdot PD$ معادله کلی مقطع مخروطی با خروج از مرکز e را به دست آورید. اگر e نه ۰ باشد، و نه ۱، نشان دهید که مرکز مقطع مخروطی نقطه زیر است

$$\left(\frac{pe^2}{1-e^2}, 0 \right).$$

۹.۸ معادلات پارامتری مقاطع مخروطی و خمهای دیگر

در این بخش، به بررسی معادلات پارامتری حرکت ذره در امتداد مقاطع مخروطی و دیگر خمهای واقع در صفحه می پردازیم. از جمله چرخه زاده ها و چرخ زاده ها را بررسی می کنیم که از حرکت ذرات

حل: با حذف t بین معادلات مربوط به x و y ، يك معادلهٔ دکارتی برای مختصات ذره به دست می آوریم. چون

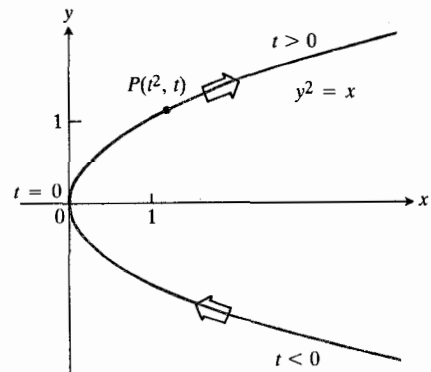
$$y^2 = t^2 = x$$

می بینیم که مسیر حرکت، سهمی

$$y^2 = x$$

است (شکل ۴۶.۸). وقتی t از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می کند، ذره از نیمهٔ پایین سهمی بالا می آید، در لحظه ای که t صفر است به مبدأ می رسد، و با ادامهٔ افزایش مقدار t در ربع اول به حرکت خود ادامه می دهد.

همان گونه که در بخش ۸.۲ در مورد دایره دیدیم، هر خم مفروض را می توان در دو جهت پیمود، و هر خم معادلات پارامتری مختلفی دارد. در بین معادلات پارامتری سهمی می توان از معادلات پارامتری $x = (\tan^{-1} t)^2$ ، $y = \tan^{-1} t$ ، $-\pi/2 < t < \pi/2$ (با همان جهت، و با بازهٔ منتهای) $y = -t$ ، $x = t^2$ و $-\infty < t < \infty$ (جهت عکس) یاد کرد.



۴۶.۸ معادلات $y=t$ ، $x=t^2$ ، $-\infty < t < \infty$.

معادلات پارامتری سهمی $y^2 = x$ اند.

مثال ۳ معادلات پارامتری بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ حرکت ذره ای را مشخص کنید که موضع آن، $P(x, y)$ ، در لحظهٔ t از معادلات زیر به دست آید

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

حل: با حذف t بین معادلات مربوط به x و y ، يك معادلهٔ دکارتی برای مختصات ذره می یابیم. چون

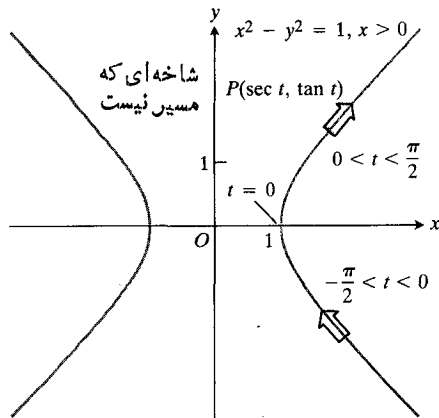
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

حرکت روی بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ انجام می شود. وقتی t برابر با صفر است، ذره از $(a, 0)$ شروع به حرکت می کند،

درباره خاطر جوانان انگلیسی

هرچند نخستین کتاب درسی حساب دیفرانسیل را هوپیتال در ۱۶۹۶ نوشت، ولی نخستین کتاب درسی که علاوه بر حساب دیفرانسیل و انتگرال، هندسهٔ تحلیلی، سریهای نامتناهی، و معادلات دیفرانسیل را هم دربرداشت کتابی است موسوم به آموزش آنالیز که در ۱۷۲۸ ریاضیدان، زبانشناس، و فیلسوف ایتالیایی ماریا آنیزی (۱۷۱۸-۱۷۹۹) آن را نوشت. آنیزی در بچگی از کودکان استثنایی بود و در جوانی چندین زبان را خوب می دانست. تنها نه سال داشت که مقاله او به زبان لاتینی که از آموزش عالی برای زنان دفاع می کرد به چاپ رسید. وی در بیست سالگی يك رشته مقاله در زمینهٔ فلسفه و علوم طبیعی نوشت، و وقتی کتاب آموزش آنالیز او از چاپ خارج شد، سی سال بیشتر نداشت. این کتاب شهرت فراوانی یافت و سبب شد آنیزی يك سال بعد از انتشار آن به عنوان عضو افتخاری هیأت علمی دانشگاه بلونیا پذیرفته شود. پس از فوت پدرش در سال ۱۷۵۲، بقیهٔ عمر خود را صرف مطالعات مذهبی و انجام کارهای عام المنفعه کرد.

آموزش آنالیز آنیزی کشیش انگلیسی جان کالسن را چنان تحت تأثیر قرارداد که تصمیم گرفت صرفاً به منظور ترجمهٔ این کتاب زبان ایتالیایی را بیاموزد. کالسن که در ۱۷۳۶ اثر نیوتن در زمینهٔ فلوکسیونها را از لاتین به انگلیسی ترجمه کرده بود، گفته است، اثر آنیزی را ترجمه کرده ام «تا جوانان انگلیسی نیز مثل جوانان ایتالیایی بتوانند از آن بهره مند شوند». جان هلینس ویراستار این اثر می نویسد که کالسن به تعلیم و تربیت دختران انگلیسی علاقه ویژه ای داشته است.



۴۸.۸ معادلات $x = \sec t$, $y = \tan t$ معادلات پارامتری شاخه راست هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ هستند.

می‌آوریم

$$y = 1 - \cos 2t = 1 - 2 \cos^2 t + 1 = 2 - 2x^2.$$

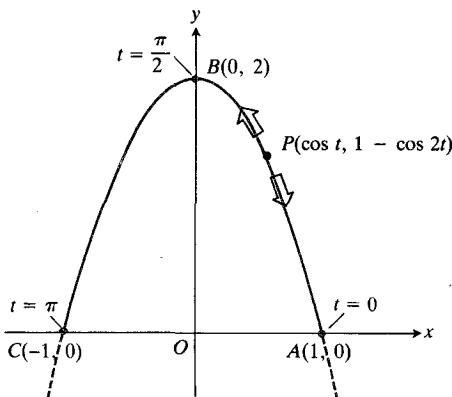
پس هر نقطه نمودار (۲) بر سهمی زیر قرارداد

$$y = 2 - 2x^2. \quad (3)$$

اما، معادلات پارامتری (۲) تنها بخشی از سهمی (شکل ۴۹.۸) را به دست می‌دهند که در آن

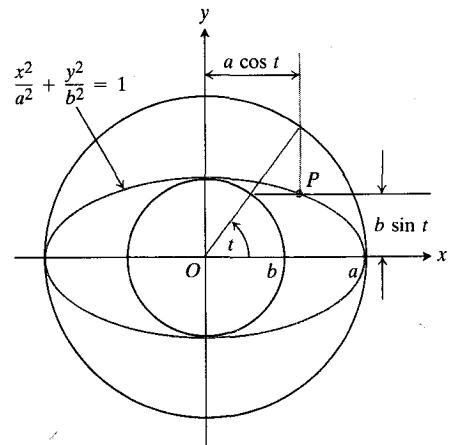
$$-1 \leq x = \cos t \leq 1 \quad \text{و} \quad 0 \leq y = 1 - \cos 2t \leq 2$$

از (۲) درمی‌یابیم که نقطه $P(x, y)$ در $t = 0$ در $A(1, 0)$ است. سپس وقتی t زیاد می‌شود، نقطه به طرف بالا و چپ می‌رود و وقتی $t = \pi/2$ ، به $B(0, 2)$ می‌رسد. وقتی همچنان t بازم زیاد می‌شود و به π نزدیک می‌شود، نقطه به طرف $C(-1, 0)$ می‌رود.



۴۹.۸ وقتی t از $-\infty$ تا ∞ تغییر کند، نقطه P بر طاق سهمی رفت و برگشت می‌کند.

و وقتی t از ۰ تا 2π تغییر می‌کند ذره دقیقاً یک بار در خلاف جهت ساعت به دور بیضی می‌چرخد. شکل ۴۷.۸ را ببینید.



۴۷.۸ مختصات P عبارت‌اند از $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

مثال ۴ معادلات پارامتری شاخه راست هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ حرکت ذره‌ای را توصیف کنید که موضع آن، $P(x, y)$ ، در لحظه t از معادلات زیر به دست می‌آید

$$x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

حل: با حذف t بین معادلات مربوط به x و y ، یک معادله دکارتی برای مختصات P می‌یابیم. چون

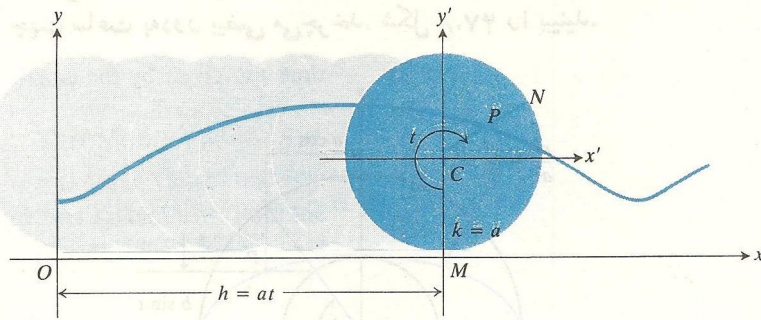
$$x^2 - y^2 = \sec^2 t - \tan^2 t = 1$$

می‌بینیم که حرکت روی بخشی از هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ انجام می‌شود. چون $x = \sec t$ به ازای مقادیری از t که در $-\pi/2 < t < \pi/2$ صدق می‌کنند همیشه مثبت است، حرکت بر شاخه راست هذلولی انجام می‌شود. وقتی t از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ تغییر می‌کند، ذره در امتداد نیمه پایین شاخه راست بالا می‌آید، و در $t = 0$ به مبدأ می‌رسد. سپس وقتی t به $\pi/2$ میل می‌کند، ذره در ربع اول، این شاخه را به طور کامل می‌پیماید. شکل ۴۸.۸ را ببینید.

مثال ۵ طاق سهمی. خمی را رسم کنید که مختصات هر نقطه $P(x, y)$ آن در معادلات زیر صدق کنند

$$x = \cos t, \quad y = 1 - \cos 2t, \quad -\infty < t < \infty. \quad (2)$$

حل: با حذف t ، یک معادله دکارتی برای خم به دست



۵۰۸ چرخه زاد $x = at - b \sin t$, $y = a - b \cos t$ به ازای $t \leq 0$ نشان داده شده است.

داریم

$$x' = -b \sin t, \quad y' = -b \cos t. \quad (۶)$$

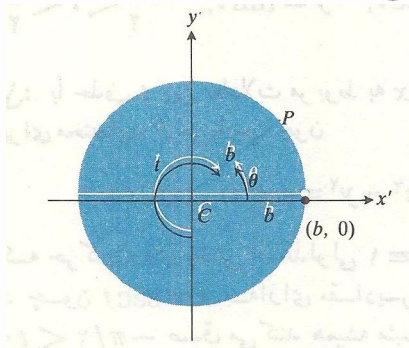
اگر این نتایج و معادلات (۵) را در (۴) قرار دهیم، داریم

$$x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t \quad (۷)$$

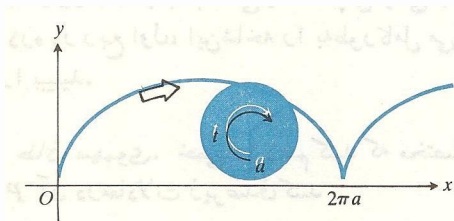
که معادلات پارامتری این چرخه زاد است.
چرخ زاد (شکل ۵۲۰۸) با معادلات

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (۸)$$

که از قراردادن a به جای b در معادلات (۷) به دست می آید، حالت خاص بسیار مهمی است.



۵۱۰۸ مختصات x' و y' نقطه P عبارت اند از
 $x' = b \cos \theta, \quad y' = b \sin \theta$



۵۲۰۸ چرخ زاد $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ به ازای $t \geq 0$ نشان داده شده است.

وقتی t از π تا 2π تغییر می کند، نقطه روی طاق CBA به A برمی گردد. چون x و y دوره ای، x به دور 2π و y به دور π هستند، هر تغییر دیگر t به باز پیمودن بخشی از این طاق منجر می شود. ■

مثال ۶ چرخه زاد و چرخ زاد. چرخ به شعاع a در امتداد یک خط افقی، بدون لغزش می غلتد. نقطه ای چون P بر یکی از پره های این چرخ به فاصله b واحد از مرکز آن قرار دارد؛ مسیری را که نقطه P می پیماید، بیابید. این خم را چرخ زاد می نامند. اگر $b = a$ ، P بر محیط چرخ واقع است، و خم حاصل چرخ زاد نام دارد. این خم نظیر مسیری است که ریگی واقع بر یکی از عاچه های لاستیک اتومبیل در حال حرکت می پیماید.

حل: در شکل ۵۰۸، خطی را که چرخ روی آن می غلتد، محور x گرفته ایم، و محور y چنان انتخاب شده است که از پایین ترین نقاط چرخ زاد بگذرد. معمولاً زاویه t را که CP می پیماید به عنوان پارامتر در نظر می گیریم. چون چرخ بدون لغزش می چرخد، فاصله OM که چرخ به طور افقی می پیماید دقیقاً برابر است با قوس مستدیر $MN = at$. (چرخ را به عقب بفلتانید. در این صورت N برمی آید O قرار خواهد گرفت.) پس مختصات x و y نقطه C عبارت اند از

$$h = at, \quad k = a. \quad (۴)$$

حال محورهای x' و y' را معرفی می کنیم که با محورهای x و y موازی اند، و مبدأ در C واقع است (شکل ۵۱۰۸). ارتباط مختصات قدیم و جدید P را معادلات زیر نشان می دهند

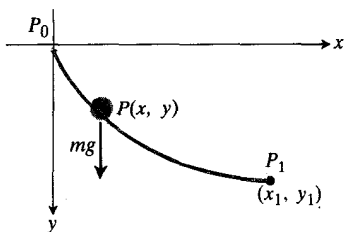
$$x = h + x', \quad y = k + y'. \quad (۵)$$

از شکل ۵۱۰۸ فوراً دیده می شود که

$$x' = b \cos \theta, \quad y' = b \sin \theta$$

یا، چون

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t$$



۵۴۰۸ مهره‌ای که تحت تأثیر نیروی گرانش بزرگ چرخزاد بدون اصطکاک می‌لغزد.

در نتیجه

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{\sqrt{2gy}} \quad \text{با} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \quad (۹)$$

زمان لازم T_1 برای لغزش مهره از P_0 تا P_1 بستگی به خم $y = f(x)$ دارد که مهره بر امتداد آن می‌لغزد. این زمان از معادله زیر به دست می‌آید

$$T_1 = \int_0^{x_1} dt = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (۱۰)$$

مسأله، یافتن خم $y = f(x)$ (در صورت وجود) است که از نقاط $P_0(0, 0)$ و $P_1(x_1, y_1)$ بگذرد و مقدار انتگرال مذکور در (۱۰) را مینیمم کند.

در نظر اول ممکن است حدس بزنیم که خط مستقیم مسار بر P_0 و P_1 ممکن است کوتاهترین زمان را نیز به دست دهد، اما با اندکی تأمل، در این حدس تردید می‌کنیم. ممکن است، در صورتی که مهره در ابتدا به طور قشائم سقوط کند، تندتر بر سرعتش اضافه شود تا اینکه در امتداد یک خم مسایل بلغزد، و در نتیجه ممکن است در وقت صرفه جویی شود. با این سرعت بیشتر، ممکن است مهره مسیر طولانیتری را پیماید، ولی باز هم در زمان کوتاهی به P_1 برسد. حل این مسأله در حد این کتاب نیست، اما خم کوتاهترین زمان، در صورت وجود، در واقع قوسی از چرخزاد ماربر P_0 است که در مبدأ یک برگشت و در P_1 یک مماس افقی دارد. اگر معادله (۹) را به صورت هم‌ارز

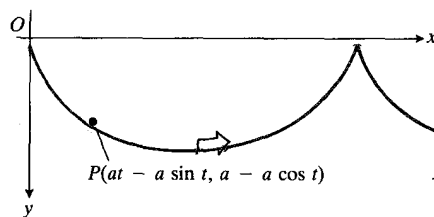
$$T_1 = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}}$$

بنویسیم و سپس معادلات (۸) را در این معادله قرار دهیم، داریم

$$T_1 = \int_0^{t_1} \sqrt{\frac{a^2(1 - \cos t)}{2ga(1 - \cos t)}} dt = t_1 \sqrt{\frac{a}{g}}$$

□ مسائل کوتاهترین زمان و همزمانی

اگر شکل ۵۲۰۸ را برگردانیم، معادلات (۸) باز هم برقرارند، و خم حاصل (شکل ۵۳۰۸) ویژگیهای جالب چندی دارد که در اینجا یکی از آنها را بدون اثبات مطرح می‌کنیم. اثبات این مطلب به شاخه‌ای از ریاضیات متعلق است که حساب و ردشها نام دارد. بخش عظیمی از نظریه اساسی این موضوع به برادران برنولی، یوهان ویاکوب، منتسب است که رقابتی دوستانه باهم داشتند و در مورد مسائل ریاضی یکدیگر را به مبارزه می‌طلبیدند، یکی از این مسائل، مسأله «کوتاهترین زمان» است: در بین تمام خمهای همواری که دو نقطه مفروض را به هم وصل می‌کنند، خمی را بیابید که اگر مهره‌ای که تنها تحت تأثیر نیروی گرانش است روی آن بلغزد، در کوتاهترین زمان آن را پیماید.



۵۳۰۸ برای مطالعه حرکت جسمی تحت تأثیر نیروی گرانش در امتداد چرخزاد وارونه، شکل ۵۲۰۸ را برمی‌گردانیم. در نتیجه، محور y در جهت نیروی گرانش قرار می‌گیرد، و تمام مختصات y روبه پایین مثبت می‌شوند. معادلات چرخزاد هنوز هم $y = a(1 - \cos t)$ و $x = a(t - \sin t)$ هستند.

دو نقطه P_0 و P_1 در شکل ۵۴۰۸ را می‌توان به ترتیب در مبدأ و در نقطه (x_1, y_1) واقع بزرگ صفحه قائم اختیار کرد. این مسأله را می‌توان به زبان ریاضی چنین فرمولبندی کرد. انرژی جنبشی مهره در آغاز صفر است، زیرا سرعت آن صفر است. کاری که نیروی گرانش در حرکت دادن مهره از نقطه $(0, 0)$ به هر نقطه دلخواه (x, y) انجام می‌دهد برابر است با mgy که باید برابر با تغییر انرژی جنبشی باشد؛ یعنی

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2.$$

پس سرعت مهره یعنی

$$v = \frac{ds}{dt}$$

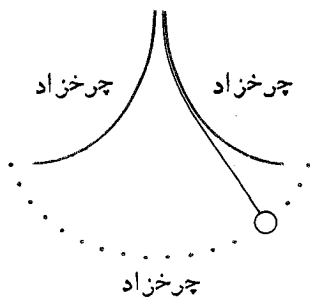
وقتی که مهره به $P(x, y)$ می‌رسد برابر است با

$$v = \sqrt{2gy}.$$

■ ■ ■ ساعت‌های آونگی

یکی از مشکلات ساعت‌های آونگی این است که مدت يك نوسان آونگ با دامنه نوسان تغییر می‌کند. هرچه دامنه نوسان بیشتر باشد، مدت يك نوسان بیشتر است. اگر نیروی فنر، ناشی از كوك کردن، تغییر نکند، این امر مشکلی به وجود نمی‌آورد. اما ضمن باز شدن فنر، نیروی وارد بر آونگ تقلیل می‌یابد و آونگ رفته‌رفته قوسهای کوتاهتری را می‌پیماید، وساعت تندکاری می‌کند. لذا با کم شدن نیروی فنر، تك تك آن تندتر می‌شود.

کریستیان هویگنس (۱۶۲۹-۱۶۹۵)، ریاضیدان، فیزیکدان، و اخترشناس آلمانی برای تعیین اندازه‌های دقیق نجومی نیاز به يك ساعت دقیق داشت. نخستین مطلب در باره يك ساعت آونگی ایده آل را وی در سال ۱۶۷۳ منتشر کرد؛ مسیر نوسان آونگ این ساعت يك چرخزاد بود. دوره تناوب حرکت آونگ ساعت هویگنس به دامنه آن بستگی نداشت، و لذا با کم شدن نیروی فنر تغییر نمی‌کرد. چگونه می‌توان مسیر نوسان آونگ ساعتی را به صورت يك چرخزاد در آورد؟ وزنه آونگ را به سیم ظریفی آویزان کنید و در دو طرف آن مطابق با شکل موانعی قرار دهید که سبب شوند وقتی آونگ به دوانتها نزدیک می‌شود، سیم انحنا یا بد. شکل این دومانع چیست؟ چرخزاد!



که زمان لازم برای لغزش مهره از P_0 تا P_1 است. زمان لازم برای رسیدن مهره به ته قوس به ازای $t_1 = \pi$ به دست می‌آید. نکته عجیب، همان گونه که نشان خواهیم داد، این است که زمان لازم برای لغزیدن مهره در امتداد این چرخزاد از $(0, 0)$ تا پایینترین نقطه، $(a\pi, 2a)$ ، برابر است با زمان لازم برای لغزیدن همین مهره از يك نقطه میانی، مثلاً (x_0, y_0) ، تا $(a\pi, 2a)$ با این شرط که حرکت مهره از سکون آغاز شود. سرعت مهره وقتی از يك نقطه میانی به راه می‌افتد عبارت است از

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)}$$

و زمان لازم برابر است با

$$\begin{aligned} T &= \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2 \cos t)}{2ag(\cos t_0 - \cos t)}} dt \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{\cos t_0 - \cos t}} dt \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2 \sin^2(t/2)}{[2 \cos^2(t_0/2) - 1] - [2 \cos^2(t/2) - 1]}} dt \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin(t/2) dt}{\sqrt{\cos^2(t_0/2) - \cos^2(t/2)}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{t=\pi} \frac{-2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \quad \left(\begin{array}{l} u = \cos(t/2) \\ -2 du = \sin(t/2) dt \\ a = \cos(t_0/2) \end{array} \right) \\ &= 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\sin^{-1} \frac{u}{a} \right]_{t_0}^{t=\pi} \\ &= 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\sin^{-1} \frac{\cos(t/2)}{\cos(t_0/2)} \right]_{t_0}^{\pi} \\ &= 2 \sqrt{\frac{a}{g}} (-\sin^{-1} 0 + \sin^{-1} 1) = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}. \end{aligned}$$

چون این جواب مستقل از مقدار t_0 است، بنابراین زمانی که طول می‌کشد تا يك ذره واقع بر چرخزاد، حرکت خود را از يك نقطه دلخواه و از حالت سکون آغاز کند و به پایینترین نقطه برسد همواره یکسان است. پس در شکل ۵۵.۸، سه ذره‌ای که در يك لحظه حرکت خود را از O, A ، و B آغاز می‌کنند، همزمان به نقطه C می‌رسند. بدین لحاظ، چرخزاد را علاوه بر خم کوتاهترین زمان، خم همزمانی هم می‌نامند.

$$x = 2 + 1/t, \quad y = 2 - t, \quad 0 < t < \infty \quad ۰۱۴$$

$$x = t + 1, \quad y = t^2 + 2, \quad 0 \leq t < \infty \quad ۰۱۵$$

$$x = t^2 + t, \quad y = t^2 - t, \quad -\infty < t < \infty \quad ۰۱۶$$

۰۱۷ معادلات پارامتری نیمه‌دایره

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y > 0$$

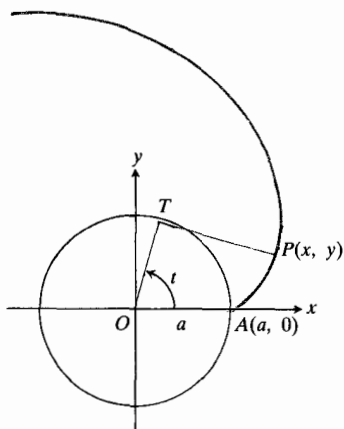
را بیابید؛ پارامتر را شیب ($t = dy/dx$) مماس بر خم در (x, y) بگیرد.

۰۱۸ معادلات پارامتری دایره

$$x^2 + y^2 = a^2$$

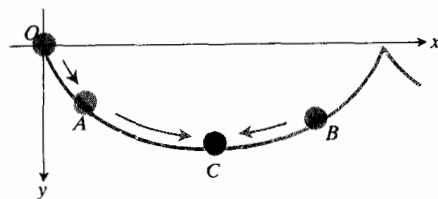
را بیابید؛ پارامتر را طول قوس s از نقطه $(a, 0)$ تا نقطه (x, y) (در خلاف جهت ساعت) بگیرد.

۰۱۹ گسترده یک دایره. اگر طنابی که به دور یک دایره ثابت پیچیده است باز شود، ولی از صفحه دایره خارج نشود، انتهای آن خمی را به وجود می‌آورد که آن را گسترده دایره می‌نامند (شکل ۵۶۰۸). فرض کنید مرکز این دایره ثابت در مبدأ و شعاع آن a باشد. و نیز فرض کنید موضع آغازی نقطه متحرک P ، $A(a, 0)$ و بخش باز نشده طناب، یعنی PT ، در T بردایره مماس باشد. با استفاده از زاویه AOT به عنوان پارامتر t ، معادلات پارامتری گسترده را بیابید.



۵۶۰۸ گسترده یک دایره (مسأله ۱۹).

۰۲۰ بدون چرخزاد. وقتی دایره‌ای بیرون دایره ثابت دیگری باشد و روی محیط آن بغلتد، هر نقطه P واقع بر محیط دایره غلتان، یک بدون چرخزاد (شکل ۵۷۰۸) ایجاد می‌کند. فرض کنید مرکز دایره ثابت در مبدأ O ، و شعاع آن a باشد. همچنین فرض کنید شعاع دایره غلتان b ، و موضع آغازی نقطه متحرک P ، $A(a, 0)$ ،



۵۵۰۸ مهره‌هایی که از O ، A ، و B واقع بر چرخزاد رها شوند همه با هم به C می‌رسند.

معادلات پارامتری متعارف

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{دایره:}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{بیضی:}$$

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad \text{چرخزاد:}$$

مسأله‌ها

در مسائل ۱-۱۶، خم حاصل از حرکت نقطه $P(x, y)$ را با این فرض که پارامتر t بردامنه مفروض تغییر می‌کند، رسم کنید. معادله دکارتی هر خم را نیز بیابید.

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ۰۱$$

$$x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad ۰۲$$

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ۰۳$$

$$x = 2 \cos t, \quad y = 5 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ۰۴$$

$$x = \cos 2t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ۰۵$$

$$x = \cos t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ۰۶$$

$$x = -\sec t, \quad y = \tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \quad ۰۷$$

$$x = \csc t, \quad y = \cot t, \quad 0 < t < \pi \quad ۰۸$$

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ۰۹$$

$$x = 2 + 4 \sin t, \quad y = 3 - 2 \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ۰۱۰$$

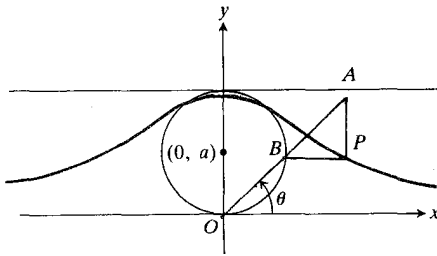
$$x = t^3, \quad y = t^2, \quad -\infty < t < \infty \quad ۰۱۱$$

$$x = 2t + 3, \quad y = 4t^2 - 9, \quad -\infty < t < \infty \quad ۰۱۲$$

$$x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \quad ۰۱۳$$

در $(a, 0)$ بر محور x قرار دارد (شکل ۵۹.۸). خط متغیر OA که از مبدأ O می‌گذرد، خط $y = 2a$ را در نقطه A ، و دایره را در نقطه B قطع می‌کند. حال نقطه‌ای چون P از خم آنیزی، محل تقاطع دو خطی است که از A و B ، و به ترتیب به موازات محورهای x و y رسم می‌شوند.

الف) زاویهٔ محور x با خط OA ، یعنی θ ، را به عنوان پارامتر بگیرید و معادلات پارامتری خم آنیزی را بیابید.
ب) معادلهٔ دکارتی خم را نیز پیدا کنید.



۵۹.۸ خم آنیزی (مسأله ۲۲).

یادداشت تاریخی. ماربا آنیزی (۱۷۱۸-۱۷۹۹)، دختر یک استاد ریاضی دانشگاه بلونیا نخستین کتاب درسی جامع حساب دیفرانسیل و انتگرال را در چهار جلد شامل جبر و هندسه، حساب دیفرانسیل، حساب انتگرال، و معادلات دیفرانسیل نوشت. (کتاب هوپیتال که پیش از آن نوشته شده تنها دربارهٔ هندسه تحلیلی و حساب دیفرانسیل است.) این کتاب به زبانهای فرانسه و انگلیسی ترجمه شد. اشتباه مترجم سبب شده است که امروزه خم زنگی شکل آنیزی را در زبان انگلیسی «ساحره» بنامند. این نام تنها در متنهای انگلیسی دیده می‌شود. کلمه‌ای که خود آنیزی به کار برده کلمهٔ *versiera* از ریشهٔ فعل لاتینی *vertere* به معنی «گشتن» است. مترجم، که یکی از استادان کمبریج بود و ایتالیایی را صرفاً به منظور ترجمهٔ کتاب آنیزی آموخته بود، احتمالاً کلمهٔ لاتین *versiera* را با *avversiera* «همسر شیطان» اشتباه کرده و آن را «ساحره» ترجمه کرده است.

۲۳. معادلات پارامتری خطها در صفحه.

الف) نشان دهید که معادله‌های

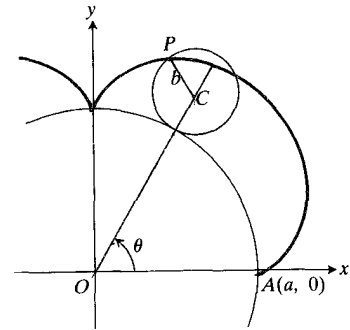
$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t,$$

$$y = y_0 + (y_1 - y_0)t, \quad -\infty < t < \infty$$

معادلات پارامتری خطی هستند که از نقاط (x_0, y_0) و (x_1, y_1) می‌گذرد.

ب) معادلات پارامتری خط مسابر نقطهٔ (x_0, y_0) و مبدأ را بنویسید.

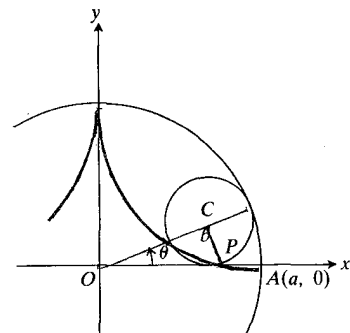
باشد. زاویهٔ θ بین قسمت مثبت محور x و خط گذرنده از دو مرکز را به عنوان پارامتر بگیرید و معادلات پارامتری برون چرخزاد را بیابید.



۵۷.۸ یک برون چرخزاد با ضابطهٔ $b = a/4$ (مسأله ۲۰).

۲۱. درون چرخزاد. وقتی دایره‌ای درون دایره ثابت دیگری باشد و بر محیط آن بفلند، هر نقطهٔ P واقع بر محیط دایره غلتان، یک درون چرخزاد ایجاد می‌کند. فرض کنید دایره ثابت، دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ ، شعاع دایره غلتان b ، و موضع آغازی نقطه متحرک P نقطهٔ $A(a, 0)$ باشد. زاویهٔ قسمت مثبت محور x با خط گذرنده از دو مرکز، θ ، را به عنوان پارامتر، بگیرید و معادلات پارامتری درون چرخزاد را بیابید. در حالت خاصی که طبق شکل ۵۸.۸، $b = a/4$ ، نشان دهید که این درون چرخزاد، اختروارهٔ زیر است

$$x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \sin^3 \theta.$$



۵۸.۸ یک درون چرخزاد با ضابطهٔ $b = a/4$ (مسأله ۲۱).

۲۲. خم آنیزی. خم آنیزی خم زنگی شکلی است که به صورت زیر رسم می‌شود. فرض کنید C دایره‌ای است به شعاع a که مرکزش

۳۱. ماشین حساب ریگی داخل عاچ لاستیک اتومبیلی شده که شعاع آن ۱ فوت است. پس از اینکه اتومبیل ۱ مایل راه بپیماید، طول مسیر طاقرداری را که ریگ ایجاد می کند با تقریب يك فوت برآورد کنید. ابتدا نسبت طول يك طاق چرخزاد بر طول قاعده آن را بیابید

۳۲. رسام کامپیوتری اگر به رسام معادلات پارامتری دسترسی دارید، نمودار معادلات زیر را رسم کنید. شکلهای باشکوهی به دست می آید.

الف) دلتا۱۱:

$$x = 2 \cos t + \cos 2t$$

$$y = 2 \sin t - \sin 2t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

ب) بدون چرخزاد:

$$x = 9 \cos t - \cos 9t$$

$$y = 9 \sin t - \sin 9t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

پ) ددون چرخزاد:

$$x = 8 \cos t + 2 \cos 4t$$

$$y = 8 \sin t - 2 \sin 4t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

ت) ددون چرخه زاد:

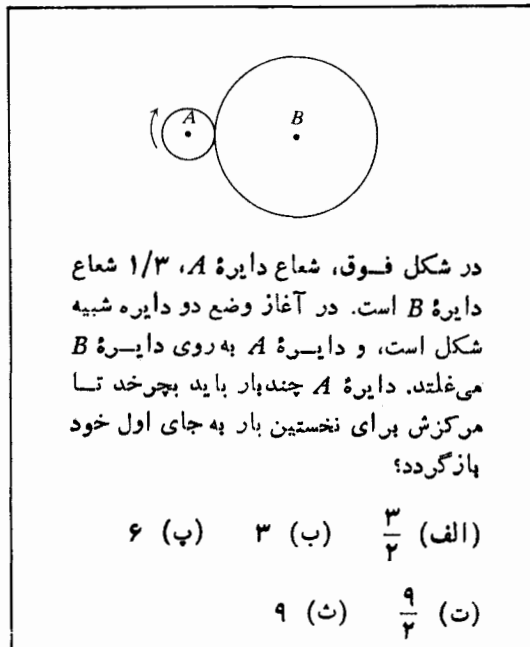
$$x = \cos t + 5 \cos 3t$$

$$y = 6 \cos t - 5 \sin 3t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

پ) معادلات پارامتری خط ماربر (۱، ۰) و (۰، ۱) را بنویسید.

۲۴. مسأله ای که در شکل ۶۰.۸ می بینید مربوط است به آزمون ورودی يك كالج که چند سال پیش برگزار شد. همه پاسخها غلط بودند. پاسخ صحیح چیست؟ اگر دایره كوچکتر به جای اینکه بیرون دایره بزرگتر باشد، درون آن می بود پاسخ صحیح چه می توانست باشد؟



شکل ۶۰.۸

۲۵. بر سهمی $x = t$ ، $y = t^2$ نقطه ای بیابید که نزدیکترین نقطه ممکن به نقطه $(\frac{1}{2}, 1)$ باشد.

۲۶. بر بیضی $x = 2 \cos t$ ، $y = \sin t$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ نقطه ای بیابید که نزدیکترین نقطه ممکن به نقطه $(\frac{3}{4}, 0)$ باشد.

۲۷. طول يك طاق چرخزاد زیر را بیابید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

۲۸. مطلوب است مساحت رویه حاصل از دوران يك طاق چرخزاد حول محور x . $x = t - \sin t$ ، $y = 1 - \cos t$

۲۹. مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین محور x ، و يك طاق از چرخزاد $x = t - \sin t$ ، $y = 1 - \cos t$ حول محور x . (ادغامی: $dV = \pi y^2 dx = \pi y^2 (dx/dt) dt$)

۳۰. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به $0 \leq t \leq 2\pi$ ، $y = \sin t$ ، $x = 2 \cos t$ حول محور y .



TOOLKIT PROGRAMS

Parametric Equations Super * Grapher

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. مقاطع مخروطی را نام ببرید. چرا به آنها «مخروطی» می گویند؟

۲. تعریف سهمی بر حسب فاصله چیست؟ معادلات متعارف سهمی کدام اند؟ نمودار یکی از معادلات را رسم کنید، و در آن رأس،

کانون، محور، و هادی را نشان دهید. خروج از مرکز يك سهمی چیست؟

۳. ویژگی بازتابندگی سهمی چیست؟

۴. تعریف بیضی برحسب فاصله چیست؟ معادلات متعارف بیضی کدامند؟ نمودار یکی از معادلات را رسم کنید، و در آن رأسها، و کانونها را مشخص کنید. تعریف خروج از مرکز بیضی چیست؟ يك بیضی بکشید که خروج از مرکزش به ۱ نزدیک باشد و بیضی دیگری بکشید که خروج از مرکزش به ۵ نزدیک باشد.

۵. تعریف هذلولی برحسب فاصله چیست؟ معادلات متعارف هذلولی کدامند؟ نمودار یکی از معادلات را رسم کنید و در آن رأسها، کانونها، محورها، و مجانبها را مشخص کنید. خروج از مرکز هذلولی چه مقداری می تواند داشته باشد؟

۶. معادله $PF = e \cdot PD$ را شرح دهید.

۷. اگر در معادله زیر A, B, C همه صفر نباشند، درباره نمودار معادله چه می توانید بگویید؟

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

از روی عدد $B^2 - 4AC$ چه می فهمید؟

۸. معادلات انتقال و دوران محورها را بنویسید هر دو دسته از این معادلات را با نمودار توضیح دهید. در این فصل از انتقال و دوران چگونه استفاده می شود؟

۹. معادلات پارامتری دایره، سهمی و بیضی را بنویسید. در هر مورد، دامنه پارامتر را چنان تعیین کنید که این مقاطع مخروطی دقیقاً يك بار پیموده شوند.

۱۰. معادلات پارامتری یکی از شاخه های هذلولی را بنویسید. اگر بخواهیم با این معادلات خم فقط يك بار پیموده شود، دامنه مناسب برای پارامتر چیست؟

۱۱. چرخزاد چیست؟ معادلات پارامتری متداول برای يك چرخزاد چیست؟

مسأله های گوناگون

۱. فرض کنید $P(x, y)$ نقطه ای از خم

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

و $P'(kx, ky)$ نقطه ای از خط OP ، گذرنده از مبدأ و P ، باشد. اگر k ثابت فرض شود، وقتی P بر خم C حرکت کند، برای خم

حاصل از حرکت P' معادله ای بیابید.

۲. تقارن نسبت به دایره. دو نقطه P و Q را نسبت به يك دایره متقارن نامند هرگاه هر دو بر یکی از پرتوهای واقع باشند که از مرکز صادر می شود، و حاصلضرب فواصلشان از مرکز برابر با مربع شعاع دایره باشد. اگر Q بر خط $x^2 + y^2 - 5 = 0$ سیر کند، مسیر نقطه P که نسبت به دایره $x^2 + y^2 = 4$ با Q متقارن است، چیست؟

۳. نقطه $P(x, y)$ چنان حرکت می کند که نسبت فواصلش از دو نقطه ثابت، عدد ثابتی چون k است. نشان دهید که مسیر دایره است هرگاه $k \neq 1$ ، و خط مستقیم است هرگاه $k = 1$.

۴. مرکز و شعاع دایره ای را بیابید که از نقاط $A(2, 0)$ و $B(6, 0)$ می گذرد و بر خم $x^2 = y$ مماس است.

۵. مرکز دایره ای را بیابید که از نقطه $(0, 1)$ می گذرد، و در $(2, 4)$ بر خم $x^2 = y$ مماس است.

۶. ماشین حساب اگر مقدار n ، (الف) ۱، (ب) ۲، (پ) ۱۰۰ باشد نمودار $x^{2n} + y^{2n} = a^{2n}$ را رسم کنید. در هر مورد این خم کجا خط $x = y$ را قطع می کند؟

۷. معادله ای برای سهمی با کانون $(4, 0)$ و هادی $x = 3$ بنویسید. سهمی را بکشید، و رأس، کانون، و هادی آن را مشخص کنید.

۸. مطلوب است رأس، کانون، و هادی سهمی

$$x^2 - 6x - 12y + 9 = 0.$$

۹. نشان دهید که اگر در نقطه ای چون P که در مبدأ نیست خطی بر سهمی $kx = y^2$ مماس کنیم، آنگاه محور y بخشی از مماس را که بین محور x و P واقع است نصف می کند.

۱۰. اگر از يك نقطه P واقع بر سهمی $kx = y^2$ خطوطی موازی محورهای مختصات رسم کنیم، ناحیه محصور بین این خطوط و محورها توسط سهمی به دو ناحیه کوچکتر تقسیم می شود.

(الف) اگر این دو ناحیه کوچکتر حول محور y دوران کنند، نشان دهید که نسبت حجمهای دو جسم حاصل ۴:۱ است.

(ب) اگر این دو ناحیه حول محور x دوران کنند، نسبت حجمهای دو جسم حاصل چیست؟

۱۱. نشان دهید که اوساط وترهایی از سهمی $xy = 4$ که شیب آنها m باشد، بر يك خط مستقیم قرار می گیرند؛ معادله خط را نیز بیابید.

۱۲. خط گذرنده از کانون F و نقطه $P(x_1, y_1)$ واقع بر سهمی $4px = y^2$ ، سهمی را در نقطه دیگری چون $Q(x_2, y_2)$ قطع

۲۳. معادله بیضی را بنویسید که خروج از مرکزش $2/3$ ، یکی از رأسهایش $(3, 1)$ ، و کانون نزدیک به آن $(1, 1)$ باشد.

۲۴. پاره خطی به طول $a+b$ در ربع اول واقع است، و از محور x تا محور y امتداد دارد. نقطه P واقع بر این پاره خط از یک انتها a واحد، و از انتهای دیگر b واحد فاصله دارد. نشان دهید که وقتی دو انتهای این پاره خط بر محورهای می لغزند، P یک مسیر بیضوی را می پیماید.

۲۵. یک بیضی را که در وضع متعارف قرارداد به محل جدیدی در صفحه منتقل می کنیم و معادله آن به صورت زیر درمی آید

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0.$$

چه انتقالی صورت گرفته است؟ مختصات مرکز بیضی در وضع جدید چیست؟

۲۶. مخزنی را به این ترتیب می سازیم که یک نوار حلبی به عنوان دیوار به دور یک بیضی می کشیم، و یک طرف آن را بر روی یک ورق هموار لحیم می کنیم. چند سانتیمتر آب در مخزن می ریزیم، و یکی از انگشتان خود را درست در یکی از کانونهای بیضی وارد آب می کنیم. موج ایجاد شده به دیوار مخزن برخورد می کند و از آنجا منعکس می شود، و پس از مدت کوتاهی از کانون دیگر یک قطره آب به بالا می پرد. چرا؟

۲۷. انتگرالهایی را به دست آورید که (الف) مساحت یک ربع از دایره $x^2 + y^2 = a^2$ ، (ب) مساحت یک ربع از بیضی $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ را به دست دهند. نشان دهید که انتگرال (ب)، b/a برابر انتگرال (الف) است. حال مساحت بیضی را از روی مساحت دایره که معلوم است به دست آورید.

۲۸. طناب متصل به وزنه. طنابی که یک انتهای آن حلقه دارد مطابق با شکل به دور دو میخ که در امتداد یک خط افقی اند، کشیده شده است. انتهای آزاد پس از گذاشتن از حلقه، به وزنه ای وصل شده و طناب را سفت نگه داشته است. اگر طناب بتواند آزادانه برمیخیزد و بر حلقه بلغزد، وزنه تا حد ممکن پایین می آید. فرض کنید که طول طناب دست کم چهار برابر فاصله بین میخها، و شکل طناب نسبت به خط قسمت قائم طناب متقارن باشد.

(الف) زاویه A در شکل را بیابید (شکل ۶۱۰۸).

(ب) نشان دهید که به ازای هر موضع ثابت حلقه بر طناب، مکانهای حلقه در فضا بر یک بیضی قرار می گیرند که کانونهایش میخها هستند.

(پ) با تلفیق کردن نتیجه مذکور در (ب) و این فرض که طناب و وزنه به وضعی قرار می گیرند که انرژی پتانسیل مینیمال شود، فرض تقارن اولیه را توجیه کنید.

می کند. مختصات Q را بر حسب y و p بیابید. اگر خط گذرنده از P و مبدأ، هادی را در R قطع کند، ثابت کنید که QR با محور سهمی موازی است.

۱۳. سهمی نیم مکعبی. مطلوب است تعیین نقطه (یا نقاط) واقع بر خم $x^3 = y^2$ که نزدیکترین نقطه (یا نقاط) به نقطه $P(0, 4)$ باشد (باشند). خم و کوتاهترین پاره خط از P تا خم را بکشید.

۱۴. مسیر حرکت ستاره دنباله داری یک مدار سهموی است که خورشید در کانون آن است. وقتی ستاره دنباله دار به 4×10^7 مایلی خورشید می رسد، خط گذرنده از خورشید و ستاره با قسمتی از محور مدار که در جهت باز شدن سهمی رسم شده یک زاویه 60° می سازد. ستاره چقدر به خورشید نزدیک می شود؟

۱۵. فرض کنید خط مماس بر سهمی $y^2 = 4px$ در نقطه ای چون Q ، محور سهمی را در A قطع می کند، و خط گذرنده از Q و موازی با محور سهمی، هادی را در D قطع می کند. نشان دهید که Q, A, D ، و کانون F سهمی چهار رأس یک لوزی اند.

۱۶. اگر فاصله نقطه ای چون $P(x, y)$ از رأس سهمی $x^2 = 8y$ دو برابر فاصله آن تا کانون این سهمی باشد، معادله خم حاصل از حرکت P را بیابید. خم را مشخص کنید.

۱۷. ثابت کنید که مماس بر یک سهمی در نقطه ای چون P ، محور سهمی را در نقطه ای قطع می کند که فاصله اش تا رأس برابر است با فاصله P تا مماس بر سهمی در رأس آن.

۱۸. معادله ای برای یک بیضی با کانونهای $(1, 0)$ و $(5, 0)$ که یکی از رأسهای آن مبدأ است بنویسید.

۱۹. فرض کنید $F_1 = (3, 0)$ ، $F_2 = (0, 5)$ ، $F_3 = (-1, 3)$ ، $P =$ (الف) فواصل F_1P و F_2P را بیابید.

(ب) آیا مبدأ درون بیضی ماربر P با کانونهای F_1 و F_2 قرار می گیرد یا بیرون آن؟ چرا؟

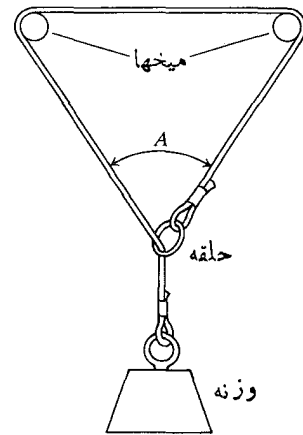
۲۰. خروج از مرکز و مرکز بیضی زیر را بیابید.

$$x^2 + 12y^2 - 6x - 48y + 9 = 0.$$

۲۱. خروج از مرکز، مرکز، کانونها، و رأسهای بیضی زیر را بیابید.

$$x^2 + 9y^2 - 6x - 36y - 99 = 0.$$

۲۲. نشان دهید خط $y = mx + c$ بر خم $Ax^2 + y^2 - 1 = 0$ مماس است اگر و تنها اگر ثابتهای A, m ، و c در معادله $m^2 = A(c^2 - 1)$ صدق کنند.



۶۱۰۸ مسأله ۲۸ می پرسد، وقتی وزنه، طناب را محکم می کشد، اندازه زاویه A چقدر خواهد بود؟

۲۹. فاصله بین دو ایستگاه را دار که بر یک خط شرقی-غربی قرار دارند ۲۰ km است. هواپیمایی با سرعت v_0 km/sec در ارتفاع پایین از غرب به شرق در حال پرواز است. در $t=0$ سیگنالی از ایستگاه $(0, -10)$ فرستاده می شود، به هواپیما برخورد می کند و برمی گردد، و پس از $30/c$ ثانیه به ایستگاه $(10, 0)$ می رسد (c سرعت سیگنال است). در $t=10/v_0$ سیگنال دیگری از ایستگاه $(0, -10)$ ارسال می شود، به هواپیما برخورد می کند و برمی گردد، و مجدداً پس از $30/c$ ثانیه در ایستگاه دیگر دریافت می شود. با این فرض که v_0 از c خیلی کوچکتر باشد، هواپیما هنگام برخورد سیگنال دوم با آن در کجاست؟

۳۰. مرکز، رأسها، کانونها، و مجانبهای هذلولی زیر را بیابید

$$3x^2 - y^2 + 12x - 6y = 0.$$

۳۱. مرکز، رأسها، کانونها، و مجانبهای هذلولی زیر را بیابید

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0.$$

۳۲. معادله هذلولی با خروج از مرکز $1/\sqrt{2}$ و رأسهای $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ را بیابید.

۳۳. اگر c ثابت مثبتی باشد، آنگاه

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2 - c^2} = 1, \quad c^2 < t^2$$

خانواده ای از بیضیها را تعریف می کند که هر یک با مقدار خاصی از t مشخص می شود، نشان دهید که هر عضو از خانواده

$$\frac{x^2}{t^2} - \frac{y^2}{c^2 - t^2} = 1, \quad t^2 < c^2$$

هر عضو از خانواده اول را تحت زاویه قائمه قطع می کند.

۳۴. نشان دهید که اگر مماس بر یک خم در نقطه ای چون $P(x, y)$ از مبدأ بگذرد، آنگاه در P ، $dy/dx = y/x$ ، سپس، نشان دهید که از مبدأ نمی توان مماسی بر هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ رسم کرد.

۳۵. در یک مثلث، دو رأس A و B ثابت هستند. رأس سوم، $C(x, y)$ ، طوری حرکت می کند که $\angle A = 2(\angle B)$. مسیر حرکت C را بیابید.

۳۶. فرض کنید p و q دو عدد مثبت اند که $q < p$. اگر r عدد دیگری باشد، ثابت کنید که

$$\frac{x^2}{p-r} + \frac{y^2}{q-r} = 1$$

معادله (الف) یک بیضی است. هرگاه $r < q$ ، (ب) یک هذلولی است هرگاه $q < r < p$ ، و (پ) معادله چیزی نیست هرگاه $r < p$. ثابت کنید که کانونهای این بیضیها و این هذلولیها برهم منطبق اند، و این کانونها را بیابید.

۳۷. در یک سطح تراز صدای تفنگ و صدای گلوله که به هدف می خورد همزمان به گوش می رسد. شنونده در کجا قرار دارد؟

۳۸. نشان دهید که هر مماس بر هذلولی $xy = a^2$ همراه با مجانبهای هذلولی مثلثی به مساحت $2a^2$ تشکیل می دهند.

۳۹. خروج از مرکز هذلولی $xy = 1$ را بیابید.

۴۰. روی خم $x^2 - 2xy - 3y^2 + 3 = 0$ تمام نقاطی را بیابید که خط مماس بر خم در آن نقاط بر خط $x + y = 1$ عمود باشد. خم را مشخص کنید.

۴۱. خطی چون PT بر خم $xy = x + y$ در نقطه $P(-2, 2/3)$ مماس است. معادلات دو خط قائم بر این خم و عمود بر PT را بیابید.

۴۲. معادله مماس بر خم

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y - 6 = 0$$

را در نقطه $(2, 2)$ بیابید. خم را مشخص کنید.

۴۳. معادله

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

معادله یک مقطع مخروطی است. پارامترهای این معادله را چنان بیابید که دارای ویژگیهای زیر باشد
(الف) نسبت به مبدأ متقارن باشد؛

نشان دهید که $dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2$ و

$$x dy - y dx = x' dy' - y' dx'$$

لذا کمیت‌های $dx^2 + dy^2$ و $x dy - y dx$ در اثر دوران محورها تغییر نمی‌کنند.

در مسائل ۴۹-۵۸، چه نقاطی در معادلات و نامعادلات صدق می‌کنند؟ در مورد هر مسأله شکلی بکشید.

$$0.49 \quad (2x + y - 2)(x^2 + y^2 - 4)(x^2 - y) = 0$$

$$0.50 \quad (x^2 + 4y)(x^2 - y^2 - 1)(x^2 +$$

$$y^2 - 25)(x^2 + 4y^2 - 4) = 0$$

$$0.51 \quad (x + y)(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

$$0.52 \quad (y - x + 2)(2y + x - 4) = 0$$

$$0.53 \quad (x^2/a^2) + (y^2/b^2) \leq 1$$

$$0.54 \quad (x^2/a^2) - (y^2/b^2) \leq 1$$

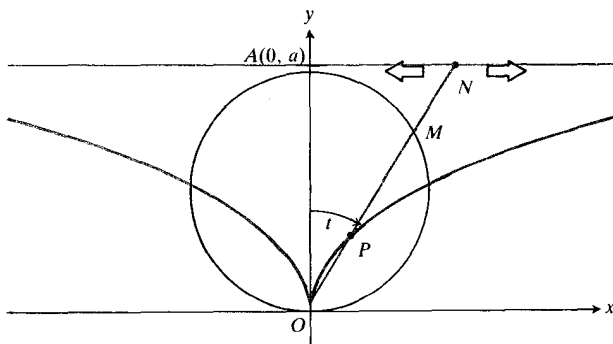
$$0.55 \quad (9x^2 + 4y^2 - 36)(4x^2 + 9y^2 - 36) \leq 0$$

$$0.56 \quad (9x^2 + 4y^2 - 36)(4x^2 + 9y^2 - 36) > 0$$

$$0.57 \quad x^4 - (y^2 - 9)^2 = 0$$

$$0.58 \quad x^2 + xy + y^2 < 3$$

۵۹. وقتی نقطه N در امتداد خط $y = a$ در شکل ۶۲.۸ حرکت می‌کند، حرکت نقطه P چنان است که $OP = MN$. معادلات پارسامتری مختصات P را به صورت توابعی از زاویه t که خط ON با قسمت مثبت محور y می‌سازد، بنویسید.



۶۲.۸ شکل مسأله ۵۹.

۶۰. شکل ۶۳.۸ دایره‌ای به شعاع a را نشان می‌دهد که درون

(ب) از نقطه $(1, 0)$ بگذرد؛

(پ) خط $y = 1$ در نقطه $(-2, 1)$ بر آن مماس باشد.

۴۴. نشان دهید که معادله $xy - x - y - 1 = 0$ يك هذلولی را نمایش می‌دهد. مرکز، رأسها، کانونها، محورها، و مجانبهای این هذلولی را بیابید. همه آنها را با رسم شکل مشخص کنید.

۴۵. نشان دهید که معادله $\sqrt{2}y - 2xy = 2$ يك هذلولی را نشان می‌دهد. مرکز، رأسها، کانونها، محورها، و مجانبهای آن را بیابید.

۴۶. الف) نشان دهید که خط

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2 = 0$$

بر بیضی $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ در نقطه (x_1, y_1) مماس است.

(ب) نشان دهید که خط

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 - a^2b^2 = 0$$

بر هذلولی $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ در نقطه (x_1, y_1) مماس است.

(پ) نشان دهید که مماس بر مقطع مخروطی

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

در نقطه (x_1, y_1) واقع بر آن، معادله‌ای به صورت زیر دارد

$$Axx_1 + B\left(\frac{x_1y + xy_1}{2}\right) + Cyy_1$$

$$+ D\left(\frac{x + x_1}{2}\right) + E\left(\frac{y + y_1}{2}\right) + F = 0.$$

۴۷. معادله $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ پس از دوران محورها در خلاف جهت ساعت به اندازه زاویه $\pi/4$ رادیان به چه صورت درمی‌آید؟ در معادله جدید، رادیکالها را از بین ببرید، و شکل خم را مشخص کنید.

۴۸. اگر

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

آنگاه

$$dx = dx' \cos \alpha - dy' \sin \alpha$$

$$dy = dx' \sin \alpha + dy' \cos \alpha.$$

را انتگرال

$$2a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt$$

به دست می‌دهد که در آن e خروج از مرکز بیضی است.

ب) انتگرال مذکور در (الف) را یک انتگرال بیضوی می‌نامند. این انتگرال هیچ پاد مشتق مقدماتی ندارد. اگر $a=1$ و $e=1/2$ ، طول محیط بیضی را به کمک قاعده دوزنقه‌ای با ضابطه $n=10$ ، برآورد کنید.

ب) قدر مطلق مشتق دوم $f(t) = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}$ از ۱ کمتر است. بر این اساس، معادله (۸) بخش ۹.۴ در مورد خطای تقریب مذکور در (ب) چه برآوردی به دست می‌دهد؟

۶۶. مطلوب است مرکز جرم یک ورق نازک به چگالی ثابت $\delta=1$ و محدود به محور x و یک طاق از چرخزاد

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

$$(\text{دانهمایی: } dA = y dx = y(dx/dt) dt)$$

خمهای متعامد

دو خم را متعامد نامند هرگاه در هر یک از نقاط تقاطع آنها، زاویه بین خطهای مماس بر دو خم قائمه باشد. مسائل ۶۷-۷۰ مربوط به مقاطع مخروطی متعامدند.

۶۷. خمهای $xy=2$ و $x^2 - y^2 = 3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که یکدیگر را تحت زاویه قائمه قطع می‌کنند.

۶۸. خمهای $y^2 = 4x + 4$ و $y^2 = 16x - 64$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که یکدیگر را تحت زاویه قائمه قطع می‌کنند.

۶۹. نشان دهید که به ازای همه مقادیر ثابت a و $k (a \neq 0, k \neq 0)$ خمهای $2x^2 + 3y^2 = a^2$ و $ky^2 = x^3$ متعامدند. چهار خم متناظر با $a=2, a=4, k=1/2, k=-2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۷۰. نشان دهید سهمیهایی

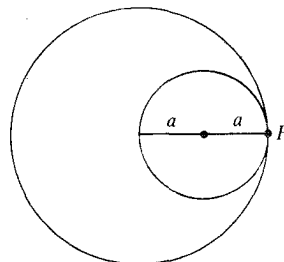
$$y^2 = 2a(a-x)$$

و

$$y^2 = 2b(b+x)$$

که در آنها $a > 0$ و $b > 0$ ، به ازای همه مقادیر a و b ، قانون مشترکی دارند. نشان دهید که سهمیها در نقطه‌های

دایره‌ای به شعاع $2a$ است. نقطه P که در شکل به صورت یک نقطه تماس مشخص شده است، به دایره کوچکتر وصل است. مطلوب است تعیین مسیر حرکت نقطه P وقتی دایره کوچکتر در درون دایره بزرگتر می‌چرخد.



۶۳.۸ دایره‌های مربوط به مسئله ۶۰.

۶۱. چرخشی به شعاع 2 in با سرعت زاویه‌ای 2 radians/sec در امتداد محور x می‌غلند. مطلوب است تعیین معادلات پارامتری خم حاصل از حرکت یک نقطه واقع بر یکی از پره‌های چرخ و به فاصله 2 اینچی مرکز چرخ، با این شرط که در زمان $t=0$ ، نقطه در $(0, 2)$ باشد.

۶۲. نشان دهید که شیب چرخزاد

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

برابر است با $dy/dx = \cot(t/2)$. در حالت خاصی که t برابر با 0 یا 2π است، مماس بر چرخزاد به صورت قائم است.

۶۳. نشان دهید که اگر $b < a$ ، شیب چرخه‌زاد

$$x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t$$

همواره منتهای است.

۶۴. مطلوب است تعیین معادلات پارامتری و معادله دکارتی شکل حاصل از حرکت نقطه $P(x, y)$ اگر

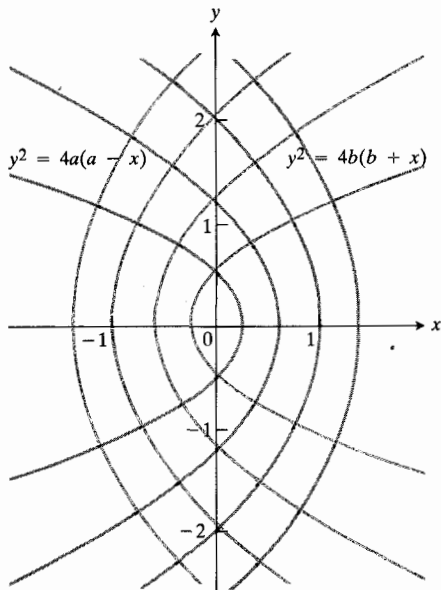
$$\frac{dx}{dt} = -2y, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

و وقتی $t=0$ ، $x=3$ و $y=0$. شکل را مشخص کنید.

۶۵. ماشین حساب انتگرال بیضوی.

الف) نشان دهید که محیط بیضی

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



$(a-b, \pm 2\sqrt{ab})$ یکدیگر را قطع می کنند، و هر سهمی از خانواده اول بر هر سهمی از خانواده دوم عمود است. (با تغییر دادن a و b دو خانواده از سهمیهای هم کانون به دست می آیند. هر خانواده را مجموعه ای از مسیرهای متعامد خانواده دیگر می نامند. شکل ۶۴.۸ را ببینید.)

۶۴.۸ برخی از سهمیهای مذکور درمسأله ۷۰.

تابعهای هیپر بولیک

چشم انداز

در مهندسی و فیزیک، برخی از ترکیبات e^* و e^{-*} در فرمولبندی جوابهای معادلات دیفرانسیل بسیار زیاد به کار می‌روند و از این رو، روی این گونه توابع نامهای خاصی می‌گذاریم و آنها را به طور مستقل مطالعه می‌کنیم. به دلایلی که در بخش ۱۰۹ توضیح داده خواهد شد، این ترکیبها را تابعهای هیپر بولیک می‌نامند. تابعهای هیپر بولیک برای توصیف حرکت موج در اجسام کشسان، شکل خطوط انتقال نیروی برق، توزیع دما در پره‌های فلزی که لوله‌های داغ را سرد می‌کنند، خمهای تعقیب (که بعداً درباره آنها بیشتر صحبت خواهیم کرد)، و هندسه نظریه نسبیت عام به کار می‌روند. طراحان طاق دوازده غرب در سنت لوئیس آمریکا، با استفاده از تابعهای هیپر بولیک نیروهای داخلی طاق را پیش‌بینی کردند، و خود طاق به شکل یک خم کسینوس هیپر بولیک است.

پس از معرفی توابع هیپر بولیک در بخش ۱۰۹ و بررسی مشتقات و انتگرالهای مربوط در بخش ۲۰۹، شکل کابل‌های آویزان را در بخش ۳۰۹ مطالعه خواهیم کرد. محاسبات مربوط به کابل‌های آویزان به طور طبیعی به توابع معکوس هیپر بولیک می‌انجامند. چنانکه در بخش ۴۰۹ خواهیم دید، توابع اخیر هم، به نوبه خود، تعدادی فرمول انتگرال جدید و مفید را به دست می‌دهند. این فرمولها و نظایر آنها در جدول‌های انتگرال زیاد به چشم می‌خورند.

۱۰۹ تعریفها و اتحادها

در این بخش، تابعهای سینوس هیپر بولیک، کسینوس هیپر بولیک،

تانژانت هیپر بولیک، کتانژانت هیپر بولیک، سکانت هیپر بولیک، و کسکانت هیپر بولیک را تعریف می‌کنیم و آنها را با شش تابع مثلثاتی یا «مستدیر» همنامشان مقایسه می‌کنیم. سینوس هیپر بولیک و کسینوس هیپر بولیک را با رابطه‌های زیر تعریف می‌کنند

$$\sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \quad \text{سینوس هیپر بولیک } u: \quad (1)$$

$$\cosh u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \quad \text{کسینوس هیپر بولیک } u:$$

سینوس هیپر بولیک و کسینوس هیپر بولیک با قواعدی به هم مربوط می‌شوند که بسیار شبیه قواعدی هستند که $\sin u$ و $\cos u$ را به هم ربط می‌دهند. و همان طور که می‌توان $\sin u$ و $\cos u$ را با نقطه (x, y) واقع بر دایره واحد $x^2 + y^2 = 1$ مشخص کرد، توابع $\sinh u$ و $\cosh u$ را نیز می‌توان با مختصات نقطه‌ای چون (x, y) واقع بر هذلولی واحد $x^2 - y^2 = 1$ مشخص ساخت. برای اینکه تحقیق کنیم نقطه به مختصات $x = \cosh u$ و $y = \sinh u$ بر هذلولی واحد واقع است، روابط مذکور در تعریف (۱) را در معادله هذلولی واحد قرار می‌دهیم

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u \stackrel{?}{=} 1$$



مثلثات، و اجسام سماوی در زیر افق

راجرکاتس (۱۶۸۲-۱۷۱۶)، آبراهام دمواور (۱۶۶۷-۱۷۵۲) و اثونهارت اوپلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) هر يك جنبه‌های خاصی از توابع هیپر بولیک را کشف کردند ولی اولین کسی که توابع هیپر بولیک را به شیوه‌ای اسلوبمند بررسی کرد، یوهان هاینریش لامبرت، ریاضیدان سوئیسی-آلمانی و دوست اوپلر، بود. لامبرت توابعی از يك زاویه را که با مراجعه به دایره واحد مشخص می‌شوند (توابع مستدیر) با توابعی مشابه از يك زاویه که مرجع آنها هذلولی متساوی‌الساقین است (توابع هیپر بولیک یا هذلولوی) کنار هم نهاد و در ارتباط باهم مطالعه کرد. انگیزه او در این کار، مطالعاتش در نجوم بود که اطلاعاتی [ریاضی] از اجسام سماوی در زیر افق را ایجاد می‌کرد. در مطالعات او، دانستن سینوس قوسی که اندازه‌اش يك عدد موهومی است، و به‌طور کلی توابع مثلثاتی چنین قوسهایی لازم بود. لامبرت از مثلثات هیپر بولیک برای این گونه محاسبات استفاده کرد.

$$\frac{1}{4}(e^{2u} + 2 + e^{-2u}) - \frac{1}{4}(e^{2u} - 2 + e^{-2u}) \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{1}{4}(e^{2u} + 2 + e^{-2u} - e^{2u} + 2 - e^{-2u}) \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{1}{4}(4) \stackrel{?}{=} 1. \quad (بله)$$

درواقع، اگر قرار دهیم

$$x = \cosh u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \quad (۲)$$

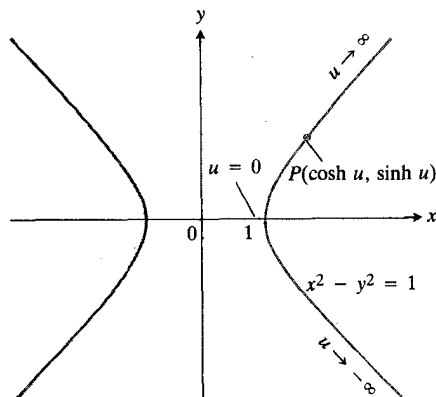
$$y = \sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$$

آنگاه وقتی u از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، نقطه $P(x, y)$ شاخه سمت راست هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را مشخص می‌سازد. در شکل ۱.۹ جهت ترسیم خم را به وسیله پیکانهای نشان داده‌ایم. چون e^u همیشه مثبت و $e^{-u} = 1/e^u$ نیز همیشه مثبت است، به ازای همه مقادیر حقیقی u ، $-\infty < u < \infty$ ، عبارت $x = \cosh u = (1/2)(e^u + e^{-u})$ هم مثبت است. پس نقطه $P(x, y)$ در سمت راست محور y است.

پس، اولین مطلبی که تاکنون در مثلثات هیپر بولیک ثابت کرده‌ایم، اتحاد اساسی زیر است

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1. \quad (۳)$$

این اتحاد شبیه است به اتحاد مثلثاتی معمولی $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ ولی با آن یکی نیست.



۱.۹ معادله‌های $x = \cosh u$ ، $y = \sinh u$ ، $-\infty < u < \infty$ ، معادله‌های پارامتری شاخه راست هذلولی واحد $x^2 - y^2 = 1$ هستند. (برای شاخه چپ، قرار می‌دهیم $x = -\cosh u$ ، $y = \sinh u$)

به دست می آوریم

$$\coth^2 u - 1 = \operatorname{csch}^2 u. \quad (۶)$$

همچنین از تعریفهای $\sinh u$ و $\cosh u$ در (۱) روابط زیر را نتیجه می گیریم

$$\cosh u + \sinh u = e^u \quad (۷)$$

و

$$\cosh u - \sinh u = e^{-u}. \quad (۸)$$

بنابراین، به جای هر ترکیب e^u و e^{-u} می توان ترکیبی از $\sinh u$ و $\cosh u$ قرارداد و به عکس.

چون e^{-u} مثبت است، معادله $\cosh u - \sinh u = e^{-u}$ نشان می دهد که $\cosh u$ همیشه بزرگتر از $\sinh u$ است. ولی، به ازای مقادیر مثبت بزرگ u ، e^{-u} کوچک است و $\cosh u$ تقریباً برابر با $\sinh u$ است.

نمودارهای توابع هیپر بولیک را در شکل ۲۰۹ می بینید.

توابع هیپر بولیک دیگر بر حسب $\sinh u$ و $\cosh u$ و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \quad \text{تانژانت هیپر بولیک:}$$

$$\coth u = \frac{\cosh u}{\sinh u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}} \quad \text{کوتانژانت هیپر بولیک:} \quad (۴)$$

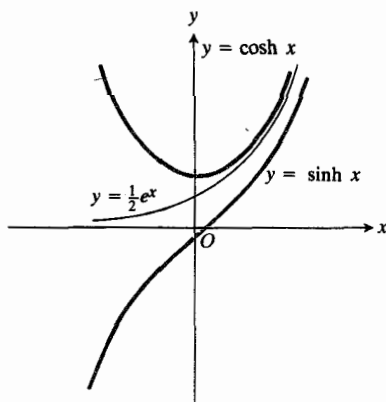
$$\operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}} \quad \text{سکانت هیپر بولیک:}$$

$$\operatorname{csch} u = \frac{1}{\sinh u} = \frac{2}{e^u - e^{-u}} \quad \text{کسکانت هیپر بولیک:}$$

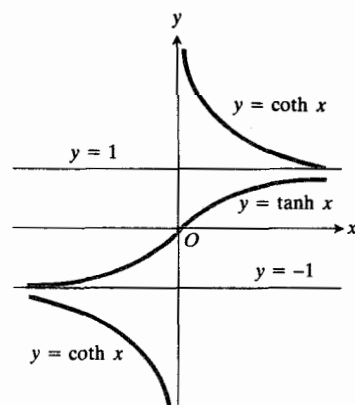
اگر طرفین اتحاد $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ را بر $\cosh^2 u$ تقسیم کنیم، به دست می آوریم

$$1 - \tanh^2 u = \operatorname{sech}^2 u. \quad (۵)$$

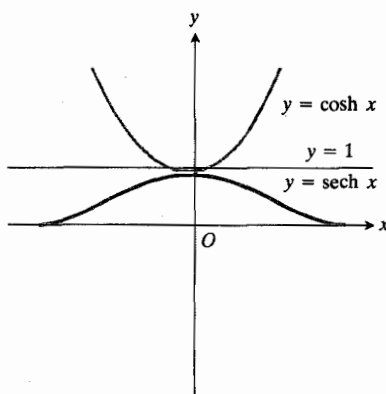
اگر طرفین $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ را بر $\sinh^2 u$ تقسیم کنیم،



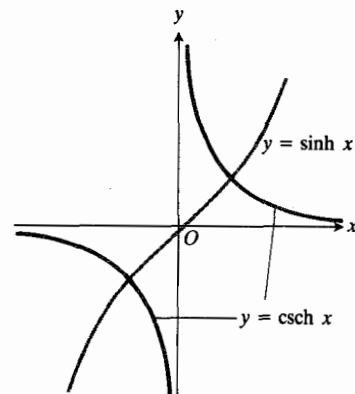
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

اتحادها

برای رسیدن از تعریفهای (۱) به اتحادهای زیر، فقط کمی عملیات جبری معمولی لازم است.

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad (۱۰)$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

اگر قرار دهیم $y = x$ ، این اتحادها نیز به نوبه خود روابط زیر را به دست می‌دهند.

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad (۱۱ \text{ الف})$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad (۱۱ \text{ ب})$$

اگر اتحاد (۱۱ ب) با اتحاد

$$1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x \quad (۳)$$

ترکیب شود، فرمولهای مفید «دو برابر زاویه» حاصل می‌گردد. اگر (۱۱ ب) و (۳) را باهم جمع کنیم، داریم

$$\cosh 2x + 1 = 2 \cosh^2 x. \quad (۱۲ \text{ الف})$$

و اگر (۳) را از (۱۱ ب) کم کنیم، به دست می‌آوریم

$$\cosh 2x - 1 = 2 \sinh^2 x. \quad (۱۲ \text{ ب})$$

با تقسیم (۱۲ الف) و (۱۲ ب) بر ۲ خواهیم داشت

$$\cosh^2 u = \frac{\cosh 2u + 1}{2} \quad (۱۲ \text{ پ})$$

$$\sinh^2 u = \frac{\cosh 2u - 1}{2}. \quad (۱۲ \text{ ت})$$

مسئله‌ها

در هر يك از مسئله‌های ۱-۶ مقدار یکی از شش تابع هیپر بولیک u

مقایسه تابعهای هیپر بولیک با تابعهای مثلثاتی

چون $\cosh 0 = 1$ و $\sinh 0 = 0$ ، توابع هیپر بولیک (هر شش‌تای آنها) در صفر همان مقادیری را دارند که توابع مثلثاتی متناظر دارند.

کسینوس هیپر بولیک، تابعی زوج است زیرا به ازای همه x ها،

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$$

سینوس هیپر بولیک تابعی فرد است زیرا به ازای همه x ها،

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x.$$

بنابراین، نمودار $y = \cosh x$ نسبت به محور y ، و نمودار $y = \sinh x$ نسبت به مبدأ متقارن است. در این مورد هم توابع هیپر بولیک مانند نظایر مثلثاتی‌شان رفتار می‌کنند.

با این همه، توابع هیپر بولیک و توابع مثلثاتی تفاوت‌های مهمی هم دارند. توابع مثلثاتی، تناوبی‌اند در حالی که توابع هیپر بولیک چنین نیستند. برد این دو نوع توابع نیز بسیار متفاوت است:

$\sin x$ بین -1 و $+1$ نوسان می‌کند؛

$\sinh x$ بین $-\infty$ و $+\infty$ دائماً صعود می‌کند.

$\cos x$ بین -1 و $+1$ نوسان می‌کند؛

$\cosh x$ از $+\infty$ تا $+1$ و از آن تا $+\infty$ تغییر می‌کند.

$|\sec x|$ هیچگاه کوچکتر از ۱ نیست؛

$\operatorname{sech} x$ هیچگاه بزرگتر از ۱ نیست و همواره مثبت است.

$\tan x$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند؛

$\tanh x$ از -1 تا $+1$ تغییر می‌کند.

تفاوت دیگر، در رفتار این توابع وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ نهفته

است. درباره رفتار توابع مستدیر $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ ، و نظایر آنها به ازای مقادیر بزرگ x حکم چندان مشخصی نمی‌توان داد. ولی رفتار توابع هیپر بولیک بسیار شبیه رفتار $e^x/2$ ، $e^{-x}/2$ ،

یا توابع ثابت صفر و یک است:

به ازای x های منفی و $|x|$ بزرگ

$$\cosh x \approx -\sinh x \approx \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\tanh x \approx \coth x \approx -1$$

$$\operatorname{sech} x \approx -\operatorname{csch} x \approx 2e^x \approx 0$$

به ازای x های بزرگ و مثبت

$$\cosh x \approx \sinh x \approx \frac{1}{2}e^x$$

$$\tanh x \approx \coth x \approx 1$$

$$\operatorname{sech} x \approx \operatorname{csch} x \approx 2e^{-x} \approx 0$$

(۹)

$$\sinh x \cosh x \quad ۰۲۱$$

$$(\sinh x)^2 \quad ۰۲۲$$

$$\operatorname{sech} x + \cosh x \quad ۰۲۳$$

$$\sinh x + \cosh x \quad ۰۲۴$$

درمسلله‌های ۲۵ و ۲۶، معادله داده شده را نسبت به x حل کنید.

$$\cosh x = \sinh x + \frac{1}{y} \quad ۰۲۵$$

$$\tanh x = \frac{3}{5} \quad ۰۲۶$$

درمسلله‌های ۲۷ و ۲۸، درستی اتحادهای داده شده را تحقیق کنید.

$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v \quad ۰۲۷$$

$$\cosh(u+v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v \quad ۰۲۸$$

با استفاده از اتحادهای مذکور درمسلله‌های ۲۷ و ۲۸، اتحادهای زیر را استنتاج کنید.

$$\sinh(u-v) = \sinh u \cosh v - \cosh u \sinh v \quad ۰۲۹$$

$$\cosh(u-v) = \cosh u \cosh v - \sinh u \sinh v \quad ۰۳۰$$

با استفاده از اتحادهای مذکور درمسلله‌های ۲۷-۳۰، درستی اتحادهای مسأله‌های ۳۱-۳۶ را تحقیق کنید.

$$\sinh u \cosh v = \frac{1}{y} \sinh(u+v) + \frac{1}{y} \sinh(u-v) \quad ۰۳۱$$

$$\cosh u \sinh v = \frac{1}{y} \sinh(u+v) - \frac{1}{y} \sinh(u-v) \quad ۰۳۲$$

$$\cosh u \cosh v = \frac{1}{y} \cosh(u+v) + \frac{1}{y} \cosh(u-v) \quad ۰۳۳$$

$$\sinh u \sinh v = \frac{1}{y} \cosh(u+v) - \frac{1}{y} \cosh(u-v) \quad ۰۳۴$$

$$\sinh 3u = \sinh^3 u + 3 \cosh^2 u \sinh u \quad ۰۳۵$$

$$= 3 \sinh u + 2 \sinh^3 u$$

$$\cosh 3u = \cosh u + 3 \sinh^2 u \cosh u \quad ۰۳۶$$

$$= 2 \cosh^3 u - 3 \cosh u$$

۰۳۷. نشان دهید که

$$\sinh^3 u - \sinh^3 v = \cosh^3 u - \cosh^3 v.$$

داده می‌شود. با استفاده از تعریفها و اتحادهایی که در متن آوردیم، مقادیر پنج تابع هیپر بولیک دیگر را معین کنید.

$$\sinh u = -\frac{3}{4} \quad ۰۱$$

$$\cosh u = \frac{17}{15}, \quad u > 0 \quad ۰۲$$

$$\tanh u = -\frac{7}{25} \quad ۰۳$$

$$\coth u = \frac{13}{12} \quad ۰۴$$

$$\operatorname{sech} u = \frac{3}{5} \quad ۰۵$$

$$\operatorname{csch} u = \frac{5}{12} \quad ۰۶$$

در هر يك از مسأله‌های ۷-۱۴، عبارت داده شده را بر حسب توابع نمایی بنویسید. نتیجه نهایی را تا حد امکان ساده کنید.

$$2 \cosh(\ln x) \quad ۰۷$$

$$\sinh(2 \ln x) \quad ۰۸$$

$$\tanh(\ln x) \quad ۰۹$$

$$\frac{1}{\cosh x - \sinh x} \quad ۰۱۰$$

$$\cosh 5x + \sinh 5x \quad ۰۱۱$$

$$(\sinh x + \cosh x)^2 \quad ۰۱۲$$

$$\cosh 3x - \sinh 3x \quad ۰۱۳$$

$$\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x) \quad ۰۱۴$$

در هر يك از مسأله‌های ۱۵-۲۴، معین کنید که تابع داده شده زوج است یا فرد یا هیچکدام.

$$\tanh x \quad ۰۱۵$$

$$\coth x \quad ۰۱۶$$

$$\operatorname{sech} x \quad ۰۱۷$$

$$\operatorname{csch} x \quad ۰۱۸$$

$$\cosh 3x \quad ۰۱۹$$

$$\sinh 2x \quad ۰۲۰$$

$$y = \tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}$$

به صورت يك كسر مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{d(\tanh u)}{dx} &= \frac{\cosh u(d(\sinh u)/dx) - \sinh u(d(\cosh u)/dx)}{\cosh^2 u} \\ &= \frac{\cosh^2 u(du/dx) - \sinh^2 u(du/dx)}{\cosh^2 u} \\ &= \frac{(\cosh^2 u - \sinh^2 u)(du/dx)}{\cosh^2 u} = \frac{1}{\cosh^2 u} \frac{du}{dx} \\ &= \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

سایر فرمولها را هم می توان به روش مشابه استنتاج کرد و آنها را در زیر می بینید.

$$\frac{d(\tanh u)}{dx} = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\coth u)}{dx} = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\operatorname{sech} u)}{dx} = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\operatorname{csch} u)}{dx} = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

این فرمولهای مشتق، فرمولهای انتگرال زیر را تولید می کنند

$$\int \sinh u \, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C \quad (۴)$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$$

۰۳۹ نشان دهید که معادله های

$$x = -\cosh u, \quad y = \sinh u, \quad -\infty < u < \infty$$

معادله های پارامتری شاخه چپ هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ هستند.

۰۴۰ نشان دهید که خط مماس بر هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ در نقطه $P(\cosh u, \sinh u)$ محور x را در نقطه $(\operatorname{sech} u, 0)$ و، اگر قائم نباشد، محور y را در نقطه $(0, -\operatorname{csch} u)$ قطع می کند.

۰۴۱ نشان دهید که r ، فاصله از مبدأ O تا نقطه $P(\cosh u, \sinh u)$ واقع بر هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ ، برابر است با $r = \sqrt{\cosh^2 u}$.

۰۴۲ نشان دهید که در شکل ۱۰۹ خط مماس بر هذلولی در رأس آن، خط OP را در نقطه $(1, \tanh u)$ قطع می کند. از اینجا، تعبیری هندسی از $\tanh u$ به دست می آید.

۰۴۳ اگر θ در بازه $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ باشد و $\sinh x = \tan \theta$ ، نشان دهید که $\cosh x = \sec \theta$ ، $\operatorname{csch} x = \cot \theta$ ، $\coth x = \csc \theta$ ، $\tanh x = \sin \theta$ و $\operatorname{sech} x = \cos \theta$.



TOOLKIT PROGRAMS

Function Evaluator Super * Grapher

۲.۹ مشتقها و انتگرالها

شش تابع هیپر بولیک مورد بحث، ترکیبات گویایی از تابع مشتقپذیر e^u هستند و بنا بر این، در هر نقطه ای که تعریف می شوند، مشتق دارند. در این بخش، پی می بریم که این مشتقها چه هستند و به انتگرالهایی که شامل توابع هیپر بولیک هستند، نظری می افکنیم.

فرض می کنیم u يك تابع مشتقپذیر از x است و از

$$\sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}), \quad \cosh u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \quad (۱)$$

نسبت به x مشتق می گیریم. با به کارگیری فرمولهای

$$\frac{de^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx}, \quad \frac{de^{-u}}{dx} = e^{-u} \frac{d(-u)}{dx} = -e^{-u} \frac{du}{dx}$$

روابط زیر را به دست می آوریم

$$\frac{d(\sinh u)}{dx} = \cosh u \frac{du}{dx}, \quad \frac{d(\cosh u)}{dx} = \sinh u \frac{du}{dx} \quad (۲)$$

$$\int_0^{\ln 4} e^x \sinh x \, dx.$$

حل: بنا به تعریف $\sinh x$ داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 4} e^x \sinh x \, dx &= \int_0^{\ln 4} e^x \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \, dx \\ &= \int_0^{\ln 4} \frac{e^{2x} - 1}{2} \, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{x}{2} \right]_0^{\ln 4} \\ &= \frac{e^{2 \ln 4}}{2} - \frac{\ln 4}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^{\ln 16}}{2} - \frac{2 \ln 2}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 8 - \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{15}{2} - \ln 2. \end{aligned}$$

مثال ۵ مساحت ناحیه‌ای نامتناهی را که در ربع اول و بین خم $y = \tanh x$ و خط $y = 1$ واقع است، پیدا کنید.

حل: ناحیه را مشخص می‌کنیم (شکل ۳۰۹) و توجه می‌کنیم که مساحت از انتگرال غیرعادی زیر به دست می‌آید

$$\int_0^{\infty} (1 - \tanh x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b (1 - \tanh x) \, dx.$$

مقدار انتگرال سمت راست بر حسب b برابر است با

$$\begin{aligned} \int_0^b (1 - \tanh x) \, dx &= \int_0^b \left(1 - \frac{\sinh x}{\cosh x} \right) \, dx \\ &= \left[x - \ln \cosh x \right]_0^b \\ &= b - \ln \cosh b \\ &= \ln e^b - \ln \cosh b \\ &= \ln \frac{e^b}{\cosh b} = \ln \frac{2e^b}{e^b + e^{-b}} \\ &= \ln \frac{2}{1 + e^{-2b}}. \end{aligned}$$

بنابراین، مقدار انتگرال غیرعادی برابر است با

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (1 - \tanh x) \, dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{2}{1 + e^{-2b}} \\ &= \ln \frac{2}{1 + 0} = \ln 2. \end{aligned}$$

مساحت برابر با $\ln 2$ است.

$$\int \coth \delta x \, dx.$$

حل:

$$\begin{aligned} \int \coth \delta x \, dx &= \int \frac{\cosh \delta x}{\sinh \delta x} \, dx \\ &= \frac{1}{\delta} \int \frac{du}{u} \quad (u = \sinh \delta x) \\ &= \frac{1}{\delta} \ln |u| + C = \frac{1}{\delta} \ln |\sinh \delta x| + C. \end{aligned}$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبه

$$\int_0^1 \sinh^2 x \, dx.$$

حل: بنا به اتحاد (۱۲) در بخش ۱۰۹ داریم

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sinh^2 x \, dx &= \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2} \, dx \\ &= \left[\frac{\sinh 2x}{2} - \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{\sinh 2}{2} - \frac{1}{2} \\ &\approx 0.40672. \end{aligned}$$

مثال ۳ مطلوب است محاسبه

$$\int x \sinh x \, dx.$$

حل: انتگرالگیری جزء به جزء. فرض می‌کنیم

$$u = x, \quad dv = \sinh x \, dx, \quad v = \cosh x$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int x \sinh x \, dx &= x \cosh x - \int \cosh x \, dx \\ &= x \cosh x - \sinh x + C. \end{aligned}$$

۰۱۸ نشان دهید که

$$\int \operatorname{csch} x dx = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C.$$

درمسأله‌های ۱۹-۲۸، انتگرال را محاسبه کنید.

$$\int_{-1}^1 \cosh 5x dx \quad ۰۱۹$$

$$\int_{-1}^0 \cosh(2x+1) dx \quad ۰۲۰$$

$$\int_{-2}^2 \sinh x dx \quad ۰۲۱$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tanh 2x dx \quad ۰۲۲$$

$$\int_0^1 x \cosh x dx \quad ۰۲۳$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x dx \quad ۰۲۴$$

$$\int_0^{1/2} \frac{\sinh x}{e^x} dx \quad ۰۲۵$$

$$\int_0^{\ln 2} 2e^x \cosh x dx \quad ۰۲۶$$

$$\int_0^1 \sinh \sqrt{x} dx \quad ۰۲۷$$

$$\int_1^2 \frac{\cosh(\ln x) dx}{x} \quad ۰۲۸$$

درمسأله‌های ۲۹-۴۶، انتگرال را محاسبه کنید.

$$\int \cosh(2x+1) dx \quad ۰۲۹$$

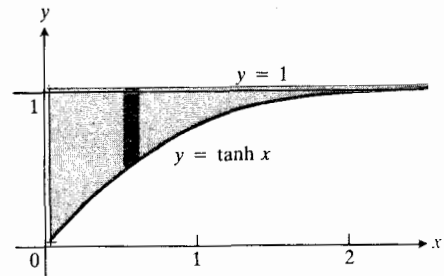
$$\int \tanh x dx \quad ۰۳۰$$

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} dx \quad ۰۳۱$$

$$\int \frac{2 dx}{(e^x + e^{-x})^2} \quad ۰۳۲$$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad ۰۳۳$$

کتاب، جزوه، نمونه سوال



۳۰۹ مساحت ناحیه بین $y = \tanh x$ و $y = 1$ در ربع اول را می‌توان با یک انتگرال غیرعادی محاسبه کرد. همان‌طور که در مثال ۵ نشان داده شده مساحت برابر با $\ln 2$ است.

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱-۱۶، dy/dx را بیابید.

$$y = \sinh 3x \quad ۰۱$$

$$y = \cosh^2 5x \quad ۰۲$$

$$y = \cosh^2 5x - \sinh^2 5x \quad ۰۳$$

$$y = \tanh 2x \quad ۰۴$$

$$y = \coth(\tan x) \quad ۰۵$$

$$y = \operatorname{sech}^3 x \quad ۰۶$$

$$y = 2 \operatorname{csch}(x/2) \quad ۰۷$$

$$\sinh y = \tan x \quad ۰۸$$

$$y = \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x \quad ۰۹$$

$$y = \operatorname{csch}^2 x \quad ۰۱۰$$

$$y = \sin^{-1}(\tanh x) \quad ۰۱۱$$

$$y = x - (1/2) \coth 2x \quad ۰۱۲$$

$$y = \ln |\tanh(x/2)| \quad ۰۱۳$$

$$y = x^2 \sinh x \quad ۰۱۴$$

$$y = x \sinh 2x - (1/2) \cosh 2x \quad ۰۱۵$$

$$y = x \sinh x - \cosh x \quad ۰۱۶$$

۰۱۷ نشان دهید که

$$\int \operatorname{sech} x dx = \sin^{-1}(\tanh x) + C.$$

$$\int e^{2x} \cosh 2x dx \quad ۰۴۹$$

$$\int \tanh^2 x dx \quad ۰۵۰$$

۰۵۱ الف) مطلوب است محاسبه $\int \operatorname{csch} x dx$ برای انجام دادن این محاسبه، انتگرال ده را در

$$\frac{\operatorname{csch} x + \coth x}{\operatorname{csch} x + \coth x}$$

ضرب کنید و از نتیجه حاصل، انتگرال بگیرید.

ب) نشان دهید پاسخی که در (الف) به دست آوردید، معادل است با پاسخ مسأله ۰۱۸.

۰۵۲ مساحت ناحیه‌ای نامتناهی را که در ربع اول و بین خمهای $y = \sinh x$ و $y = \cosh x$ واقع است، حساب کنید.

۰۵۳ ناحیه بین خمهای $y = \sinh x$ و $y = \cosh x$ و خطهای $x = 0$ و $x = 3$ حول محور x دوران می‌کند و جسمی تولید می‌کند. حجم این جسم را بیابید.

۰۵۴ مطلوب است طول خم $y = \cosh x$ ، $0 \leq x \leq 1$.

۰۵۵ مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران قوس $y = \cosh x$ ، $0 \leq x \leq \ln 2$ حول محور x پدید می‌آید.

۰۵۶ مطلوب است محاسبه حجم جسمی که از دوران کل خم $y = \operatorname{sech} x$ ، $-\infty < x < \infty$ ، حول محور x پدید می‌آید.

۰۵۷ ناحیه‌ای در ربع اول واقع است و از پایین به محور x ، از چپ به خط $x = \ln 2$ ، و از بالا به خم $y = \operatorname{csch} x$ محدود است. حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول محور x را بیابید.

۰۵۸ فرض کنید R نشان دهنده ناحیه‌ای در ربع اول باشد که بین خمهای $y = \sinh x$ و $y = \cosh x$ واقع است.

الف) يك حجم متناهی: حجمی را بیابید که با دوران R حول محور y پدید می‌آید.

ب) يك حجم نامتناهی: نشان دهید حجمی که با دوران R حول محور x پدید می‌آید، نامتناهی است.

۰۵۹ با استفاده از فرمول انتگرال در مسأله ۰۱۷، مرکز جرم ورقه همگن نازکی را بیابید که ناحیه نامتناهی محدود به محور x و خم $y = \operatorname{sech} x$ را می‌پوشاند.

۰۶۰ مطلوب است مرکز جرم سیم یکنواخت نازکی که در امتداد خم $y = \cosh x$ ، $0 \leq x \leq \ln 2$ قرار دارد.

۰۶۱ ناحیه واقع در ربع اول بین خم $y = \tanh x$ و خط $y = 1$

$$\int \tanh^2 x dx \quad ۰۳۴$$

$$\int \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad ۰۳۵$$

$$\int \cosh^2 x dx \quad ۰۳۶$$

$$\int \sqrt{\cosh x - 1} dx \quad ۰۳۷$$

$$\int \cosh^2 x dx \quad ۰۳۸$$

$$\int \cosh x \sinh x dx \quad ۰۳۹$$

$$\int \cosh^2 x dx \quad ۰۴۰$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} dx \quad ۰۴۱$$

$$\int x^2 \sinh x dx \quad ۰۴۲$$

$$\int x^2 \cosh x dx \quad ۰۴۳$$

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} dx \quad ۰۴۴$$

(راهنمایی: در تمرین ۴۴ صورت و مخرج انتگرال ده را در e^x ضرب کنید.)

$$\int \operatorname{sech}^2 x \tanh x dx \quad ۰۴۵$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x \coth x dx \quad ۰۴۶$$

در مسأله‌های ۴۷-۵۰، انتگرال را با استفاده از جدول به دست آورید.

$$\int \sinh^2 x dx \quad ۰۴۷$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x dx \quad ۰۴۸$$

ب) از معادله اخیر $A(u)$ را به دست آورید. مقدار $A(0)$ چیست؟

۶۳. الف) نشان دهید که تابع

$$y = A \cosh x + B \sinh x + C \cos x + D \sin x$$

جوابی از معادله دیفرانسیل زیر است

$$y^{(4)} - y = 0.$$

(در فرمول y ، A ، B ، C ، و D ثابت اند.)

ب) y به ازای چه مقادیری از A ، B ، C ، و D در شرایط اولیه زیر صدق می کند؟

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 2.$$

۶۴. ریشه یاب عددی یا ماشین حساب برنامه پذیر برای یافتن بسامدها (فرکانسها)ی طبیعی ارتعاش تیری که در دوانتهایش محکم شده است، باید معادلاتی به شکل زیر را حل کنیم

$$\cosh x \cos x = 1.$$

الف) خمهای $y = \cosh x$ و $y = 1/\cosh x$ را در یک نمودار مشترک رسم کنید. معادله $\cosh x \cos x = 1$ چند جواب دارد؟

ب) با استفاده از روش نیوتن یا روش ریشه یابی دیگری، مقدار کوچکترین جواب مثبت معادله زیر را برآورد کنید

$$\cosh x \cos x = 1.$$

۶۵. نشان دهید که توابع

$$x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sinh t}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sinh t}{\sqrt{3}} + \cosh \frac{t}{\sqrt{3}}$$

همراه باهم در معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} + 2 \frac{dy}{dt} + x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + y = 0$$

و شرایط اولیه $x(0) = 0$ ، $y(0) = 1$ صدق می کنند. این گونه دستگاههای معادلات دیفرانسیل غالباً جوابهایی به صورت توابع هذلولوی دارند.

حول محور x دوران می کند و جسمی نامتناهی پدید می آورد. حجم این جسم را بیابید.

۶۶. یکی از تشابهات بین توابع هذلولوی و مستدیر این است که متغیر u در معادلات پارامتری

$$x = \cosh u, \quad y = \sinh u, \quad -\infty < u < \infty$$

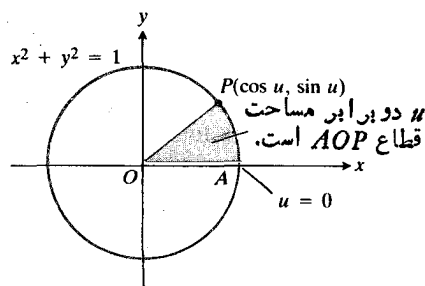
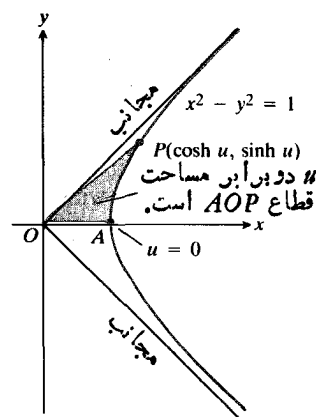
برای شاخه راست هذلولوی $x^2 - y^2 = 1$ ، عبارت است از دو برابر مساحت قطاع AOP که در شکل ۴.۹ نشان داده شده است. برای اینکه ببینید چرا چنین است، اعمال زیر را انجام دهید.

الف) نشان دهید که مساحت $A(u)$ ی قطاع AOP از فرمول زیر به دست می آید

$$A(u) = \frac{1}{4} \cosh u \sinh u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

ب) از دو طرف معادله قسمت (الف) مشتق بگیرید و نشان دهید که

$$A'(u) = \frac{1}{4}.$$



۴.۹. یکی از تشابهات بین توابع هذلولوی و مستدیر با این دو نمودار آشکار می شود. مسأله ۶۶ را ببینید.



TOOLKIT PROGRAMS

Root Finder Super * Grapher

۳.۹ کابل آویزان

در این بخش نشان می‌دهیم که بندهای رخت، زنجیرها، خطوط تلفن، و خطوط انتقال برق بین دو تکیه‌گاه همیشه به شکل یک خم کسینوس هیپر بولیک آویزان هستند. در مقابل اینها، کابل‌های پله‌ای معلقی که به‌طور آزاد آویزان نیستند بلکه بار یکنواختی را در امتداد افقی تحمل می‌کنند، به‌شکل سهمی قرار می‌گیرند (بخش ۳.۸، مسأله ۳۲).

نقطه آغاز توصیف ریاضی شکل یک کابل آویزان، این نکته است که نیروهای وارد بر هر قطعه از کابلی که در حال سکون آویزان است باید یکدیگر را خنثی کنند. این نکته از آنجا واضح است که کابل در این حالت حرکت نمی‌کند. اگر قطعه‌ای از کابل را که از پایینترین نقطه آن، A ، تا نقطه‌ای مانند P واقع بر کابل امتداد دارد در نظر بگیریم و نیروهای وارد بر این قطعه را بررسی کنیم، درمی‌یابیم که این نیروها عبارت‌اند از

۱. کشش افقی در A

۲. کشش مماسی در P ، و

۳. نیرویی روبه پایین که گرانش بر این قطعه از کابل اعمال می‌کند.

شکل ۵.۹ یک قطعه نمونه‌وار از کابل و نیروهایی را که بر آن اثر می‌کنند نشان می‌دهد. کشش افقی در A با پیکانی به طول H که به سمت چپ اشاره دارد، نشان داده می‌شود. کشش مماسی در P با ترسیم پیکانی به طول T و به سمت بالا و راست در امتداد مماس بر کابل در P به نمایش درمی‌آید. نیروی گرانش با پیکانی که مستقیماً به سمت پایین متوجه است، نشان داده می‌شود. طول این پیکان، ws ، وزن قطعه کابل است که به‌صورت حاصلضرب وزن کابل در طول واحد، w ، و طول قطعه، s ، بیان می‌گردد. کشش در P دارای یک مؤلفه افقی با اندازه $T \cos \phi$ ، و یک مؤلفه قائم با اندازه $T \sin \phi$ است.

برای استفاده کامل از این اطلاع که نیروهای وارد بر قطعه AP در حال تعادل‌اند، یک دستگاه مختصات در صفحه‌ای که کابل در آن آویزان است (شکل ۶.۹) در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که کابل در امتداد یک خم مشتق‌پذیر در آن صفحه قرار دارد. به این ترتیب می‌توانیم معادلاتی برای ارتباط بین T ، H ، و ws بنویسیم، و از این معادلات، فرمولی برای خم استخراج کنیم. محور x را عمود بر نیروی گرانش و محور y را محور قائم در نظر می‌گیریم به طوری که قسمت مثبت محور y از A بگذرد. فعلاً مختص y نقطه A را y_0 می‌گیریم. بعداً مقداری برای y_0 خواهیم یافت که معادله کابل را در این دستگاه مختصات بسیار ساده می‌کند.

زاویه ϕ که مماس بر کابل در P با امتداد افقی می‌سازد، زاویه میل خط مماس نیز هست. بنابراین، شیب dy/dx خمی که کابل روی آن واقع است در P دارای مقدار $\tan \phi$ است. در A ، یعنی پایینترین نقطه خم، $dy/dx = 0$.

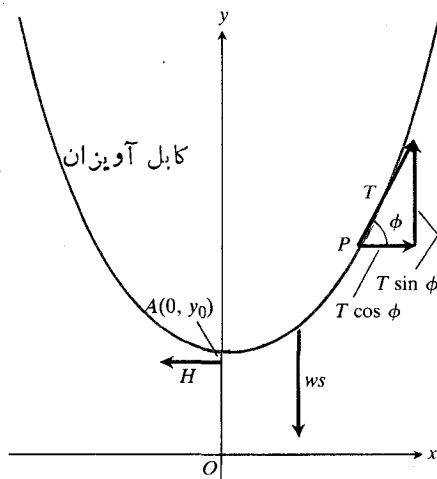
چون قطعه AP کابل به سمت چپ و راست حرکت نمی‌کند، اندازه مؤلفه افقی کشش در P دقیقاً برابر است با کشش افقی در A

$$T \cos \phi = H. \quad (1)$$

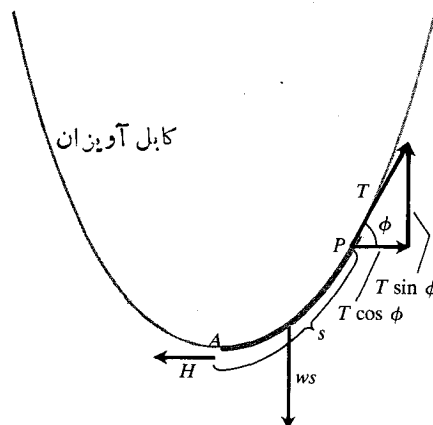
همچنین، این واقعیت که قطعه AP به سمت پایین و بالا حرکت نمی‌کند حاکی از آن است که اندازه مؤلفه قائم کشش در P برابر است با وزن قطعه کابل

$$T \sin \phi = ws. \quad (2)$$

این دو واقعیت، تنها مطالبی است که در بساط کابل آویزان



۶.۹ برای مشخص کردن شکل یک کابل آویزان، فرض می‌کنیم کابل را بر خمی در یک صفحه مختصات منطبق کرده‌ایم.



۵.۹ نیروهای وارد بر قطعه نمونه AP از یک کابل آویزان. روی هر یک از پیکانها طول مربوطه نوشته شده است.

با توجه به اینکه در زمینه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم تجربه چندانی کسب نکرده ایم و با ملاحظه اینکه معادله (۷) یک معادله مرتبه اول بر حسب متغیر dy/dx است، می توانیم تجربه ای را که در مورد معادلات مرتبه اول داریم به کار بگیریم. اگر dy/dx را با تک حرف p نشان دهیم و بنویسیم

$$\frac{dy}{dx} = p$$

آنگاه مشتق دوم چنین می شود

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

و معادله (۷) به این صورت درمی آید

$$\frac{dp}{dx} = a\sqrt{1+p^2}.$$

از اینجا به دست می آوریم

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = a dx$$

و

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int a dx = ax + C. \quad (8)$$

انتگرال سمت چپ با جانشانیهای زیر محاسبه می شود

$$p = \sinh u, \quad dp = \cosh u du$$

$$1+p^2 = 1+\sinh^2 u = \cosh^2 u.$$

داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} &= \int \frac{\cosh u du}{\sqrt{\cosh^2 u}} \\ &= \int \frac{\cosh u du}{\cosh u} \quad (\cosh u > 0) \quad (9) \\ &= \int du = u + C'. \end{aligned}$$

تابع $p = \sinh u$ ، که تابعی صعودی از u است، دارای معکوس $u = \sinh^{-1} p$ است. بنابراین می توان نوشت

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \sinh^{-1} p + C'. \quad (10)$$

معادله اخیر را با معادله (۸) ترکیب می کنیم تا معادله زیر

می دانیم و اگر بخواهیم شکل کابل را از طریق یافتن y به صورت تابعی از x معین کنیم، این واقعیات نقطه شروع کارند. تنها اطلاع دیگری که در دست داریم، و محصول این دستگاه مختصات و فرض مشتق پذیر بودن خمی است که کابل بر آن واقع است، این است که

$$\frac{dy}{dx} = \tan \phi. \quad (3)$$

اهمیت معادله (۳) در این است که x و y را وارد کار می کند، زیرا می توان نوشت

$$\frac{dy}{dx} = \tan \phi = \frac{T \sin \phi}{T \cos \phi} = \frac{ws}{H}$$

و یا به اختصار

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ws}{H}. \quad (4)$$

معادله هایی که تاکنون به دست آورده ایم راهی در اختیار ما نمی گذارند که بتوانیم s را مستقیماً بر حسب x و y بیان کنیم؛ ولی با اطلاعاتی که درباره طول قوس داریم می دانیم که

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (5)$$

بنابراین، اگر از طرفین معادله (۴) نسبت به x مشتق بگیریم و به جای ds/dx حاصل، $\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$ را قرار دهیم، می توانیم s را از معادله (۴) حذف کنیم

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (6)$$

حال معادله ای در دست داریم که نشان می دهد مختصات نقاط روی کابل آویزان چگونه به هم مربوط اند.

برای یافتن y به صورت تابعی از x ، معادله (۶) را تحت شرایط اولیه زیر حل می کنیم

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{کابل در } x=0 \text{ افقی است}).$$

$$y(0) = y_0 \quad (\text{کابل در } y=y_0 \text{ محور } y \text{ را قطع می کند}).$$

برای اینکه کار آسانتر شود می توانیم موقتاً به جای w/H یک تک حرف، مثلاً a ، را بگذاریم. در این صورت، معادله (۶) چنین می شود

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (7)$$

خم کابل آویزان به صورت زیر درمی آید

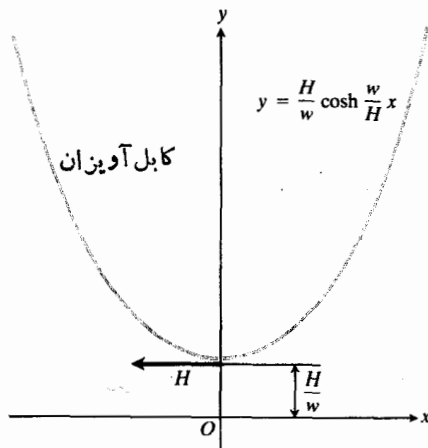
به دست آید

$$y = \frac{1}{a} \cosh ax = \frac{H}{w} \cosh \frac{w}{H} x. \quad (13)$$

آنچه درباره شکل يك کابل آویزان آموختیم، به طور خلاصه این است: اگر دستگاه مختصاتی برای صفحه کابل برگزینیم که در آن محور x افقی باشد، نیروی گرانش مستقیماً به سمت پایین و قسمت مثبت محور y مستقیماً به سمت بالا متوجه باشد، و پایینترین نقطه کابل در نقطه $y = H/w$ بر محور y واقع باشد، آنگاه کابل در امتداد نمودار کسینوس هیپر بولیک

$$y = \frac{H}{w} \cosh \frac{w}{H} x \quad (14)$$

قرار دارد. شکل ۷.۹ را ببینید.



۷.۹ در دستگاه مختصاتی که انتخاب آن به گونه ای بوده که H و w به شکلی که دیده می شود بسا هم مرتبط باشند، يك کابل آویزان روی خم کسینوس هیپر بولیک

$$y = (H/w) \cosh(wx/H)$$

قرار دارد.

نکته ۱ اگر می خواهید بدانید که چرا در محاسبه انتگرال در معادله (۸) از جانشانی $p = \sinh u$ استفاده کردیم و نه از $p = \tanh u$ ، پاسخ این است که جانشانی تانژانت به عبارتی لگاریتمی برای p می انجامد که انتگرال گیری از آن دشوار است.

نکته ۲ نتیجه ای که در مورد کابل های آویزان به دست آوردیم، شکل طاق دروازه غرب در سنت لوئیس را هم توجیه می کند. وقتی کابلی به طور آزاد آویزان است، همه نیروهای داخلی اش در تعادل اند و

$$\sinh^{-1} p = ax + C_1 \quad (11)$$

که در آن، $C_1 = C - C'$.

شرط اولیه

$$p(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0$$

مقدار C_1 را معین می سازد

$$C_1 = \sinh^{-1}(0) - a \cdot 0 = 0.$$

بنابراین

$$\sinh^{-1} p = ax$$

و

$$p = \sinh ax. \quad (12)$$

اگر معادله (۱۲) را بر حسب x و y باز نویسی کنیم، به صورت زیر درمی آید

$$\frac{dy}{dx} = \sinh ax$$

این معادله را به آسانی نسبت به y حل می کنیم و به دست می آوریم

$$y = \frac{1}{a} \cosh ax + C_2.$$

شرط اولیه دیگر، $y(0) = y_0$ ، C_2 را معین می کند

$$y(0) = \frac{1}{a} \cosh 0 + C_2$$

$$y_0 = \frac{1}{a} + C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{a} - y_0.$$

اکنون به عقب برمی گردیم و دستگاه مختصات را نسبت به کابل چنان تنظیم می کنیم که مقدار y_0 در

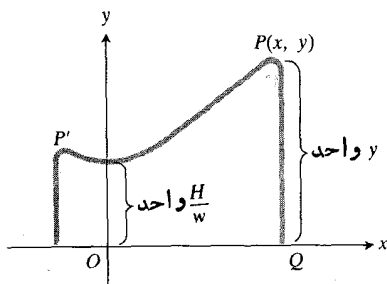
$$y_0 = \frac{1}{a} = \frac{H}{w}$$

قرار گیرد. به این ترتیب، C_2 برابر با صفر می شود و معادله نهایی

صدق می کند که از روی آن T را می یابیم

$$\begin{aligned} T &= H \sec \phi = H \sqrt{1 + \tan^2 \phi} \\ &= H \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{w}{H} x} = H \sqrt{\cosh^2 \frac{w}{H} x} \\ &= H \cosh \frac{w}{H} x = w \frac{H}{w} \cosh \frac{w}{H} x = w y. \end{aligned}$$

این مطلب که در هر نقطه از کابل آویزان در دستگاه مختصات انتخاب شده T برابر با wy است، چه معنایی دارد؟ معنایش این است که اندازه کشش در $P(x, y)$ دقیقاً برابر است با وزن y واحد از کابل. بنابراین، اگر قسمتی از کابل را که در سمت راست P است در این نقطه از روی میله بدون اصطکاکی بگذرانیم تا مستقیماً به سمت پایین آویزان شود و کابل را در نقطه Q ، که در آنجا محور x را قطع می کند، ببریم (شکل ۹.۹)، وزن قطعه PQ از کابل دقیقاً به اندازه ای است که مانع از لغزیدن کابل در P می شود. از این رو، می توان کابل را از روی دو میله بدون اصطکاک گذراند و آویزان کرد بدون آنکه بلغزد، مشروط به آنکه دو انتهای کابل به محور x برسد.



۹.۹ اگر محورهای طوری قرار گیرند که پایینترین نقطه کابل یکنواخت به فاصله H/w واحد در بالای محور x باشد، آنگاه کشش در هر نقطه $P(x, y)$ روی کابل دقیقاً برابر است با وزن قطعه ای از کابل که y واحد طول دارد.

خم $y = a \cosh(x/a)$ را گاهی یک خم زننجیری یا کاتناری می نامند. کاتناری از واژه لاتینی کاتنا گرفته شده که به معنی «زننجیر» است. محور x را هادی خم زننجیری می گویند. فاصله هر دو تیر برق از یکدیگر معمولاً ۳۵۰ فوت است. خط معمولی انتقال برق که سیمی مسی است، در محل رسیدن به هر تیر برق دارای کششی برابر ۶۹۰ پوند است (که ناشی از پیچیده شدن سیم به دور قرقره است). در چنین شرایطی، سیم یک زاویه تقریباً 2° با امتداد افقی می سازد. همان طور که از روی معادله

هیچ نیروی جانبی در کار نیست که کابل را از شکل خودش خارج کند. اگر قوسی چنان ساخته شود که به شکل یک خم کسینوس هیپر بولیک آویزان باشد، هیچ نیروی جانبی در قوس وجود ندارد. حال اگر قوس را کاملاً برگردانیم و آن را به شکل طاقی درآوریم باز هم همه نیروها، که معکوس می شوند، در تعادل خواهند بود و هیچ نیروی جانبی در جهتی که باعث ریزش طاق شود، در کار نخواهد بود. پایداری ذاتی شکل کسینوس هیپر بولیک عاملی بود که مهندسان را به انتخاب این شکل برای طاق دروازه غوب برانگیخت.

مثال ۱ نشان دهید که در دستگاه مختصات شکل ۷.۹، اندازه نیروی کششی، T ، در هر نقطه $P(x, y)$ روی یک کابل آویزان، از معادله زیر به دست می آید

$$T = wy.$$

حل: دستگاه مختصاتی در نظر می گیریم که در آن، کابل روی خم

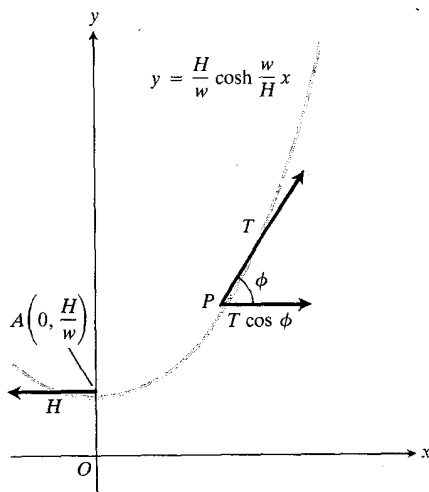
$$y = \frac{H}{w} \cosh \frac{w}{H} x$$

واقع باشد. نمودار قطعه ای از کابل را از نقطه $A(0, H/w)$ تا یک نقطه اختیاری بالاتر مانند $P(x, y)$ رسم می کنیم و کششها در A و P را نشان می دهیم (شکل ۸.۹) شیب کابل در P این است

$$\tan \phi = \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{w}{H} x.$$

کشش در P در معادله

$$T \cos \phi = H$$



۸.۹ همچنانکه در مثال ۱ توضیح داده شد، در این دستگاه مختصات داریم $T = wy$.

می توان ملاحظه کرد،

$$y = \sqrt{s^2 + a^2}.$$

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، dy/ds و dx/ds را حساب کنید و تحقیق کنید که $(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 = 1$.

۸. ماشین حساب یا جدول دوانتهای کابلی به طول ۳۲ فوت و به وزن ۲ پوند در فوت به دو نقطه هم ارتفاع که ۳۰ فوت از هم فاصله دارند، بسته شده است.

(الف) نشان دهید که ثابت a در معادله (۱۳) باید در معادله زیر صدق کند

$$\sinh u = \frac{16}{15}u, \quad u = \frac{15}{a}.$$

(مسأله ۷ الف را ببینید.)

(ب) نمودارهای خمهای $y_1 = \sinh u$ و $y_2 = (16/15)u$ را رسم کنید و (به کمک ماشین حساب یا جدول) نشان دهید که آنها (تقریباً) در $u = 0$ و $u = \pm 0.6$ یکدیگر را قطع می کنند.

(پ) با استفاده از نتایج قسمت (ب)، شکم کابل در مرکز آن را پیدا کنید.

(ت) با استفاده از نتایج قسمت (ب)، کشش کابل را در پایینترین نقطه آن پیدا کنید.

۹. ماشین حساب (الف) خط $y = (x/2) + 1$ خم زنجیری $y = \cosh x$ را در نقطه $(0, 1)$ قطع می کند. سعی کنید با استفاده از یک ماشین حساب شواهدی برای این واقعیت به دست آورید که این خط، خم زنجیری را تقریباً در نقطه $(1.4654, 0.9308)$ نیز قطع می کند.

(ب) دو تیر متوالی برق ۱۰۰ فوت از یکدیگر فاصله دارند. مقره ها هم ارتفاع هستند. اگر شکم (افت) کابل در مرکزش ۲۵ فوت باشد، مطلوب است بر آورد (i) طول کابل بین دو تیر، و (ii) کشش کابل در پایینترین نقطه اش اگر وزن آن برابر باشد با ۳۰ پوند بر فوت. (دانهایی: نخست a را با استفاده از معادله $\cosh(50/a) + 1 = (25/a)$ تقریب بسازید؛ این معادله عبارت است از معادله

$$\frac{x}{y} + 1 = \cosh x$$

با ضابطه $x = 50/a$.

$$H = T \cos \phi = T \cos 2^\circ$$

$$= (690)(0.99994) = 689.6 \quad (\text{گرد شده})$$

وقتی کابل به این صورت تقریباً بدون شکم است، T و H تفاوت اندکی با هم دارند. تفاوت این دو در سیم هایی قابل ملاحظه است که شکم بزرگتری دارند. اگر سیم با زاویه ای 60° نسبت به امتداد افقی به تیر وصل شده باشد، کشش آن در پایینترین نقطه اش فقط نصف کشش سیم در تیر برق است که این امر را می توان از روی معادله زیر ملاحظه کرد

$$H = T \cos 60^\circ = \frac{T}{2}.$$

مسأله ها

۱. مطلوب است محاسبه طول قطعه ای از خم زنجیری $y = a \cosh(x/a)$ که از $A(0, a)$ تا $P(x_1, y_1)$ ، $x_1 > 0$ ، امتداد دارد.

۲. اگر قطعه ای به طول s از خم زنجیری $y = a \cosh(x/a)$ از پایینترین نقطه خم اندازه گیری شود، نشان دهید که $dy/dx = s/a$.

۳. نشان دهید که مساحت ناحیه محدود به محور x ، خم زنجیری $y = a \cosh(x/a)$ ، محور y ، و خط قائم گذرنده از $P_1(x_1, y_1)$ ، $x_1 > 0$ ، برابر است با مساحت مستطیلی به ارتفاع a و قاعده s ، که s طول قوس از $A(0, a)$ تا P_1 است.

۴. خم زنجیری $y = a \cosh(x/a)$ حول محور x دوران می کند. مطلوب است مساحت رویه ای که به وسیله قسمتی از خم بین نقاط $A(0, a)$ و $P_1(x_1, y_1)$ ، $x_1 > 0$ ، پدید می آید. (از قضا، از میان همه خمهای پیوسته مشتق پذیر $y = f(x)$ ، $f(x) > 0$ ، از $A(0, a)$ تا $P_1(x_1, y_1)$ ، خم زنجیری، رویه دورانی با کمترین مساحت را تولید می کند.)

۵. مرکز جرم قوس خم زنجیری $y = a \cosh(x/a)$ بین دو نقطه متقارن $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(-x_1, y_1)$ را بیابید.

۶. مطلوب است محاسبه حجمی که از دوران ناحیه مسأله ۳ حول محور x پدید می آید.

۷. طول قوس AP (شکل ۸.۹) برابر است با $s = a \sinh(x/a)$. (الف) نشان دهید که مختصات $P(x, y)$ را می توان به صورت توابعی از طول قوس s ، به شکل زیر، بیان کرد:

$$x = a \sinh^{-1} \frac{s}{a}$$



TOOLKIT PROGRAMS

Root Finder Super * Grapher

۲.۹ تابعهای هیپر بولیک معکوس

همانطور که در بخش ۳.۹ دیدیم، جانشانیهای

$$p = \sinh u, \quad u = \sinh^{-1} p$$

به ما امکان می‌دهند که انتگرال

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

را محاسبه کنیم و نتیجه نهایی را بسازد دیگر بر حسب p بنویسیم. این جانشانیها به این دلیل به کار می‌آیند که تابع

$$y = \sinh x$$

تابعی صعودی از x است و بنا بر این، معکوس دارد. این تابع معکوس، مشتقپذیر نیز هست زیرا سینوس هیپر بولیک، مشتقپذیر است و مشتق آن هیچگاه صفر نیست؛ البته در بخش ۳.۹ از این واقعیت استفاده نکردیم.

در این بخش خواهیم دید که تابع سینوس هیپر بولیک از این لحاظ تنها نیست. همه توابع هیپر بولیک دارای معکوسهایی هستند که در انتگرالگیری مفیدند و نیز به عنوان توابعی مشتقپذیر به خودی خود هم جالب هستند.

معکوس تابعهای هیپر بولیک

چون

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad (۱)$$

به ازای هر مقدار x مثبت است، تابع سینوس هیپر بولیک تابعی

صعودی از x است و بنا بر این، معکوسی دارد که آن را به صورت

$$y = \sinh^{-1} x \quad (۲)$$

نشان می‌دهیم. این معادله به صورت « y برابر است با آرک سینوس هیپر بولیک x » خوانده می‌شود. به ازای هر مقدار x در بازه $-\infty < x < \infty$ ، مقدار $y = \sinh^{-1} x$ عددی است که سینوس هیپر بولیک آن x است. نمودارهای $y = \sinh x$ و $y = \sinh^{-1} x$ را در شکل ۱۰.۹ (الف) می‌بینید.

تابع $y = \cosh x$ ، همان طور که در شکل ۲.۹ (الف) به خوبی مشهود بود، یک به یک نیست. ولی تابع محدود شده

$$y = \cosh x, \quad x \geq 0 \quad (۳)$$

یک به یک است و بنا بر این، معکوسی دارد. این معکوس را به صورت

$$y = \cosh^{-1} x \quad (۴)$$

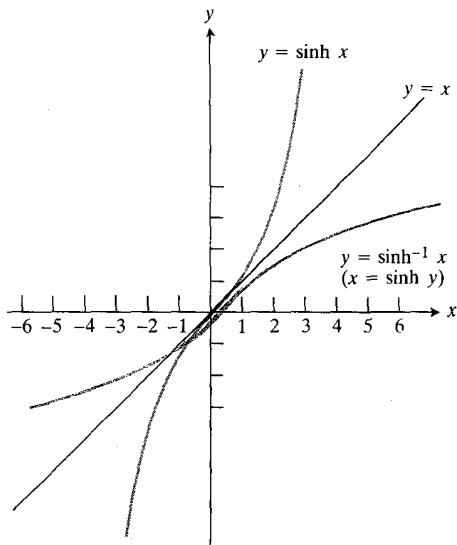
نشان می‌دهیم. به ازای هر مقدار $x \geq 1$ ، $y = \cosh^{-1} x$ عددی در بازه $0 \leq y < \infty$ است که کسینوس هیپر بولیک آن، x است. نمودارهای $y = \cosh x$ ، $x \geq 0$ و $y = \cosh^{-1} x$ را در شکل ۱۰.۹ (ب) می‌بینید.

تابع زیر نیز همانند $y = \cosh x$ یک به یک نیست

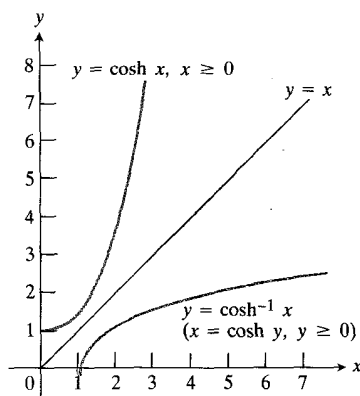
$$y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

ولی اگر به صورت زیر

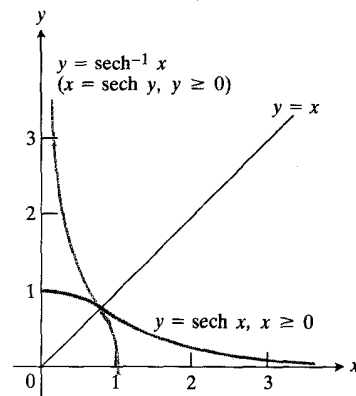
$$y = \operatorname{sech} x, \quad x \geq 0 \quad (۵)$$



(الف)



(ب)



(پ)

۱۰.۹ نمودارهای $y = \sinh^{-1} x$ ، $y = \cosh^{-1} x$ و $y = \operatorname{sech}^{-1} x$. به تقارن نسبت به خط $y = x$ توجه کنید.

$\tanh^{-1}x$ را به دست می‌دهد، این اتحادها مفید واقع می‌شوند. مقادیر عددی توابع هیپر بولیک معکوس در جداولی تهیه شده و در دسترس قرار دارند. همچنین بسیاری از انواع ماشین‌حسابهای علمی این مقادیر را تا هشت یا ده رقم اعشاری به دست می‌دهند. اگر ماشین حساب دکمه‌های مربوط به تابع هیپر بولیک را نداشته باشد، باز هم می‌توان تابعهای هیپر بولیک معکوس را محاسبه کرد و برای این کار کافی است که آنها را ابتدا بر حسب لگاریتم بیان کنیم. فرمولهای تبدیل در جدول زیر آمده است.

فرمولهای لگاریتمی برای محاسبه تابعهای هیپر بولیک معکوس

$$\sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right)$$

$$= \cosh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right), \quad 0 < x \leq 1$$

(۱۱)

$$\operatorname{csch}^{-1}x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} \right)$$

$$= \sinh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right), \quad x \neq 0$$

$$\operatorname{coth}^{-1}x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \tanh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right), \quad |x| > 1$$

به مقادیر نامنفی x محدود شود، قطعاً معکوس دارد. این معکوس را چنین نمایش می‌دهیم

$$y = \operatorname{sech}^{-1}x. \quad (۶)$$

به ازای هر مقدار x در بازه $(0, 1]$ ، $y = \operatorname{sech}^{-1}x$ عددی نامنفی است که سکانت هیپر بولیک آن، x است. نمودارهای $y = \operatorname{sech} x$ ، $y = \operatorname{sech}^{-1}x$ و $x \geq 0$ را در شکل ۱۰.۹ (ب) می‌بینید. تابعهای تانژانت هیپر بولیک، کتانژانت هیپر بولیک، و سکانت هیپر بولیک روی دامنه‌های خود یک به یک اند و بنا بر این معکوس دارند. این معکوسها را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$y = \tanh^{-1}x, \quad y = \operatorname{coth}^{-1}x, \quad x = \operatorname{csch}^{-1}x. \quad (۷)$$

نمودار اینها را در شکل ۱۱.۹ می‌بینید.

اتحادهای مفید

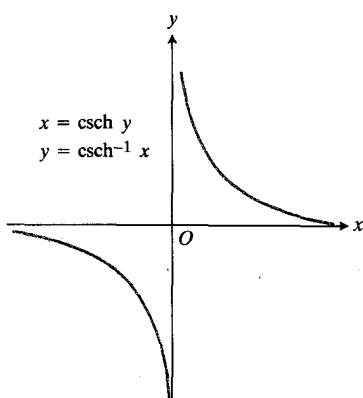
تابعهای سکانت، کسکانت، و کتانژانت هیپر بولیک معکوس در اتحادهای زیر صدق می‌کنند

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \cosh^{-1} \frac{1}{x} \quad (۸)$$

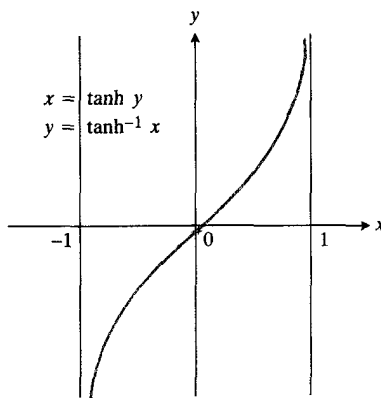
$$\operatorname{csch}^{-1}x = \sinh^{-1} \frac{1}{x} \quad (۹)$$

$$\operatorname{coth}^{-1}x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}. \quad (۱۰)$$

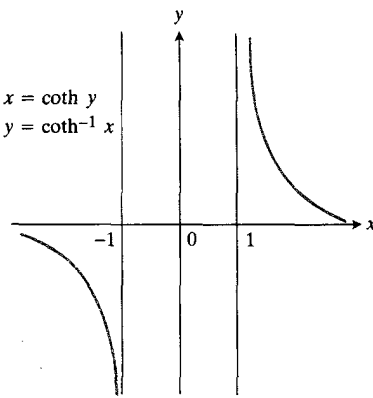
وقتی بخواهیم مقادیر $\operatorname{sech}^{-1}x$ ، $\operatorname{csch}^{-1}x$ و $\operatorname{coth}^{-1}x$ را با ماشین حسابی به دست آوریم که فقط $\sinh^{-1}x$ ، $\cosh^{-1}x$ و



(الف)



(ب)



(پ)

مشتقها و انتگرالها

مزیت عمدهٔ توابع هیپر بولیک معکوس، سودمندی آنها در انتگرالگیری است. وقتی فرمولهای زیر را برای مشتقهای این توابع استنتاج کردیم، این موضوع روشن خواهد شد.

$$\frac{d(\sinh^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx} \quad (13)$$

$$\frac{d(\cosh^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad u > 1 \quad (14)$$

$$\frac{d(\tanh^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1 \quad (15)$$

$$\frac{d(\coth^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| > 1 \quad (16)$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1}u)}{dx} = \frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}}, \quad 0 < u < 1 \quad (17)$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1}u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{1+u^2}}, \quad u \neq 0. \quad (18)$$

برای اینکه راه به دست آوردن این فرمولها را نشان دهیم، فرمول مربوط به مشتق $\cosh^{-1}u$ به ازای $u > 1$ را استنتاج می‌کنیم. (گسره $\cosh^{-1}u$ در $u=1$ تعریف می‌شود، انتظار نداریم که در آنجا مشتقپذیر باشد زیرا مماس بر نمودار، قائم است.)

مثال ۳ نشان دهید که اگر u تابع مشتقپذیری از x باشد که مقادیرش بزرگتر از ۱ هستند، آنگاه

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}.$$

حل: نخست مشتق $y = \cosh^{-1}x$ را برای x بزرگتر از ۱ می‌یابیم. به این منظور، از طرفین معادله $\cosh y = x$ نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\cosh y = x, \quad \frac{d}{dx} \cosh y = 1, \quad \sinh y \frac{dy}{dx} = 1.$$

طرفین آخرین رابطه را بر $\sinh y$ تقسیم می‌کنیم و به دست می‌آوریم

برای اینکه نشان دهیم فرمولهای لگاریتمی (۱۱) از کجا می‌آیند، فرمول مربوط به $\tanh^{-1}x$ را استنتاج می‌کنیم. فرمولهای دیگر را می‌توان به‌طور مشابه به دست آورد.

مثال ۱ فرمول زیر را به دست آورید

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

حل: فرض می‌کنیم $y = \tanh^{-1}x$. حال

$$\begin{aligned} x = \tanh y &= \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{(e^y - e^{-y})/2}{(e^y + e^{-y})/2} \\ &= \frac{e^y - (1/e^y)}{e^y + (1/e^y)} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}. \end{aligned}$$

اکنون این معادله را نسبت به e^{2y} حل می‌کنیم

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

$$1+x = e^{2y}(1-x)$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}.$$

با لگاریتم‌گیری از دو طرف رابطهٔ اخیر داریم

$$2y = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

از این رو

$$y = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1. \quad (12)$$

محدودیت $|x| < 1$ از این واقعیت ناشی می‌شود که $\tanh y$ به ازای هر مقدار y بین -1 و 1 قرار دارد. ■

مثال ۲

$$\tanh^{-1}0.25 = \frac{1}{2} \ln \frac{1.25}{0.75} = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 3) \approx 0.25541.$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\operatorname{csch}^{-1}|u| + C \quad .5$$

$$= -\sinh^{-1}\left(\frac{1}{|u|}\right) + C.$$

مثال ۴ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_0^{1/2} x \tanh^{-1} x \, dx.$$

حل: کار را با انتگرالگیری جزء به جزء آغاز می‌کنیم. با
جانشانیهای

$$u = \tanh^{-1} x$$

$$dv = x \, dx$$

$$du = \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$v = x^2$$

انتگرال نامعین به این صورت درمی‌آید

$$\begin{aligned} \int x \tanh^{-1} x \, dx &= x^2 \tanh^{-1} x - \int x^2 \frac{1}{1-x^2} dx \\ &= x^2 \tanh^{-1} x + \int \frac{x^2}{x^2-1} dx. \end{aligned} \quad (19)$$

انتگرالده سمت راست را می‌توان به کسرهای ساده تجزیه کرد

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2-1} &= 1 + \frac{1}{x^2-1} \quad (\text{با عمل تقسیم}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}. \end{aligned} \quad (20)$$

رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) همراه باهم رابطه زیر را به دست می‌دهند

$$\begin{aligned} \int x \tanh^{-1} x \, dx &= x^2 \tanh^{-1} x + x + \frac{1}{2} \ln|x-1| \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C \\ &= x^2 \tanh^{-1} x + x \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sinh y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} \quad \left(\begin{array}{l} \sinh y \text{ مثبت است زیرا} \\ y = \cosh^{-1} x \text{ مثبت است} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

و بالاخره، قاعده زنجیری را به شکل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

درمورد $y = \cosh^{-1} u$ به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}.$$

محدودیت‌های $|u| < 1$ و $|u| > 1$ در فرمولهای مشتق (۱۵) و (۱۶) از محدودیت‌هایی طبیعی ناشی می‌شود که درمورد مقادیر تانژانت و کتانژانت هیپر بولیک وجود دارد. (شکل ۱۱.۹ الف و ب را ببینید). وقتی فرمولهای مشتق را معکوس می‌کنیم تا فرمولهای انتگرال را به دست آوریم، تمایز بین $|u| < 1$ و $|u| > 1$ اهمیت پیدا می‌کند زیرا در غیر این صورت نمی‌توانیم بگوییم که انتگرال $1/(1-u^2)$ عبارت است از $\tanh^{-1} u + C$ یا $\coth^{-1} u + C$.

فرمولهای انتگرالگیری زیر مستقیماً از معادله‌های (۱۳) - (۱۸) نتیجه می‌شوند. انتگرالهای مذکور در فرمولهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را با جانشانیهای مثلثاتی نیز می‌توان به دست آورد و انتگرال موجود در فرمول ۳ به روش تجزیه به کسرهای ساده قابل محاسبه است. (مسأله‌های ۴۷-۵۰ را ببینید).

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \sinh^{-1} u + C \quad .1$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1} u + C, \quad u > 1 \quad .2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{1-u^2} &= \begin{cases} \tanh^{-1} u + C & |u| < 1 \\ \coth^{-1} u + C & |u| > 1 \end{cases} \quad .3 \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} &= -\operatorname{sech}^{-1}|u| + C \quad .4 \\ &= -\cosh^{-1}\left(\frac{1}{|u|}\right) + C \end{aligned}$$

برای محاسبه $\tanh^{-1}x$ در حدود مفروض انتگرالگیری، آن را به صورت یک لگاریتم بیان می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} 2x \tanh^{-1}x \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Bigg|_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{8} \ln \frac{3/2}{1/2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1/2}{3/2} \\ &= \frac{1}{8} \ln 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{8} \ln 3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 3 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \ln 3. \end{aligned}$$

مسئله‌ها

در مسئله‌های ۱-۱۶، با استفاده از فرمولهای لگاریتمی که در متن آمده مقادیر مورد نظر را بیابید.

۱. $\sinh^{-1}(0)$

۲. $\sinh^{-1}(3/2)$

۳. $\sinh^{-1}(-4/3)$

۴. $\sinh^{-1}(-5/12)$

۵. $\cosh^{-1}(5/2)$

۶. $\cosh^{-1}(5/3)$

۷. $\cosh^{-1}(2/\sqrt{3})$

۸. $\cosh^{-1}(13/12)$

۹. $\tanh^{-1}(1/2)$

۱۰. $\coth^{-1}(5/4)$

۱۱. $\coth^{-1}(-2)$

۱۲. $\tanh^{-1}(-3/5)$

۱۳. $\operatorname{sech}^{-1}(3/5)$

۱۴. $\operatorname{sech}^{-1}(2/5)$

۱۵. $\operatorname{csch}^{-1}(5/12)$

۱۶. $\operatorname{csch}^{-1}(-1/\sqrt{3})$

در مسئله‌های ۱۷-۳۲، dy/dx را بیابید.

۱۷. $y = \sinh^{-1}(2x)$

۱۸. $y = \tanh^{-1}(\cos x)$

۱۹. $y = \cosh^{-1}(\sec x)$

۲۰. $y = \coth^{-1}(\sec x)$

۲۱. $y = \operatorname{sech}^{-1}(\sin 2x)$

۲۲. $y = \cosh^{-1}x^2$

۲۳. $y = \sinh^{-1}\sqrt{x-1}$

۲۴. $y = \operatorname{csch}^{-1}(\tan x)$

۲۵. $y = \sinh^{-1}(1/x)$

۲۶. $y = \cosh^{-1}\sqrt{x+1}$

۲۷. $y = \sinh^{-1}(\tan x)$

۲۸. $y = \coth^{-1}(\csc x)$

۲۹. $y = \sqrt{1+x^2} - \sinh^{-1}\frac{1}{x}$

۳۰. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\cosh^{-1}x$

۳۱. $y = 2\cosh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}$

۳۲. $y = x^2 \operatorname{sech}^{-1}x - \sqrt{1-x^2}$

در مسئله‌های ۳۳-۴۶، انتگرالها را حساب کنید. با استفاده از فرمولهای لگاریتمی در معادلات (۱۱) محاسبه انتگرالهای معین را به انجام برسانید.

۳۳. $\int_0^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$

۳۴. $\int_0^{2\sqrt{e}} \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$

۳۵. $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1-x^2}$

در مسأله‌های ۵۱-۵۶، انتگرالها را به کمک جداول حساب کنید.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} dx \quad ۵۱$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2} dx \quad ۵۲$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-25}} dx \quad ۵۳$$

$$\int x^2 \sqrt{x^2+3} dx \quad ۵۴$$

$$\int \sqrt{x^2-4} dx \quad ۵۵$$

$$\int x^2 \sqrt{x^2-4} dx \quad ۵۶$$

۵۷. طول خم $y=x^2$ ، $0 \leq x \leq 1$ را بیابید. (برای محاسبه انتگرال از جدول استفاده کنید.)

۵۸. مساحت رویه‌ای را که از دوران خم $y=x^2$ ، $0 \leq x \leq 1$ حول محور x پدید می‌آید، پیدا کنید. (برای محاسبه انتگرال از جدول استفاده کنید.)

۵۹. طول خم $y=\ln x$ ، $3/2 \leq x \leq 1$ را بیابید. (برای محاسبه انتگرال از جدول کمک بگیرید.)

۶۰. تراکتریس. نقطه P در مبدأ صفحه xy به وسیله ریسمانی به طول a به جرمی چون M که در نقطه $(a, 0)$ است، وصل می‌شود. سپس نقطه P در امتداد محور y بالا می‌رود و جرم M را به وسیله ریسمان به دنبال می‌کشد. همچنانکه P حرکت می‌کند، جرم یک خم مشتق‌پذیر $y=f(x)$ را رسم می‌کند که در شکل ۱۲.۹ نشان داده شده است. این خم، تراکتریس نامیده می‌شود؛ این نام از واژه لاتینی تراکتوم می‌آید که به معنی «کشیدن» است. تراکتریس نقش مهمی در مطالعه هندسه نساقلیدسی ایفا می‌کند زیرا رویه‌ای که بر اثر دوران آن حول محور y پدید می‌آید، مدلی برای صفحه لباچفسکی است.

(الف) نشان دهید تابع $y=f(x)$ که نمودارش به وسیله M رسم می‌شود، در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

(ب) معادله دیفرانسیل قسمت (الف) را تحت این شرط حل کنید که وقتی $x=a$ داشته باشیم $y=0$.

$$\int_{5/4}^2 \frac{dx}{1-x^2} \quad ۳۶$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{2+x^2}} \quad ۳۷$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx \quad ۳۸$$

$$\int_{-1}^1 \sinh^{-1} x dx \quad ۳۹$$

$$\int_0^{1/2} \tanh^{-1} x dx \quad ۴۰$$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx \quad ۴۱$$

$$\int (x^2+1)^{3/2} dx \quad ۴۲$$

$$\int_2^5 x \coth^{-1} x dx \quad ۴۳$$

$$\int_{3/5}^{4/5} x \operatorname{sech}^{-1} x dx \quad ۴۴$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}} \quad ۴۵$$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}} dx \quad ۴۶$$

در مسأله‌های ۴۷-۴۹، با استفاده از جانشینیهای مثلثاتی انتگرالها را حساب کنید.

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}, \quad u \geq 1 \quad ۴۷$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} \quad ۴۸$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+1}} \quad ۴۹$$

۵۰. انتگرال زیر را به کمک کسرهای ساده محاسبه کنید.

$$\int \frac{du}{1-u^2}.$$

زیر صدق می کند

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

این معادله را تحت این شرط حل کنید که وقتی $x=1$ ، y و dy/dx برابر صفر باشند.

۶۲. سقوط آزاد کننده. اگر جسمی به جرم m که از حال سکون تحت تأثیر گرانش سقوط می کند با مقاومت هوا روبه رو شود به طوری که این مقاومت متناسب با مربع سرعت باشد، آنگاه سرعت v در زمان t در معادله دیفرانسیل

$$m \left(\frac{dv}{dt} \right) = mg - kv^2$$

صدق می کند که در آن، k ثابت تناسب است و وقتی $t=0$ ، داریم $v=0$. نشان دهید که

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t \right)$$

و از اینجا نتیجه بگیرید که جسم به یک سرعت حدی میل می کند که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، برابر است با $\sqrt{mg/k}$.

۶۳. معادله $x = \sinh y = (e^y - e^{-y})/2$ را نسبت به e^y بر حسب x حل کنید، و به این ترتیب نشان دهید که $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. (این معادله، $\sinh^{-1} x$ را به صورت یک لگاریتم بیان می کند).

۶۴. $\cosh^{-1} x$ را با استفاده از روش مسأله ۶۳ به صورت یک لگاریتم بیان کنید.

۶۵. فرمول (۱۳) را ثابت کنید.

۶۶. فرمول (۱۵) را ثابت کنید.

۶۷. فرمول (۱۷) را ثابت کنید.



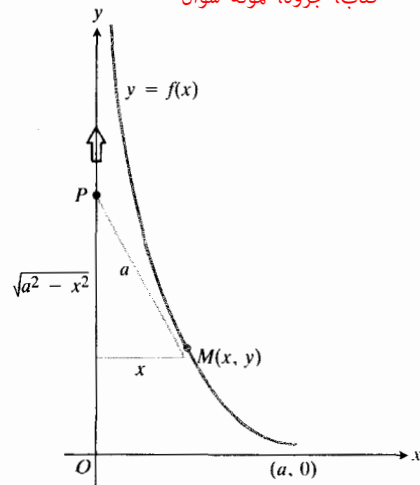
TOOLKIT PROGRAMS

First Order Initial Value Problem
Second Order Initial Value Problem
Super * Grapher

پرسشها و تمرینهای مروری

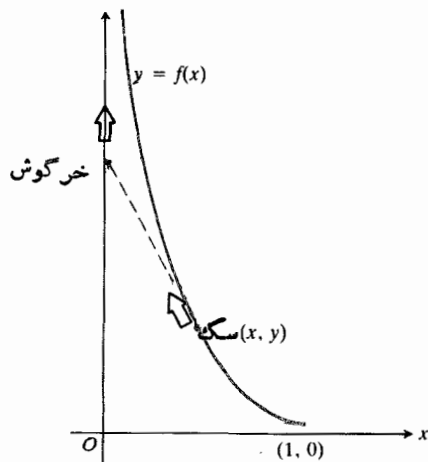
۱. شش تابع هیپر بولیک را تعریف کنید. نمودارهای آنها را بکشید. دامنه و برد هر یک را معین کنید.

کتاب، جزوه، نمونه سوال



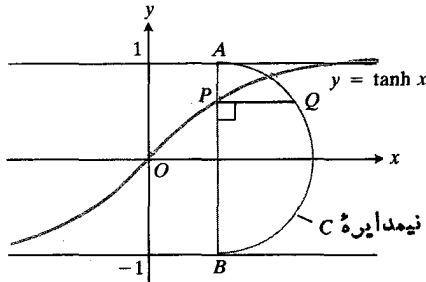
۱۲.۹ به موازات آنکه P در امتداد محور y بالا می رود، M را به وسیله ریسمانی به طول واحد a به دنبال می کشد. خم $y=f(x)$ که به وسیله M رسم می شود تراکتریس نام دارد. هدف مسأله ۶۵، یافتن فرمولی برای این خم است.

۶۱. خم تعقیب. خرگوشی از مبدأ شروع به حرکت می کند و با سرعت ثابتی در امتداد محور y به سمت بالا می دود. در همین زمان، سگی از نقطه $(1, 0)$ شروع به دویدن می کند و با همان سرعت خرگوش را تعقیب می کند. می توان نشان داد که مسیر سگ (شکل ۱۳.۹) نمودار تابعی چون $y=f(x)$ است که در معادله دیفرانسیل



۱۳.۹ یک خم تعقیب. سگ مستقیماً به طرف خرگوش می دود، ولی خرگوش نیز در حال دویدن است، بنا بر این مسیر سگ به شکل یک خم است. مسأله ۶۱ یک معادله دیفرانسیل برای مسیر سگ به دست می دهد.

و AB قطعه‌ای از خط عمود بر محور x و گذرنده از P باشد به طوری که A و B روی مجانبهای خم واقع باشند. C را نیم‌دایره‌ای بگیرید که AB قطر آن باشد. فرض کنید خط گذرنده از P و عمود بر AB ، نیم‌دایره را در نقطه Q قطع کند. نشان دهید که $PQ = \operatorname{sech} x$.



۱۴.۹ شکل مربوط به مسئله ۷.

۸. معادلات پارامتری نیم‌دایره

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y > 0$$

را بیابید؛ به این منظور، متغیر t را که با معادله $x = a \tanh t$ تعریف می‌شود به عنوان پارامتر در نظر بگیرید.

۹. مطلوب است معادلات مجانبهای هذلولی که با معادله $y = \tanh((1/2) \ln x)$ نشان داده می‌شود.

۱۰. شتابهایی که بزرگی آنها متناسب با تغییر مکان است. ذره‌ای در امتداد محور x طبق یکی از قوانین زیر حرکت می‌کند

$$x = a \cos kt + b \sin kt \quad (\text{الف})$$

$$x = a \cosh kt + b \sinh kt \quad (\text{ب})$$

نشان دهید که در هر دو حالت، شتاب متناسب با x است ولی جهتش در حالت اول همواره به طرف مبدأ است و در حالت دوم به طرف خلاف آن.

۱۱. نشان دهید که $\cosh^2 x$ ، $\sinh^2 x$ ، $\cos^2 x$ ، $\sin^2 x$ همگی در رابطه $d^2 y/dx^2 = -16y$ صادق‌اند.

۱۲. نمودار تابع زیر را رسم کنید

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}.$$

در مسأله‌های ۱۳-۲۲، dy/dx را بیابید.

$$y = \sinh^2 x \quad ۱۳$$

$$\tan x = \tanh^2 y \quad ۱۴$$

۲. توابع هیپر بولیک چه ارتباطی با هذلولیها دارند؟

۳. چهار اتحاد مثلثاتی را ذکر کنید، از قبیل فرمولهای $\sin(A+B)$ ، $\cos(A-B)$ ، $\cos^2 A + \sin^2 A$ ، $2 \sin^2 A$. اتحادهای هیپر بولیک متناظر چه هستند؟ درستی آنها را تحقیق کنید.

۴. برخی از تفاوتهای بین توابع مثلثاتی و توابع هیپر بولیک متناظر آنها را بیان کنید.

۵. فرمول مشتقات شش تابع هیپر بولیک را به دست آورید.

۶. اگر $y = C_1 \sin at + C_2 \cos at$ ، آنگاه $y'' = -a^2 y$. در این صورت، $y = C_1 \sinh at + C_2 \cosh at$ در چه معادله دیفرانسیل متناظری صدق می‌کند؟

۷. کابلهای آویزان چه شکلهایی به خود می‌گیرند؟ روابط بین اندازه نیروهای وارد بر قطعه‌ای از یک کابل آویزان چگونه به معادله دیفرانسیلی برای شکل کابل می‌انجامند؟ این معادله دیفرانسیل چیست؟ چگونه حل می‌شود؟

۸. شش تابع هیپر بولیک معکوس را تعریف کنید. نمودارهای آنها را بکشید. دامنه و برد هر یک را معین کنید. مقادیر آنها را چگونه می‌توان محاسبه کرد؟

۹. فرمول مشتقات تسوابع هیپر بولیک معکوس را ارائه دهید. یکی از این فرمولها را استنتاج کنید.

۱۰. چه انتگرالهایی به طور طبیعی به تسوابع هیپر بولیک معکوس می‌انجامند؟

مسأله‌های گوناگون

۱. اتحاد هیپر بولیک $\cosh^2 x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ ثابت کنید.

۲. تحقیق کنید که $\tanh x = \sinh^2 x / (1 + \cosh^2 x)$.

۳. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cosh x - \sinh x)$.

۴. اگر $\cosh x = 5/4$ ، مطلوب است محاسبه $\sinh x$ و $\tanh x$.

۵. اگر $\cosh x = -9/40$ ، مطلوب است محاسبه $\sinh x$ و $\tanh x$.

۶. اگر $\tanh x > 5/13$ ، نشان دهید که $\sinh x > 0.4$ و $\operatorname{sech} x < 0.95$.

۷. فرض کنید P نقطه‌ای واقع بر خم $y = \tanh x$ (شکل ۱۴.۹)

$$\int_1^{\sqrt{e^x-1}} \frac{e^x-1}{e^x+1} dx \quad ۰۲۷$$

(دانهایی: صورت و مخرج را در e^{-x} ضرب کنید.)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad ۰۲۸$$

$$(دانهایی: فرض کنید $u = \sqrt{x}$) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}} \quad ۰۲۹$$$

$$\int_0^{\ln(3/2)} \frac{e^t dt}{\sqrt{2+e^{2t}}} \quad ۰۳۰$$

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} \quad ۰۳۱$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{\tan^2 \theta - 1}} \quad ۰۳۲$$

۰۳۳ حد $\cosh^{-1} x - \ln x$ را وقتی $x \rightarrow \infty$ ، بیابید.

۰۳۴ مطلوب است محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

$$\sin^{-1} x = \operatorname{sech} y \quad ۰۱۵$$

$$\sinh y = \sec x \quad ۰۱۶$$

$$\tan^{-1} y = \tanh^{-1} x \quad ۰۱۷$$

$$y = \tanh(\ln x) \quad ۰۱۸$$

$$x = \cosh(\ln y) \quad ۰۱۹$$

$$y = \sinh(\tan^{-1} e^{x/2}) \quad ۰۲۰$$

$$y = \sinh^{-1}(\tan x) \quad ۰۲۱$$

$$y^2 + x \cosh y + \sinh^2 x = 50 \quad ۰۲۲$$

درمسأله‌های ۲۳-۳۲، انتگرال را محاسبه کنید.

$$\int_{-\ln 2}^0 \frac{d\theta}{\sinh \theta + \cosh \theta} \quad ۰۲۳$$

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{\cosh \theta d\theta}{\sinh \theta + \cosh \theta} \quad ۰۲۴$$

$$\int_0^{(\ln 3)/2} \sinh^2 x dx \quad ۰۲۵$$

$$\int_{-\ln 2}^0 e^x \sinh 2x dx \quad ۰۲۶$$

مختصات قطبی

چشم انداز

یکی از ایده‌های اصیل در دوش فلوکسیونها و سریهای نامتناهی نیوتن، استفاده از دستگاههای جدید مختصات برای صفحه از جمله دستگاه مختصات قطبی بود که محل نقطه را براساس فاصله آن از مبدأ و یک زاویه جهندار معین می‌کند. چون کتاب نیوتن که در حدود ۱۶۷۱ به زبان لاتینی نوشته شد تا سال ۱۷۳۶ به زبان انگلیسی انتشار نیافت، ابداع مختصات قطبی معمولاً به یاکوب برنولی نسبت داده می‌شود که این مختصات را مستقل در مقاله‌ای به تاریخ ۱۶۹۱ ابداع و توصیف کرد.

مختصات قطبی در فیزیک و نجوم اهمیت دارد زیرا معادلات بیضیها، سهمیها، و هذلولیها همگی در این دستگاه صورت واحدی دارند. برخلاف دستگاه مختصات دکارتی، در این دستگاه نیازی به صورتهای مختلف برای مقاطع مخروطی گوناگون نیست. این بدان معنی است که می‌توانیم مدار سیارات، اقمار، ستاره‌های دنباله‌دار، و ماهواره‌ها را با یک معادله واحد توصیف کنیم. هرگاه خروج از مرکز یک مدار و فاصله یک کانون تا هادی مربوط به آن را بدانیم، معادله مدار در یک دستگاه مختصات قطبی که مرکز بر آن کانون واقع باشد، خود به خود بر ما معلوم است. در بخش ۳.۱۰ خواهیم دید که این معادله چیست.

معادلات مختصات قطبی خمهای جالب دیگری تولید می‌کنند که آنها را در بخش ۲.۱۰ که در آنجا ترسیم نمودارها را بررسی می‌کنیم و نیز در بخش ۳.۱۰ که نگاهی بر خمهای خاص می‌افکنیم، ملاحظه خواهیم کرد. در بخش ۲.۱۰ خواهیم دید که چگونه طولها

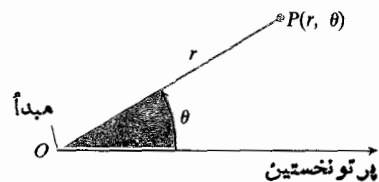
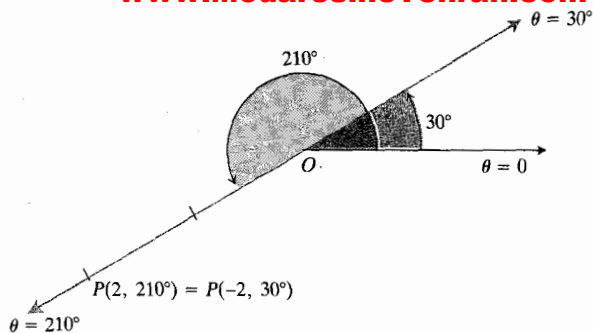
و مساحت‌های مربوط به این خمها را محاسبه کنیم. معادلاتی که به کار می‌بریم همگی در مختصات دکارتی هم قابل بیان‌اند، ولی استفاده از مختصات قطبی محاسبات را آسانتر می‌سازد. بحث را با معرفی مختصات قطبی آغاز می‌کنیم.

۱.۱۰ دستگاه مختصات قطبی

در این بخش، مختصات قطبی را تعریف کرده رابطه آنها را با مختصات دکارتی مطالعه می‌کنیم. یکی از تفاوت‌های بین مختصات قطبی و دکارتی این است که یک نقطه در صفحه، فقط یک جفت مختصات دکارتی دارد حال آنکه دارای بینهایت جفت مختصات قطبی است. این موضوع، چنانکه در بخش آینده خواهیم دید، پیامدهای جالبی برای نمودارهای معادلات قطبی دارد.

مختصات قطبی چگونه تعریف می‌شوند

برای تعریف مختصات قطبی، نخست یک مبدأ O و یک پرتو (نیم‌خط) نخستین، به صورتی که در شکل ۱.۱۰ می‌بینید، در نظر می‌گیریم. سپس هر نقطه P را می‌توان با انتساب یک جفت مختصات قطبی (r, θ) به آن مشخص کرد که عدد اول این جفت، r ، فاصله جهندار از O تا P و عدد دوم، θ ، زاویه جهندار از پرتو نخستین تا پاره خط OP است:



۱۰۱۰ تعریف مختصات قطبی برای صفحه،
با در نظر گرفتن يك مبدأ و يك پرتو نخستین
شروع می شود.

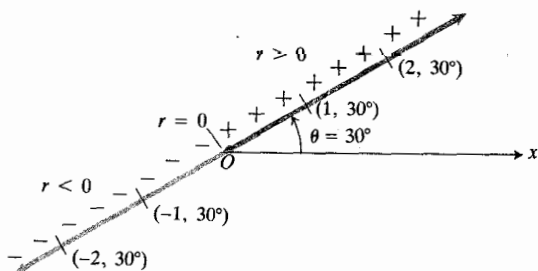
مختصات قطبی

$$(1) \quad P(r, \theta)$$

زاویه جهندار از پرتو نخستین تا OP
فاصله جهندار از O تا P

نخستین در خلاف جهت ساعت پیمود و به اندازه دو واحد [از مبدأ] عقب رفت. بنابراین، می گوئیم که این نقطه دارای مختصات قطبی $r = -2$ ، $\theta = 30^\circ$ نیز هست.

هرگاه زاویه بین پرتوها 180° باشد، آنها يك خط راست می سازند. در این صورت، می گوئیم که هر پرتو مقابل پرتو دیگر است. نقاط روی پرتو $\theta = \alpha$ دارای مختصات قطبی (r, α) با ضابطه $r \geq 0$ هستند. نقاط روی پرتو مقابل، $\theta = \alpha + 180^\circ$ ، دارای مختصات (r, α) با ضابطه $r \leq 0$ هستند. شکل ۴۰۱۰ را ببینید.



۴۰۱۰ پرتو $\theta = 30^\circ$ و پرتو مقابل آن.

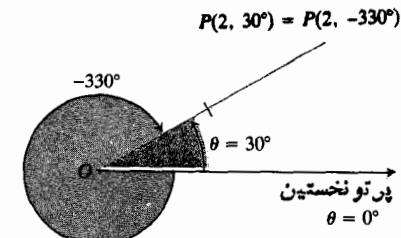
مثال ۱ همه مختصات قطبی نقطه $(2, 30^\circ)$ را بیابید. اندازه زاویه ها را هم بر حسب درجه و هم بر حسب رادیان بیان کنید.

حل: پرتو نخستین دستگاه مختصات را می کشیم. خطی رسم می کنیم که از مبدأ بگذرد و يك زاویه 30° با پرتو نخستین بسازد، و نقطه $(2, 30^\circ)$ را مشخص می کنیم (شکل ۵۰۱۰). سپس فرمولهایی برای جفتیابی از مختصات می یابیم که در آنها $r = 2$ و $r = -2$ و در آن فرمولها درجه را به رادیان تبدیل می کنیم.

برای $r = 2$: زوایای

$$\begin{aligned} 30^\circ + 1 \times 360^\circ &= 390^\circ & 30^\circ - 1 \times 360^\circ &= -330^\circ \\ 30^\circ + 2 \times 360^\circ &= 750^\circ & 30^\circ - 2 \times 360^\circ &= -690^\circ \\ 30^\circ + 3 \times 360^\circ &= 1110^\circ & 30^\circ - 3 \times 360^\circ &= -1050^\circ \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \quad (2)$$

همان طور که در مثلثات دیده ایم، زاویه θ مثبت است اگر در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت اندازه گیری شود و منفی است اگر در جهت حرکت عقربه های ساعت اندازه گیری گردد (شکل ۱۰۱۰). ولی زاویه متناظر با يك نقطه مفروض، یکتا نیست (شکل ۲۰۱۰). مثلاً، نقطه به فاصله ۲ واحد از مبدأ روی پرتو $\theta = 30^\circ$ دارای مختصات قطبی $r = 2$ ، $\theta = 30^\circ$ است. این نقطه همچنین دارای مختصات $r = 2$ ، $\theta = -330^\circ$ و $r = -2$ ، $\theta = 210^\circ$ نیز هست.



۲۰۱۰ پرتو $\theta = 30^\circ$ با پرتو $\theta = -330^\circ$ یکی است.

مقادیر منفی r : تغییر واحد اندازه زاویه به رادیان

در مواردی مایلیم که r بتواند منفی باشد. به همین دلیل است که اصطلاح «فاصله جهندار» را در (۱) به کار بردیم. پرتو $\theta = 30^\circ$ و پرتو $\theta = 210^\circ$ همراه با هم يك خط کامل می سازند که از O می گذرد (شکل ۳۰۱۰). نقطه $P(2, 210^\circ)$ به فاصله ۲ واحد از O روی پرتو $\theta = 210^\circ$ دارای مختصات قطبی $r = 2$ ، $\theta = 210^\circ$ است. برای رسیدن به این نقطه، می توان زاویه ای 210° را از پرتو نخستین در خلاف جهت ساعت پیمود و به اندازه دو واحد [از مبدأ] جلو رفت. همچنین می توان زاویه ای 30° را از پرتو

می آوریم

$$\left(-2, -\frac{5\pi}{6}\right) \text{ و } \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$$

و وقتی $n=1$ داریم

$$\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right) \text{ و } \left(2, \frac{13\pi}{6}\right)$$

و به همین ترتیب الی آخر.

گرچه در تعریف مختصات قطبی هیچ چیزی وجود ندارد که استفاده از اندازه رادیانی را لازم سازد، اما وقتی از توابع مثلثاتی θ مشتق و انتگرال می گیریم لازم است که اندازه زاویه ها بر حسب رادیان باشد. بنابراین، از این پس منحصرأ اندازه رادیانی را به کار می بریم.

معادله ها و نامعادله های مختصاتی مقدماتی

اگر r ثابت نگاه داشته شود و دارای مقدار نا صفر $r=a$ باشد، آنگاه نقطه $P(r, \theta)$ به فاصله $|a|$ واحد از مبدأ واقع است. به موازات آنکه θ روی بازه ای به طول 2π رادیان تغییر می کند، دایره ای به شعاع $|a|$ رسم می کند که مرکزش در مبدأ است. پس معادله

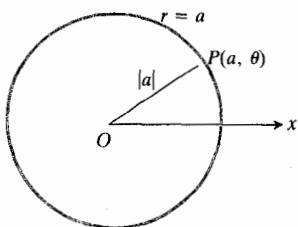
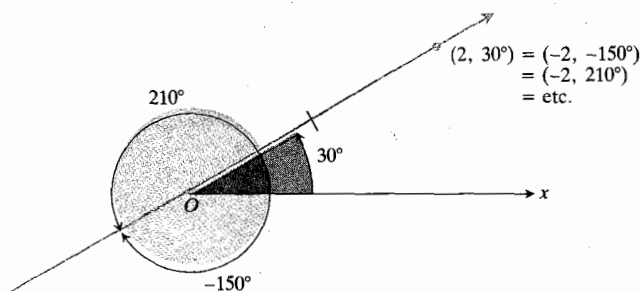
$$r=a$$

معادله ای برای این دایره است (شکل ۶.۱۰). معادله $r=1$ معادله دایره ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ است. معادله $r=-1$ نیز معادله همین دایره است.

اگر θ تغییر نکند و دارای مقدار ثابت $\theta=\theta_0$ باشد و r بتواند همه مقادیر حقیقی را اختیار کند، نقطه $P(r, \theta)$ خطی رسم می کند که از مبدأ می گذرد و زاویه ای به اندازه θ_0 رادیان با پرتو نخستین دستگاه مختصات می سازد. پس معادله

$$\theta=\theta_0$$

معادله ای برای این خط است. معادله $\theta=\pi/6$ معادله ای برای

۶.۱۰ معادله قطبی این دایره، $r=a$ است.

۵.۱۰ نقطه $P(2, 30^\circ)$ دارای تعداد زیادی مختصات قطبی متفاوت است.

همگی به همان پرتوی ختم می شوند که زاویه 30° می شود. بنابراین، مختصات قطبی

$$(2, 30^\circ + n \cdot 360^\circ), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

همگی نقطه $(2, 30^\circ)$ را مشخص می کنند.

برای $r=-2$: مختصات مذکور در (۳)، گرچه بسیارند ولی تنها مختصات قطبی نقطه $(2, 30^\circ)$ نیستند. زوایای

$$\begin{array}{rcl} -150^\circ & & -150^\circ \\ -150^\circ + 360^\circ = 210^\circ & & -150^\circ - 360^\circ = -510^\circ \\ -150^\circ + 720^\circ = 570^\circ & & -150^\circ - 720^\circ = -870^\circ \\ \vdots & & \vdots \end{array} \quad (4)$$

همگی پرتو مقابل پرتو $\theta=30^\circ$ را تعریف می کنند. از این رو، مختصات قطبی

$$(-2, -150^\circ + n \cdot 360^\circ), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

نیز نقطه $(2, 30^\circ)$ را نشان می دهند.

اندازه زاویه بر حسب رادیان: اگر اندازه زاویه ها را بر حسب رادیان بیان کنیم، فرمولهای متناظر با (۳) و (۵) عبارت اند از

$$\left(2, \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

$$\left(-2, -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

وقتی $n=0$ ، جفتهای مختصات زیر را از این فرمولها به دست

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad r \leq 0 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \quad (\text{ت}) \quad (r \text{ محدودیتی ندارد})$$

حل: نمودارها را در شکل ۷۰۱۰ رسم کرده ایم.

تبدیل معادله‌های دکارتی و قطبی به یکدیگر

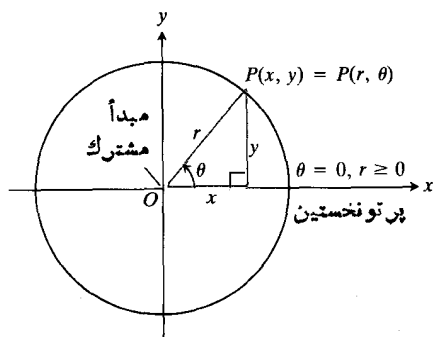
وقتی در یک صفحه از هر دو نوع مختصات قطبی و دکارتی استفاده می‌کنیم، معمولاً مبدأ دستگاه قطبی را در مبدأ دستگاه دکارتی قرار می‌دهیم و قسمت مثبت محور x را به عنوان پرتو نخستین دستگاه مختصات قطبی در نظر می‌گیریم. پرتو $\theta = \pi/2$ ، $r \geq 0$ قسمت نامنفی محور y است. همان‌طور که شکل ۸۰۱۰ نشان می‌دهد، این دو مجموعه مختصات با معادله‌های زیر به هم مربوط می‌شوند

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

(۸) یا

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \tan \theta.$$

این رابطه‌ها $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را در حالتی که r مثبت است، تعریف می‌کنند؛ ولی در حالتی هم که r منفی است، برقرارند زیرا $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$ و $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ بنابراین r های مثبت روی پرتو $\theta + \pi$ متناظر با r های منفی روی پرتو θ هستند. اگر $r = 0$ ، آنگاه $x = y = 0$ ، P مبدأ است.



۸۰۱۰ راه معمولی برای ربط دادن مختصات قطبی و دکارتی به یکدیگر.

همان‌طور که در مثال زیر دیده می‌شود، با استفاده از این معادله‌ها می‌توان معادله‌های قطبی را به صورت دکارتی نوشت و به عکس.

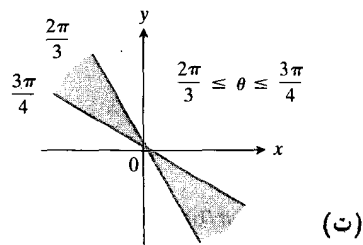
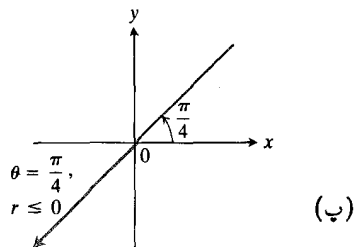
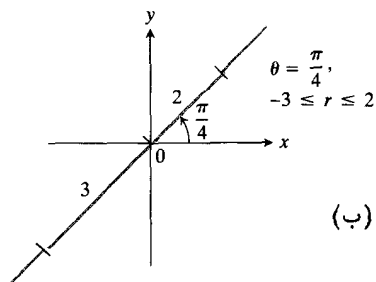
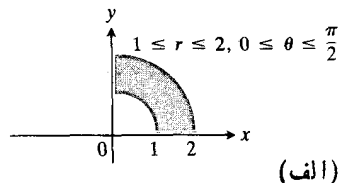
خط شکل ۵۰۱۰ است. معادلات $\theta = \pi/6$ و $\theta = -5\pi/6$ نیز معادلات این خط‌اند.

معادلاتی به شکل $r = a$ و $\theta = \theta_0$ را می‌توان به صورت‌های گوناگونی ترکیب کرد تا، همان‌طور که در مثال بعد دیده می‌شود، ناحیه‌ها، قطعه خط‌ها، و پرتوهای را در صفحه مختصات تعریف کنند.

مثال ۲ نمودار مجموعه‌هایی از نقاط را که مختصات قطبی آنها در شرط‌های زیر صدق می‌کنند، رسم کنید.

$$1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{الف})$$

$$-3 \leq r \leq 2, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad (\text{ب})$$



۷۰۱۰ نمودار نامعادله‌های نمونه‌وار بر حسب r و θ .

معادله دکارتی هم ارز

معادله قطبی

$$x = 2$$

$$r \cos \theta = 2$$

$$xy = 4$$

$$r^2 \cos \theta \sin \theta = 4$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 1$$

$$y^2 - 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$r = 1 + 2r \cos \theta$$

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$$

$$r = 1 - \cos \theta$$

$$r \cos \theta = -2 \quad (\text{الف})$$

درمورد برخی از خیمها، استفاده از مختصات قطبی راحت تر است و درمورد بعضی دیگر، چنین نیست.

$$r \cos \theta = -2 \quad \text{معادله دکارتی:}$$

$$x = -2$$

نمودار: خط قائم گذرنده از $x = -2$ واقع بر محور x

$$r^2 = 4r \cos \theta \quad (\text{ب})$$

معادله دکارتی:

$$r^2 = 4r \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \quad (\text{عبارت را به صورت مربع کامل درمی آوریم})$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

نمودار: دایره، شعاع ۲، مرکز $(2, 0)$

$$r = \frac{4}{2 \cos \theta - \sin \theta} \quad (\text{پ})$$

$$r(2 \cos \theta - \sin \theta) = 4 \quad \text{معادله دکارتی:}$$

$$2r \cos \theta - r \sin \theta = 4$$

$$2x - y = 4$$

$$y = 2x - 4$$

نمودار: خط، شیب $m = 2$ ، عرض از مبدأ $b = -4$.

مسئله ها

تمام زاویه ها بر حسب رادیان هستند.

۱. دسته هایی از جفت های مختصات زیر را که هر دسته نشان دهند

مثال ۴. يك معادله دکارتی برای خم زیر بیابید

$$r \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = 3.$$

حل: اتحاد زیر را به کار می بریم

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

و قرار می دهیم $A = \theta$ و $B = \pi/3$:

$$r \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = 3$$

$$r \left(\cos \theta \cos \frac{\pi}{3} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3$$

$$r \cos \theta \cdot \frac{1}{2} + r \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 3$$

$$x + \sqrt{3}y = 6.$$

مثال ۵. معادله های قطبی زیر را به معادله های دکارتی هم ارز تبدیل کنید و نمودارهای آنها را مشخص نمایید.

$$r \cos \theta = -2 \quad (\text{الف})$$

$$r^2 = 4r \cos \theta \quad (\text{ب})$$

$$r = \frac{4}{2 \cos \theta - \sin \theta} \quad (\text{پ})$$

حل: از جانشانیهای $r \cos \theta = x$ ، $r \sin \theta = y$ و

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{استفاده می کنیم.}$$

نقطه واحدی باشد، مشخص کنید.

داده شده اند) پیدا کنید.

الف) $(3, 0)$ الف) $(\sqrt{2}, \pi/4)$ ب) $(-3, 0)$ ب) $(1, 0)$ پ) $(-3, \pi)$ پ) $(0, \pi/2)$ ت) $(-3, 2\pi)$ ت) $(-\sqrt{2}, \pi/4)$ ث) $(2, 2\pi/3)$ ث) $(-3, 5\pi/6)$ ج) $(2, -\pi/3)$ ج) $(5, \tan^{-1}(4/3))$ چ) $(2, 7\pi/3)$ چ) $(-1, 7\pi)$ ح) $(-2, \pi/3)$ ح) $(2\sqrt{3}, 2\pi/3)$ خ) $(2, -\pi/3)$

۶. همه مختصات قطبی مبدأ را بیا بید.

د) $(2, -2\pi/3)$

نمودار مجموعه‌های نقاطی را که مختصات قطبی آنها در معادله‌ها و نامعادله‌های مسائل ۷-۲۲ صدق می‌کنند، بکشید.

ذ) $(-2, -\pi/3)$ ر) $(-2, 2\pi/3)$

$$r = 2 \quad ۷$$

ز) (r, θ)

$$0 \leq r \leq 2 \quad ۸$$

ژ) $(r, \theta + \pi)$

$$r \geq 1 \quad ۹$$

س) $(-r, \theta + \pi)$

$$1 \leq r \leq 2 \quad ۱۰$$

ش) $(-r, \theta)$

$$0 \leq \theta \leq \pi/6, \quad r \geq 0 \quad ۱۱$$

۲. مختصات دکارتی نقاطی را که مختصات قطبی‌شان در قسمتهای
الف) - (ر) مساله ۱ داده شد، پیدا کنید.

$$\theta = 2\pi/3, \quad r \leq -2 \quad ۱۲$$

$$\theta = \pi/3, \quad -1 \leq r \leq 3 \quad ۱۳$$

۳. نقاط زیر را (که بر حسب مختصات قطبی داده شده‌اند) مشخص
کنید. سپس همه مختصات قطبی هر يك از نقاط را بیا بید.

$$\theta = 11\pi/4, \quad r \geq -1 \quad ۱۴$$

$$\theta = \pi/2, \quad r \geq 0 \quad ۱۵$$

الف) $(2, \pi/2)$

$$\theta = \pi/2, \quad r \leq 0 \quad ۱۶$$

ب) $(2, 0)$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = 1 \quad ۱۷$$

پ) $(-2, \pi/2)$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = -1 \quad ۱۸$$

ت) $(-2, 0)$

$$\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad ۱۹$$

۴. نقاط زیر را (که بر حسب مختصات قطبی داده شده‌اند) مشخص
کنید. سپس همه مختصات قطبی هر يك از نقاط را بیا بید.

$$-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, \quad -1 \leq r \leq 1 \quad ۲۰$$

$$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 1 \leq r \leq 2 \quad ۲۱$$

الف) $(3, \pi/4)$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 1 \leq |r| \leq 2 \quad ۲۲$$

ب) $(-3, \pi/4)$ معادله‌های قطبی مذکور در مسأله‌های ۲۳-۴۰ را به معادله‌های
دکارتی هم‌ارز تبدیل کنید. سپس نمودار این معادله‌ها را بکشید.پ) $(3, -\pi/4)$ ت) $(-3, -\pi/4)$

$$r \cos \theta = 2 \quad ۲۳$$

۵. مختصات دکارتی نقاط زیر را (که بر حسب مختصات قطبی

در مسأله‌های ۵۱-۵۴، به کمک اتحادهای مثلثاتی که $\sin(A \pm B)$ و $\cos(A \pm B)$ را در برداشته باشند، معادله‌های قطبی را به معادله‌های دکارتی هم‌ارز تبدیل کنید. سپس نمودار این معادله‌ها را بکشید.

$$r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \quad ۵۱$$

$$r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 4 \quad ۵۲$$

$$r \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sqrt{2} \quad ۵۳$$

$$r \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = 0 \quad ۵۴$$

۲.۱۰ ترسیم نمودار در دستگاه مختصات قطبی

نمودار معادله

$$F(r, \theta) = 0$$

مركب از نقاطی است که صورتی از مختصات قطبی آنها در این معادله صدق می‌کند. می‌گوییم «صورتی از»، زیرا واقعیت تأسف انگیز این است که برخی از جفت‌های مختصات نقطه‌ای که روی نمودار است ممکن است در این معادله صدق نکنند و برخی دیگر صدق کنند. برای اینکه کار سریع‌تر انجام شود، به جستجوی تقارن‌ها، مقادیری از θ که در آنها خم از مبدأ می‌گذرد، و نقاطی که در آنها r مقادیر اکسترمم را اختیار می‌کند، می‌پردازیم. وقتی خم از مبدأ می‌گذرد سعی می‌کنیم در آنجا شیبش را هم محاسبه کنیم.

تقارن و شیب در مبدأ

سه نوع تقارن را به آسانی می‌توان در نمودار يك معادله $F(r, \theta) = 0$ تشخیص داد. همان‌طور که در شکل ۹.۱۰ دیده می‌شود، نمودار

الف) نسبت به مبدأ متقارن است اگر با تبدیل r به $-r$ یا تبدیل θ به $\theta + \pi$ ، معادله تغییر نکند.

ب) نسبت به محور x متقارن است اگر با تبدیل θ به $-\theta$ یا تبدیل جفت (r, θ) به جفت $(-r, \pi - \theta)$ ، معادله تغییر نکند.

پ) نسبت به محور y متقارن است اگر با تبدیل θ به $\pi - \theta$ یا تبدیل جفت (r, θ) به جفت $(-r, -\theta)$ ، معادله تغییر نکند.

$$r \sin \theta = -1 \quad ۲۴$$

$$r \sin \theta = 2 \quad ۲۵$$

$$r \cos \theta = 0 \quad ۲۶$$

$$r \sin \theta = 0 \quad ۲۷$$

$$r \cos \theta = -2 \quad ۲۸$$

$$r \cos \theta + r \sin \theta = 1 \quad ۲۹$$

$$r \sin \theta = r \cos \theta \quad ۳۰$$

$$r^2 = 1 \quad ۳۱$$

$$r^2 = 4r \sin \theta \quad ۳۲$$

$$r \sin \theta = e^{r \cos \theta} \quad ۳۳$$

$$r^2 + 2r^2 \cos \theta \sin \theta = 1 \quad ۳۴$$

$$r = \frac{5}{\sin \theta - 2 \cos \theta} \quad ۳۵$$

$$r = 2 \cos \theta \quad ۳۶$$

$$r = 2 \sin \theta \quad ۳۷$$

$$r = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta \quad ۳۸$$

$$r = 2 \tan \theta \sec \theta \quad ۳۹$$

$$r + \sin \theta = 2 \cos \theta \quad ۴۰$$

معادله‌های دکارتی مذکور در مسأله‌های ۴۱-۵۰ را به معادلات قطبی هم‌ارز تبدیل کنید.

$$x = 2 \quad ۴۱$$

$$y = 1 \quad ۴۲$$

$$x = y \quad ۴۳$$

$$x - y = 3 \quad ۴۴$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad ۴۵$$

$$x^2 - y^2 = 1 \quad ۴۶$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad ۴۷$$

$$xy = 2 \quad ۴۸$$

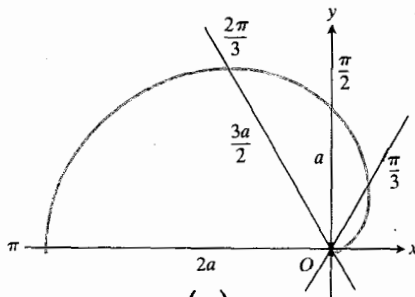
$$y^2 = 4x \quad ۴۹$$

$$x^2 - y^2 = 25 \sqrt{x^2 + y^2} \quad ۵۰$$

صعود می‌کند. یعنی، وقتی بردار شعاعی OP از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ نوسان می‌کند، r از ۰ تا $2a$ صعود می‌نماید. جدولی از مقادیر تشکیل می‌دهیم (شکل ۱۰۱۰ الف) و نقاط متناظر را مشخص می‌کنیم.

| θ | r |
|------------------|----------------|
| ۰ | ۰ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{a}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | a |
| $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3a}{2}$ |
| π | $2a$ |

(الف)



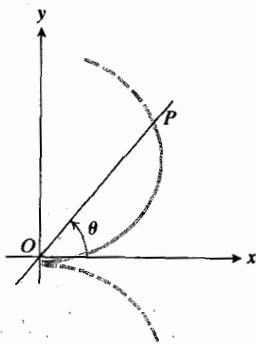
(ب)

۱۰۰۱۰ (الف) مقادیر $r = a(1 - \cos \theta)$ به ازای مقادیر انتخاب شده‌ای از θ . (ب) خم همواری که از نقاط قسمت (الف) می‌گذرد.

پیش از ترسیم خم، شیب در مبدأ را بررسی می‌کنیم. نقطه‌ای مانند P را در نظر می‌گیریم که در امتداد خم در ربع اول به مبدأ میل می‌کند (شکل ۱۱۰۱۰). شیب خم در مبدأ، حد شیب قاطع OP است وقتی $P \rightarrow O$ ، که عبارت است از

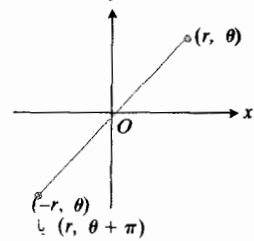
$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (\text{شیب } OP) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \tan \theta = 0.$$

اکنون خمی رسم می‌کنیم که از نقاط مشخص شده بگذرد، و مطمئن می‌شویم که مماس در مبدأ افقی است (شکل ۱۰۱۰ ب). انتظار داریم که r ، به موازات صعود θ از ۰ تا π ، دائماً صعود



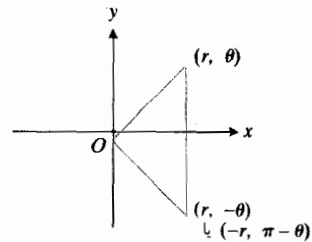
۱۱۰۱۰ وقتی P در امتداد دلواری به O میل می‌کند، $\theta \rightarrow 0$. در مبدأ دلواری دارای يك مماس افقی است.

کتاب، جزوه، نمونه سوال



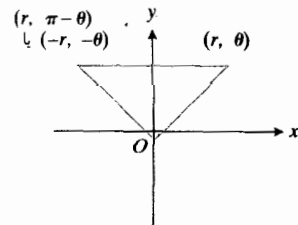
نسبت به مبدأ

(الف)



نسبت به محور x

(ب)



نسبت به محور y

(پ)

۹۰۱۰ سه آزمون مختصات قطبی برای تقارن.

مثال ۱ دلخواه. نمودار خم $r = a(1 - \cos \theta)$ ، $a > 0$ را رسم کنید.

حل: چون $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ، وقتی $-\theta$ به جای θ قرار گیرد معادله تغییر نمی‌کند؛ از این رو، خم نسبت به محور x متقارن است (شکل ۹۰۱۰ ب). همین طور، چون

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

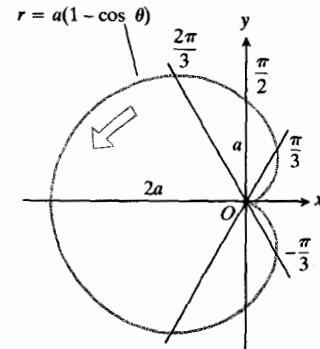
مقادیر r بین ۰ و $2a$ تغییر می‌کنند. مقدار مینیمم، $r = 0$ ، به ازای $\theta = 0$ حاصل می‌شود و مقدار ماکسیمم، $r = 2a$ ، به ازای $\theta = \pi$ به دست می‌آید. به علاوه، وقتی θ از ۰ تا π تغییر می‌کند، $\cos \theta$ از ۱ تا -۱ نزول می‌کند. از این رو، $1 - \cos \theta$ از ۰ تا ۲

کند زیرا

$$\frac{dr}{d\theta} = a \sin \theta$$

به ازای $0 < \theta < \pi$ مثبت است.

و بالاخره، از ویژگی تقارن خم استفاده می‌کنیم و قرینه قسمتی از خم را که تاکنون کشیده‌ایم نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار کامل شود (شکل ۱۲۰۱۰). این نمودار کامل شده را دلووار می‌نامیم زیرا به شکل قلب است.



۱۲۰۱۰ نمودار کامل شده دلووار

 $r = a(1 - \cos \theta)$ ، پیکان، جهت صعود θ را نشان می‌دهد.

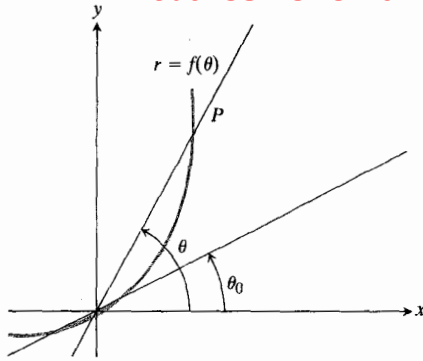
شیوه‌ای که با آن در مثال ۱ مماس بردلووار را در مبدأ پیدا کردیم، برای هر خم همواری که از مبدأ بگذرد، قابل استفاده است. اگر وقتی $\theta = \theta_0$ خم از مبدأ بگذرد، بحث مثال ۱ فقط تا این حد جرح و تعدیل می‌شود که بگوییم وقتی $\theta \rightarrow \theta_0$ ، نقطه P در امتداد خم به O میل می‌کند و از این رو

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\theta_0} = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} (\tan \theta) = \tan \theta_0.$$

ولی $(dy/dx)_{\theta=\theta_0}$ تانژانت زاویه بین محور x و خم در این نقطه نیز هست. بنابراین، خط $\theta = \theta_0$ مماس بر خم در مبدأ است. به عبارت دیگر، هرگاه خمی به ازای مقداری از θ چون θ_0 از مبدأ بگذرد، مماس مسار بر مبدأ، خط $\theta = \theta_0$ است مشروط به آنکه مشتق $dr/d\theta$ در آن نقطه موجود باشد. شکل ۱۳۰۱۰ را ببینید.

مثال ۲ نمودار خم $r^2 = 4a^2 \cos \theta$ را رسم کنید.حل: این خم نسبت به مبدأ متقارن است. دو مقدار r ،

$$r = \pm 2a\sqrt{\cos \theta}$$

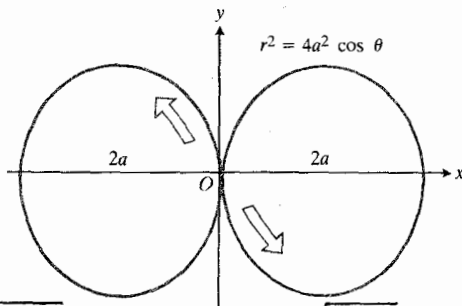


۱۳۰۱۰ اگر خم $r = f(\theta)$ در $\theta = \theta_0$ از مبدأ بگذرد و اگر f در $\theta = \theta_0$ دارای مشتق باشد، آنگاه خط $\theta = \theta_0$ در مبدأ بر خم مماس است.

متناظرند با هر مقدار θ که برای آن، $\cos \theta > 0$ ، یعنی

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

به علاوه، خم نسبت به محور x متقارن است زیرا به ازای هر θ ، $\cos(-\theta) = \cos \theta$. این خم در $\theta = \pi/2$ از مبدأ می‌گذرد و در این نقطه بر محور y مماس است. چون $\cos \theta \leq 1$ ، مقدار ماکسیمم r برابر است با $2a$ که در $\theta = 0$ حاصل می‌شود. وقتی θ از 0 تا $\pi/2$ صعود می‌کند، $|r|$ از $2a$ تا 0 نزول می‌کند. شکل ۱۴۰۱۰ را ببینید.



طوق مربوط به $r = 2a\sqrt{\cos \theta}$ به $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
 طوق مربوط به $r = -2a\sqrt{\cos \theta}$ به $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

۱۴۰۱۰ نمودار $r^2 = 4a^2 \cos \theta$ ، پیکانها جهتصعود θ را نشان می‌دهند.

روشی برای ترسیم نمودار

راهی برای ترسیم نمودار يك معادله قطبی $r = f(\theta)$ این است که جدولی از مقادیر (r, θ) تشکیل دهیم، نقاط متناظر را مشخص کنیم، و آنها را به ترتیب صعودی θ به هم وصل کنیم. اگر تعداد کافی نقطه

و در تعیین نقاط تقاطع نمودارهای معادلات قطبی با احتیاط عمل کنیم. مسأله این است که مختصات قطبی يك نقطه تقاطع در معادله یکی از آنها ممکن است با مختصات قطبی آن نقطه در معادله دوم دیگر فرق داشته باشد. بنا بر این، ممکن است با حل همزمان معادله‌های دویم نتوانیم همه نقاط تقاطع را مشخص کنیم. تنها راه مطمئن برای مشخص کردن همه نقاط تقاطع، ترسیم نمودار معادله‌هاست.

مثال ۵ نشان دهید که نقطه $(2, \pi/2)$ روی خم $r = 2 \cos 2\theta$ واقع است.

حل: در وهله اول به نظر می‌رسد نقطه $(2, \pi/2)$ روی این خم قرار ندارد زیرا با قراردادن مختصات مفروض در این معادله خواهیم داشت

$$2 = 2 \cos 2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2 \cos \pi = -2$$

که این تساوی درست نیست؛ یعنی مقدار از نظر قدر مطلق درست است ولی علامت درست نیست. پس باید به جستجوی يك جفت مختصات برای نقطه مفروض پردازیم که در آن، r منفی باشد؛ مثلاً

$$\left(-2, -\frac{\pi}{2} \right).$$

اگر این مختصات را در معادله $r = 2 \cos 2\theta$ امتحان کنیم، می‌بینیم که

$$-2 = 2 \cos 2 \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 2(-1) = -2$$

و معادله صادق است. نقطه $(2, \pi/2)$ قطعاً روی خم قرار دارد. ■

مثال ۶ نقاط تقاطع خمهای زیر را بیابید

$$r^2 = 4a^2 \cos \theta \quad \text{و} \quad r = a(1 - \cos \theta), \quad a > 0$$

حل: تجربه‌ای که در مورد معادله‌ها در مختصات دکارتی داریم، ممکن است این فکر را القا کند که برای یافتن نقاط تقاطع باید معادله‌های $r^2 = 4a^2 \cos \theta$ و $r = a(1 - \cos \theta)$ را با هم حل کنیم. ولی همچنانکه خواهیم دید، حل دستگاه تنها دو نقطه از چهار نقطه تقاطع خمها را به دست می‌دهد. نقطه‌های دیگر را باید با ترسیم نمودار پیدا کرد.

اگر در معادله $r = a(1 - \cos \theta)$ قرار دهیم $\cos \theta = r^2 / 4a^2$ ، خواهیم داشت

$$r = a(1 - \cos \theta)$$

$$r = a \left(1 - \frac{r^2}{4a^2} \right)$$

رسم شود که طوقها و فرورفتگیهای نمودار مشخص گردد، این روش می‌تواند کارساز باشد. در این بخش، روش دیگری را برای ترسیم نمودار شرح می‌دهیم که معمولاً سریعتر به نتیجه می‌رسد و قابل اعتمادتر است. این روش از گامهای زیر تشکیل یافته است.

۱. نخست نمودار $r = f(\theta)$ را در صفحه $r\theta$ دکارتی رسم می‌کنیم (یعنی، مقادیر θ را روی يك محور افقی و مقادیر متناظر r را روی يك محور قائم مشخص می‌کنیم).

۲. سپس نمودار دکارتی را به عنوان يك «جدول» به کار می‌گیریم و با استفاده از آن، نمودار مختصات قطبی را رسم می‌کنیم.

این روش از روشی که اول ذکر کردیم بهتر است زیرا از روی نمودار دکارتی، حتی اگر با شتاب لاسم شده باشد، می‌توان با يك نگاه تشخیص داد که r در کجا مثبت، منفی، و ناموجود است، و نیز r در کجا صعودی و در کجا نزولی است. به عنوان مثال، نمودار $r^2 = \sin 2\theta$ و $r = 1 + \cos(\theta/2)$ را رسم می‌کنیم.

مثال ۳ مطلوب است ترسیم نمودار

$$r = 1 + \cos \frac{\theta}{2}.$$

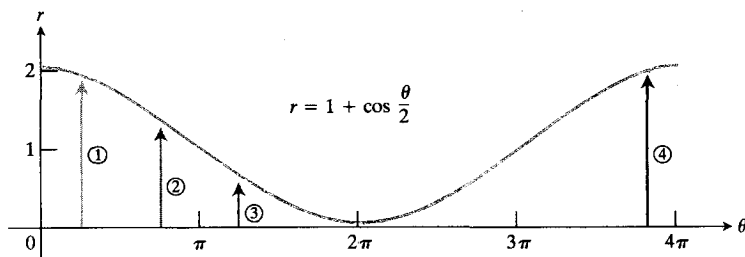
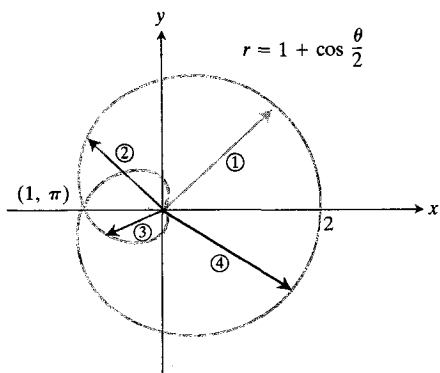
حل: نخست نمودار r را به صورت تابعی از θ در صفحه $r\theta$ دکارتی رسم می‌کنیم. چون کسینوس دارای دوره تناوب 2π است، θ باید از ۰ تا 4π تغییر کند تا کل نمودار تولید شود (شکل ۱۵.۱۰ در صفحه بعد). پیکانهایی که از محور θ تا خم رسم شده‌اند، بردارهای شعاعی را برای ترسیم $r = 1 + \cos(\theta/2)$ در صفحه قطبی به دست می‌دهند. این را در شکل ۱۶.۱۰ می‌بینید. ■

مثال ۴ يك پرده. نمودار خم $r^2 = \sin 2\theta$ را رسم کنید.

حل: در اینجا کار را با ترسیم r^2 (نه r) به صورت تابعی از θ در صفحه $r^2\theta$ دکارتی آغاز می‌کنیم. شکل ۱۷.۱۰ را ببینید. سپس، از اینجا به نمودار $r = \pm \sqrt{\sin 2\theta}$ در صفحه $r\theta$ می‌رسیم (شکل ۱۸.۱۰)، و آنگاه نمودار قطبی را رسم می‌کنیم (شکل ۱۹.۱۰). نمودار موجود در شکل ۱۸.۱۰، نمودار قطبی نهایی در شکل ۱۹.۱۰ را دوبار «می‌پوشاند». می‌توانستیم فقط دونیمه بالایی یا فقط دونیمه پایینی نمودار شکل ۱۸.۱۰ را در نظر بگیریم. ولی این «دوبار پوشاندن» هم اشکالی پیش نمی‌آورد و در واقع به این طریق، از رفتار تابع اطلاع بیشتری به دست می‌آوریم. ■

یافتن نقاط تقاطع خمها

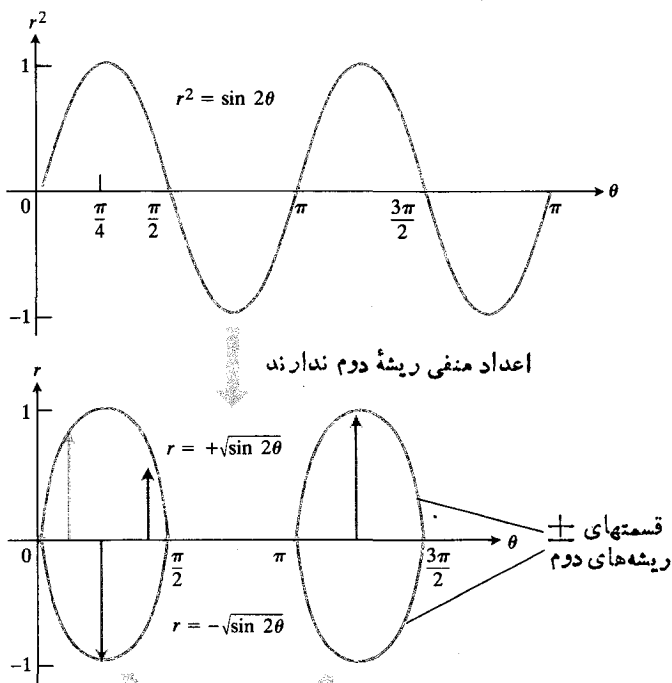
با توجه به این واقعیت که يك نقطه را می‌توان به صورت‌های مختلفی در مختصات قطبی نشان داد، بایستی در این مورد که يك نقطه چقدر بر نمودار يك معادله قطبی واقع است با دقت زیادی تصمیم بگیریم



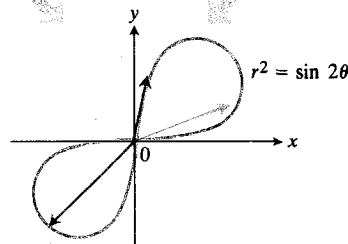
۱۶۰۱۰ بردارهای شعاعی در نمودار قبلی به ما کمک می کنند که نمودار را در صفحه $r\theta$ قطبی رسم کنیم.

۱۵۰۱۰ نمودار $r = 1 + \cos(\theta/2)$ در صفحه $r\theta$ دکارتی هر تعداد بردار شعاعی از محور θ تا خم را به دست می دهد.

۱۷۰۱۰ نمودار $r^2 = \sin 2\theta$ در صفحه $r^2\theta$ دکارتی شامل مقادیر منفی متغیر وابسته r^2 و نیز مقادیر مثبت آن است.



۱۸۰۱۰ وقتی نمودار r را بر حسب θ در صفحه $r\theta$ دکارتی رسم می کنیم، نقاطی را که در آنجا r^2 منفی است نادیده می گیریم ولی قسمتهای $+$ و $-$ را از روی نقاطی که r^2 در آنجا مثبت است، رسم می کنیم.



۱۹۰۱۰ در صفحه $r\theta$ قطبی، بردارهای شعاعی نمودار قبلی نمودار نهایی را دوبار «می پوشانند».

مسأله ۲۶ را ببینید.

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱-۸، دربارهٔ خمها بحث کنید و آنها را بکشید.

۱. $r = a(1 + \cos \theta)$

۲. $r = a(1 - \sin \theta)$

۳. $r = a \sin 2\theta$

۴. $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

۵. $r = a(2 + \sin \theta)$

۶. $r = a(1 + 2 \sin \theta)$

۷. $r = \theta$

۸. $r = a \sin(\theta/2)$

در مسأله‌های ۹-۱۲، خمهایی را که معادله‌های آنها داده شده، رسم کنید. این خمها حلزونی نام دارند و هنگام ترسیم آنها مناسب این نام را درخواهید یافت. معادله‌های حلزونی به صورت $r = a \pm b \cos \theta$ یا $r = a \pm b \sin \theta$ هستند. حلزونیها چهار شکل اصلی دارند.

۹. حلزونی با طوق داخلی

الف) $r = \frac{1}{2} + \cos \theta$

ب) $r = \frac{1}{2} + \sin \theta$

۱۰. دلواد

الف) $r = 1 - \cos \theta$

ب) $r = -1 + \sin \theta$

۱۱. حلزونی فردرخته

الف) $r = \frac{3}{2} + \cos \theta$

ب) $r = \frac{3}{2} - \sin \theta$

۱۲. حلزونی محدب

الف) $r = 2 + \cos \theta$

ب) $r = -2 + \sin \theta$

۱۳. ناحیه‌ای را که با نامعادله $0 \leq r \leq 2 - 2 \cos \theta$ تعریف می‌شود، رسم کنید.

$$r^2 + 2ra - 2a^2 = 0$$

$$r = -2a \pm 2a\sqrt{2}$$

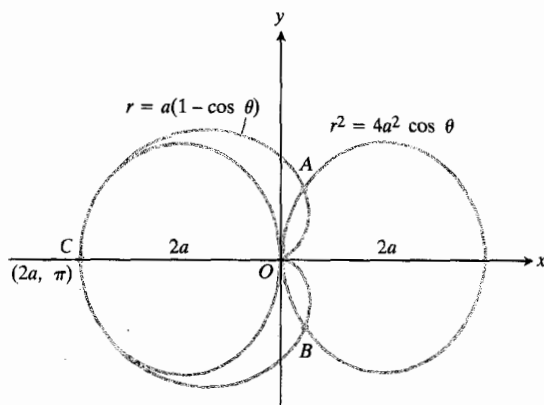
قدر مطلق مقدار $-2a - 2a\sqrt{2}$ بزرگتر از آن است که معرف نقطه‌ای از یکی از خمها باشد، و لسی مقدار $r = -2a + 2a\sqrt{2} = 2a(\sqrt{2} - 1)$ قابل قبول است.

نمودار معادلات اصلی را به آسانی و با ترکیب کردن نمودارهای شکلهای ۱۲.۱۰ و ۱۴.۱۰ می‌توان رسم کرد (شکل ۲۰.۱۰). در این شکل می‌بینیم که خمها در مبدأ، جایی که $r = 0$ ، و در نقطه $(2a, \pi)$ ، جایی که $r = 2a$ ، نیز یکدیگر را قطع می‌کنند. چرا این مقادیر r با حل همزمان معادلات پیدا نمی‌شوند؟ جواب ساده است: نقاط $(0, 0)$ و $(2a, \pi)$ روی خمها «به‌طور همزمان» واقع نیستند، یعنی به ازای مقدار واحدی از θ روی هر دو خم قرار نمی‌گیرند. نقطه $(2a, \pi)$ به ازای $\theta = \pi$ روی خم $r = a(1 - \cos \theta)$ قرار دارد حال آنکه به ازای $\theta = 0$ روی خم $r^2 = 2a^2 \cos \theta$ واقع است و در $\theta = 0$ به وسیله مختصات $(2a, \pi)$ که در این معادله صدق نمی‌کنند، مشخص نمی‌شود بلکه به وسیله مختصات $(-2a, 0)$ مشخص می‌شود که در معادله صدق می‌کنند. همین‌طور، مبدأ روی دلواد به ازای $\theta = 0$ به دست می‌آید ولی روی خم $r^2 = 2a^2 \cos \theta$ به ازای $\theta = \pi/2$ قرار دارد. نتیجه می‌گیریم که این خمها در چهار نقطه زیرهم را قطع می‌کنند

$$(0, 0), (2a, \pi), (r_1, \theta_1), (r_1, -\theta_1) \quad (1)$$

که در آن

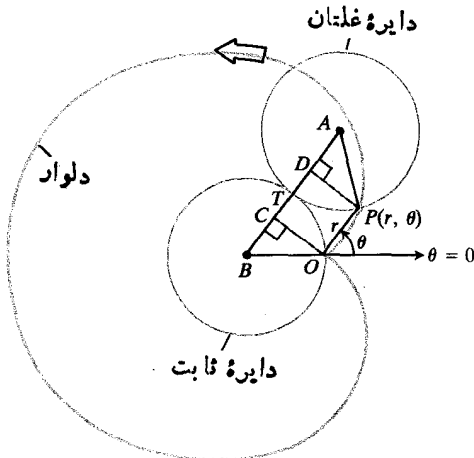
$$r_1 = (-2 + 2\sqrt{2})a, \cos \theta_1 = 1 - \frac{r_1}{a} = 2 - 2\sqrt{2}. \quad (2)$$



۲۰.۱۰ چهار نقطه تقاطع خمهای $r = a(1 - \cos \theta)$ و $r^2 = 2a^2 \cos \theta$ تنها دوتا از این چهار نقطه (A و B) با حل دستگاه معادله‌ها به دست آمد. دو نقطه دیگر (C و O) را با ترسیم نمودار به دست آوردیم.

معادله‌های (۲) و (۵) را باهم حل کنید و نشان دهید که $(2a, \pi)$ يك جواب مشترك است. (با این حال، از اینجا معلوم نمی‌شود که نمودارها در $(0, 0)$ یکدیگر را قطع می‌کنند.)
 ب) مبدأ باهم (طبق معمول) مورد خاصی است. يك روش برای تعیین تکلیف آن این است: در معادله‌های (۳) و (۴) قرار دهید $r = 0$ و هر يك از معادله‌ها را نسبت به مقدار متناظری از θ حل کنید. چون $(0, \theta)$ به ازای هر θ نشان دهنده مبدأ است، از اینجا معلوم می‌شود که هر دو خم، حتی به ازای مقادیر متفاوتی از θ ، از مبدأ می‌گذرند.

۲۷. قوسیم دلواد با استفاده از دواير. نشان دهید که اگر دایره‌ای به شعاع a را روی محیط دایره دیگری به شعاع a بفلتانید، چنانکه در شکل ۲۱.۱۰ دیده می‌شود، نقطه تماس اولیه، P ، دسواری در صفحه رسم خواهد کرد. (دانهمایی: نشان دهید که اندازه هر دو زاویه OBC و PAD برابر θ است.)



۲۱.۱۰ دایره‌های مورد بحث درمسأله ۲۷. وقتی دایره به مرکز A روی محیط دایره به مرکز B می‌غلند، نقطه P يك دلواد رسم می‌کند.

۲۸. رسم کامپیوتری اگر به رسم کامپیوتری دسترسی دارید، می‌توانید از ترسیم خمهای زیر لذت ببرید.

$$r = 1 + 2 \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{الف})$$

ب) گله: $r = \cos m\theta$ به ازای $m = \frac{1}{3}, 2, 3, 7$.

۱۴. ناحیه‌ای را که با نامعادله $\cos \theta \leq r^2 \leq 0$ تعریف می‌شود، رسم کنید.

۱۵. نشان دهید که نقطه $(2, 3\pi/4)$ بر خم $r = 2 \sin 2\theta$ واقع است.

۱۶. نشان دهید که نقطه $(1/2, 3\pi/2)$ بر خم $r = -\sin(\theta/3)$ واقع است.

نقاط تقاطع هر جفت از خمهای مذکور درمسأله‌های ۱۷-۲۴ را به دست آورید.

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad r = a(1 - \sin \theta), \quad a > 0 \quad ۱۷$$

$$r^2 = \sin 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta, \quad a > 0 \quad ۱۸$$

$$r = 1 - \cos \theta, \quad r^2 = \cos \theta \quad ۱۹$$

$$r^2 = \sin \theta, \quad r^2 = \cos \theta \quad ۲۰$$

$$r = 1, \quad r = 2 \sin 2\theta \quad ۲۱$$

$$r = a \cos 2\theta, \quad r = a \sin 2\theta, \quad a > 0 \quad ۲۲$$

$$r = 1 + \cos \frac{\theta}{2}, \quad r = 1 - \sin \frac{\theta}{2} \quad ۲۳$$

$$r^2 = 2a^2 \sin 2\theta, \quad r = a, \quad a > 0 \quad ۲۴$$

۲۵. نشان دهید که معادله‌های

$$r = -1 + \cos \theta \quad \text{و} \quad r = 1 + \cos \theta$$

خم واحدی را نشان می‌دهند.

۲۶. در متن این بخش، با حل دستگاه معادلات

$$r^2 = 2a^2 \cos \theta \quad (۳)$$

$$r = a(1 - \cos \theta) \quad (۴)$$

نمی‌توانستیم نقاط $(0, 0)$ و $(2a, \pi)$ را که جزو نقاط تقاطع نمودارهای این معادلات اند، به دست آوریم.

الف) ولی می‌توانیم نقطه $(2a, \pi)$ را از این طریق بیابیم که در معادله (۳) به جای (r, θ) معادل آن $(-r, \theta + \pi)$ را قرار دهیم و به دست آوریم

$$r^2 = 2a^2 \cos \theta$$

$$(-r)^2 = 2a^2 \cos(\theta + \pi) \quad (۵)$$

$$r^2 = -2a^2 \cos \theta.$$



TOOLKIT PROGRAMS

Parametric Equations

Super * Grapher

۳.۱۰ معادله‌های قطبی مقاطعهای مخروطی و خمهای دیگر

در این بخش، با این واقعیت جالب روبه‌رو می‌شویم که بیضیها، سهمیها، و هذلولیها همگی با معادله قطبی واحدی قابل توصیف‌اند. همچنین، معادلاتی قطبی برای خطها و دایره‌ها خواهیم یافت. در مسائل پایان بخش خمهای دیگری را نیز معرفی می‌کنیم.

مثال ۱ خط. فرض کنید که خط عمود از مبدأ بر خط L ، خط L را در نقطه $N(p, \beta)$ قطع می‌کند. معادله‌ای قطبی برای L بیابید.

حل: فرض می‌کنیم یک نقطه نمونه‌وار L باشد (شکل ۲۲.۱۰)؛ با توجه به مثلث قائم‌الزاویه ONP داریم

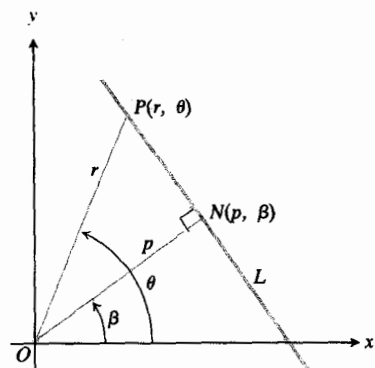
$$\cos(\theta - \beta) = \frac{p}{r} \quad (۱)$$

یا

$$r \cos(\theta - \beta) = p \quad (۲)$$

اگر L بر محور x عمود باشد، β برابر ۰ است و معادله (۲) تبدیل می‌شود به

$$r \cos \theta = p \quad \text{یا} \quad x = p \quad (۳)$$



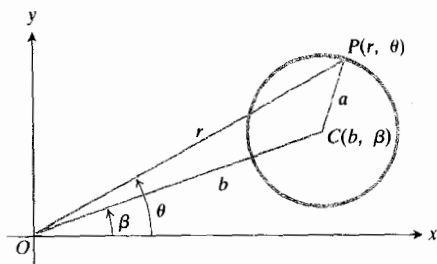
۲۲.۱۰ در این شکل، رابطه $p/r = \cos(\theta - \beta)$ را بدهد. یا $r \cos(\theta - \beta) = p$ را از روی مثلث ONP می‌توان ملاحظه کرد.

مثال ۲ دایره. معادله‌ای قطبی برای دایره به شعاع a و به مرکز (b, β) بیابید.

حل: فرض می‌کنیم یک نقطه دلخواه روی دایره باشد و قانون کسینوسها را در مورد مثلث OCP (شکل ۲۳.۱۰)

به‌کار می‌بریم تا به‌دست آوریم

$$a^2 = b^2 + r^2 - 2br \cos(\theta - \beta). \quad (۲)$$



۲۳.۱۰ برای یافتن معادله‌ای از این دایره، قانون کسینوسها را در مورد مثلث OCP به‌کار می‌بریم.

اگر دایره از مبدأ بگذرد، داریم $b = a$ و معادله شکل ساده‌تر زیر را پیدا می‌کند

$$r(r - 2a \cos(\theta - \beta)) = 0 \quad (۵)$$

یا

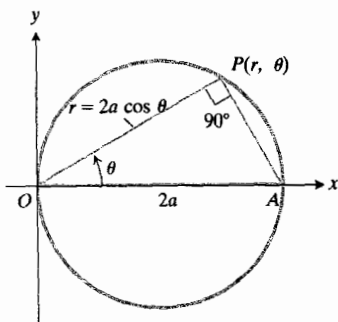
$$r = 2a \cos(\theta - \beta). \quad (۶)$$

اگر $\beta = 0$ ، معادله (۶) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$r = 2a \cos \theta \quad (۷)$$

(شکل ۲۴.۱۰). اگر $\beta = 90^\circ$ ، مرکز دایره بر محور y واقع است (شکل ۲۵.۱۰)، و معادله (۶) به‌معادله زیر تحویل می‌یابد

$$r = 2a \sin \theta. \quad (۸)$$



۲۴.۱۰ دایره $r = 2a \cos \theta$

در حالی که

$$PD = AB = AF + FB = k + r \cos \theta.$$

حال، معادله (۹) چیزی جز معادله زیر نیست

$$r = e(k + r \cos \theta). \quad (10)$$

این معادله را نسبت به r حل می‌کنیم تا به صورت متعارف درآید.

معادله قطبی مقاطعهای مخروطی

$$r = \frac{ke}{1 - e \cos \theta}. \quad (11)$$

یک کانون در مبدأ است

هادی، قائم و درست چپ مبدأ است

 k برابر است با فاصله مبدأ تا هادی e برابر است با خروج از مرکز

معادله (۱۱) معادله متعارف مقاطعهای مخروطی در مختصات قطبی است. اگر e را برابر $1/2$ ، 1 ، و 2 بگیریم، حالات نمونه‌وار به دست می‌آیند

$$r = \frac{k}{2 - \cos \theta} \quad e = \frac{1}{2} \quad \text{بیضی} \quad (12)$$

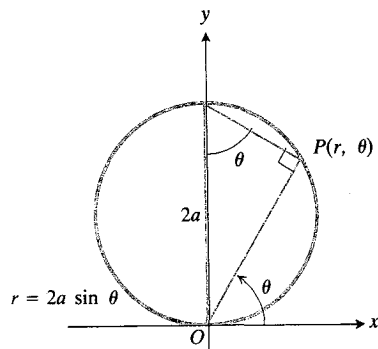
$$r = \frac{k}{1 - \cos \theta} \quad e = 1 \quad \text{سهی} \quad (13)$$

$$r = \frac{2k}{1 - 2 \cos \theta} \quad e = 2 \quad \text{هذلولی} \quad (14)$$

در معادله (۱۲) که مربوط به بیضی است، مخرج کسر هیچگاه کوچکتر از ۱ نیست، بنابراین r هیچگاه بزرگتر از k نیست. ولی در معادله (۱۳) وقتی θ به ۰ میل می‌کند، و در معادله (۱۴) وقتی θ به $\pi/3$ میل می‌کند، r بینهایت می‌شود. از روی نمودار بیضی که در شکل ۲۷.۱۰ آمده است می‌بینیم که k از طریق معادله زیر به خروج از مرکز، e ، و نصف قطر بزرگ، a ، مربوط است

$$k = \frac{a}{e} - ea. \quad (15)$$

از اینجا، رابطه $ke = a(1 - e^2)$ را به دست می‌آوریم. بنابراین، معادله بیضی که نصف قطر بزرگ آن a و خروج از مرکز e باشد،



۲۵.۱۰ معادله دایره‌ای که از مبدأ بگذرد و مرکزش روی قسمت مثبت محور y واقع باشد، $r = 2a \sin \theta$ است.

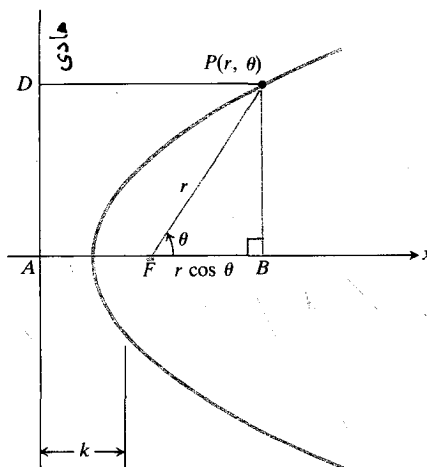
مثال ۳ بیضی، سهی، هذلولی. اگر کانون مقطعی مخروطی با خروج از مرکز e در مبدأ واقع باشد و هادی متناظر این کانون خط $x = -k$ باشد، معادله‌ای قطبی برای مقطع بیاید.

حل: شیوه نمادگذاری شکل ۲۶.۱۰ را اتخاذ می‌کنیم و ویژگی کانون-هادی

$$PF = e \cdot PD \quad (9)$$

از بخش ۲.۸ را به کار می‌گیریم. به این ترتیب، می‌توانیم بیضی، سهی، و هذلولی را به طور همزمان مورد مطالعه قرار دهیم. اگر مبدأ را در کانون F بگیریم، داریم

$$PF = r$$



۲۶.۱۰ اگر $PF = e \cdot PD$ ، آنگاه

$$r = e(k + r \cos \theta)$$

به r حل می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$r = \frac{ke}{1 - e \cos \theta}$$

$e = 0.25$ به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\blacksquare \quad k = 39.44 \left(\frac{1}{0.25} - 0.25 \right) = 147.9 \text{ AU}.$$

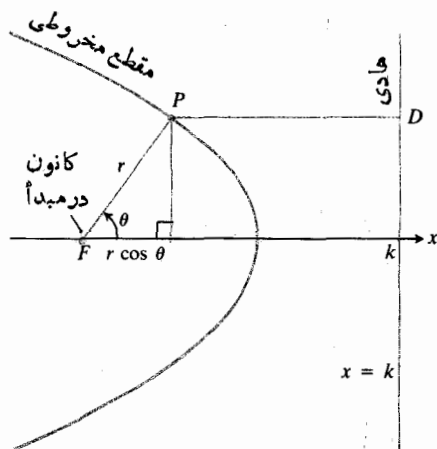
اگر به جای خط $x = -k$ خط $x = k$ را هادی يك منقطع مخروطی بگیریم (شکل ۲۸.۱۰)، معادله $PF = e \cdot PD$ به شکل زیر درمی‌آید

$$r = e(k - r \cos \theta) \quad (17)$$

که اگر آن را نسبت به r حل کنیم، خواهیم داشت

$$r = \frac{ke}{1 + e \cos \theta}. \quad (18)$$

این معادله، بجز از لحاظ علامت درمخرج، با معادله (۱۱) یکی است.

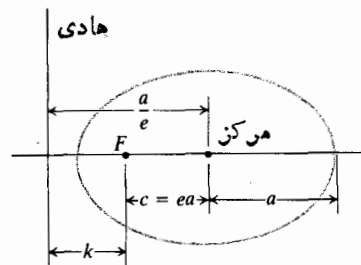


۲۸.۱۰ نموداری برای یافتن معادله قطبی متعارف يك مقطع مخروطی با خروج از مرکز e که کانونش در مبدأ، و هادیش خط قائمی است که به فاصله k واحد در سمت راست مبدأ قرار دارد. فاصله PD برابر است با $(k - r \cos \theta)$.

مثال ۶ مطلوب است معادله هذلولیی با خروج از مرکز $3/2$ و هادی $x = 2$.

حل: معادله (۱۸) را با ضوابط $x = 2$ و $e = 3/2$ به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\blacksquare \quad r = \frac{6}{2 + 3 \cos \theta} \quad \text{یا} \quad r = \frac{2(3/2)}{1 + (3/2) \cos \theta}$$



۲۷.۱۰ در بیضی که نصف قطر بزرگ آن a باشد، فاصله کانون تا هادی برابر است با $k = (a/e) - ea$ پس $ke = a(1 - e^2)$.

چنین است

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}. \quad (16)$$

مثال ۴ مطلوب است معادله قطبی بیضی که نصف قطر بزرگ آن برابر 39.44 واحد نجومی (AU) و خروج از مرکز 0.25 است؛ اینها مشخصات تقریبی اندازه و شکل مدار پلوتون به دور خورشید است. يك واحد نجومی، طول نصف قطر بزرگ مدار زمین است.

حل: معادله (۱۶) را با ضوابط $a = 39.44$ و $e = 0.25$ به کار می‌گیریم و به دست می‌آوریم

$$r = \frac{39.44(1 - (0.25)^2)}{1 - 0.25 \cos \theta} = \frac{147.9}{1 - \cos \theta}.$$

نزدیکترین نقطه مدار پلوتون به خورشید (حضیض)، به اندازه

$$r = \frac{147.9}{2} = 73.95 \text{ AU}$$

از خورشید فاصله دارد. دورترین نقطه این مدار (اوج)، به فاصله

$$r = \frac{147.9}{2 - 1} = 147.9 \text{ AU}$$

از خورشید قرار دارد.

مثال ۵ مطلوب است فاصله يك کانون بیضی مثال ۴ تا هادی متناظرش.

حل: معادله (۱۵) را با ضوابط $a = 39.44$

مثال ۷ هادی سهمی زیر را بیابید

$$r = \frac{25}{10 + 10 \cos \theta}$$

حل: صورت و مخرج این کسر را بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم تا معادله به صورت متعارف درآید

$$r = \frac{5/2}{1 + \cos \theta}$$

که همان معادله

$$r = \frac{ke}{1 + e \cos \theta}$$

با ضوابط $k = 5/2$ و $e = 1$ است. معادله هادی، $x = 5/2$ است.



$$r(3 + 3 \cos \theta) = 2 \quad ۰۱۷$$

$$r(16 + 8 \cos \theta) = 216 \quad ۰۱۸$$

درمسأله‌های ۱۹-۲۳، نمودار معادله‌ها را رسم کنید.

$$r = 2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \quad ۰۱۹$$

$$r = 4 \csc \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \quad ۰۲۰$$

$$r = 5 \sec \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \quad ۰۲۱$$

$$r = 3 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \quad ۰۲۲$$

$$r = a + a \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \quad ۰۲۳$$

۰۲۴. شکل ناحیه‌ای را که با نامعادله $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$ تعریف می‌شود بکشید.

هریک از نمودارهای مسأله‌های ۲۵-۳۲، نمودار دقیقاً یکی از معادله‌های (الف)-(ر) است که در فهرست زیر می‌بینید. معادله هر نمودار را پیدا کنید.

$$r = \cos 2\theta \quad \text{(الف)}$$

$$r \cos \theta = 1 \quad \text{(ب)}$$

$$r = \frac{6}{1 - 2 \cos \theta} \quad \text{(پ)}$$

$$r = \sin 2\theta \quad \text{(ت)}$$

$$r = \theta \quad \text{(ث)}$$

$$r^2 = \cos 2\theta \quad \text{(ج)}$$

$$r = 1 + \cos \theta \quad \text{(ج)}$$

$$r = 1 - \sin \theta \quad \text{(ح)}$$

$$r = \frac{2}{1 - \cos \theta} \quad \text{(خ)}$$

$$r^2 = \sin 2\theta \quad \text{(د)}$$

$$r = -\sin \theta \quad \text{(ذ)}$$

$$r = 2 \cos \theta + 1 \quad \text{(ر)}$$

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱-۱۸، خمها را رسم کنید. برای هر خم، يك معادله دکارتی بیابید.

$$r = 4 \cos \theta \quad ۰۱$$

$$r = 6 \sin \theta \quad ۰۲$$

$$r = -2 \cos \theta \quad ۰۳$$

$$r = -2 \sin \theta \quad ۰۴$$

$$r = \sin 2\theta \quad ۰۵$$

$$r = \sin 3\theta \quad ۰۶$$

$$r^2 = 8 \cos 2\theta \quad ۰۷$$

$$r^2 = 2 \sin 2\theta \quad ۰۸$$

$$r = 8(1 - 2 \cos \theta) \quad ۰۹$$

$$r = 1/(2 - \cos \theta) \quad ۰۱۰$$

$$r = 2(1 - \cos \theta) \quad ۰۱۱$$

$$r(2 - 2 \cos \theta) = 2 \quad ۰۱۲$$

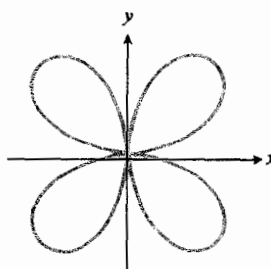
$$r(3 - 6 \cos \theta) = 12 \quad ۰۱۳$$

$$r(10 - 5 \cos \theta) = 25 \quad ۰۱۴$$

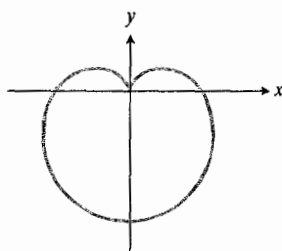
$$r(2 + \cos \theta) = 2 \quad ۰۱۵$$

$$r(2 + 2 \cos \theta) = 1 \quad ۰۱۶$$

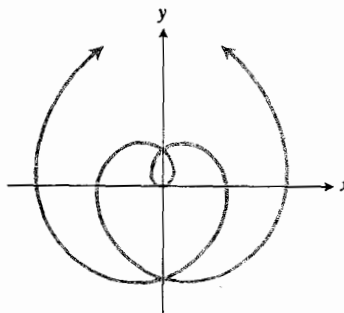
۲۵. گل چهارپر



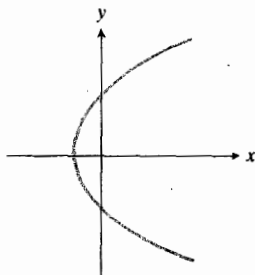
۳۰. دلواری



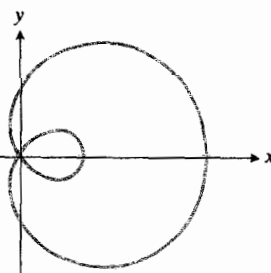
۲۶. مارپیچ



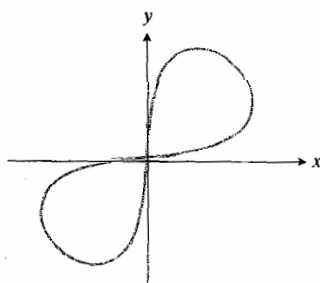
۳۱. سهمی



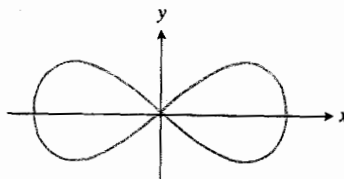
۲۷. حلزونی



۳۲. پروانه



۲۸. پروانه

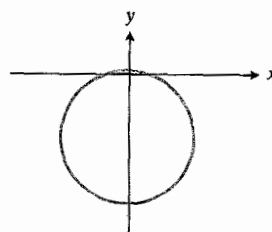


۳۳. مارپیچ ارشمیدس. نمودار معادله‌ای به شکل $r = a\theta$ ، که a ثابتی نامنفی است، یک مارپیچ ارشمیدسی نامیده می‌شود. نشان دهید که چنین مارپیچی، هر پرتوی را که از مبدأ بگذرد به بخشهای مساوی تقسیم می‌کند. به عبارت دیگر نشان دهید که فاصله بین هر دو دور متوالی مارپیچ ثابت است.

۳۴. گلی دهمیان گل. نمودار معادله $r = 1 - 2 \sin 3\theta$ را رسم کنید.

۳۵. مدارهای سیارات. در مثال ۴، معادله‌ای قطبی برای مدار پلوتون یافتیم. با استفاده از داده‌های جدول ۱، معادلاتی قطبی برای مدار سایر سیارات بیابید.

۲۹. دایره



قطبی مشخص کنید.

۳۸. مسأله ۳۷ را برای خمهای $r = \sec \theta$ و $r = 2 \cos \theta$ تکرار کنید.

۳۹. کانون يك سهمی در مبدأ، و هادیش خط $r \cos \theta = -2$ است. برای این سهمی معادله ای قطبی بیابید.

۴۰. بیضی $r = 2/(2 - \cos \theta)$ را رسم کنید و مرکزش را مشخص کنید.

۴۱. يك کانون هذلولی با خروج از مرکز $5/2$ در مبدأ، و هادی متناظرش خط $r \cos \theta = 9$ است. مختصات قطبی کانون دوم را بیابید و نیز معادله ای قطبی برای این هذلولی پیدا کنید.

۴۲. معادله ای قطبی برای سهمی که کانونش در مبدأ و هادیش خط $r \cos(\theta - \pi/2) = 2$ است، پیدا کنید.



TOOLKIT PROGRAMS

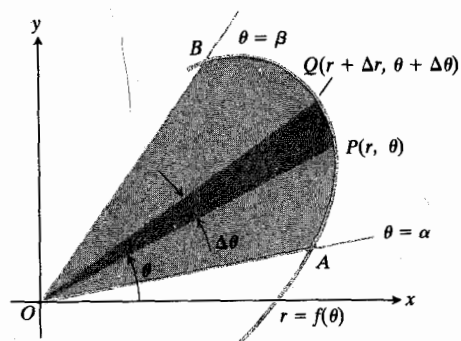
Parametric Equations Super * Grapher

۲.۱۰ انتگرال در مختصات قطبی

در این بخش، مساحتها و طول خمها را در مختصات قطبی حساب می کنیم. اگر چه شیوه کلی استنتاج انتگرالها به همان صورتی است که در مختصات دکارتی بود، ولی فرمولهای حاصل متفاوت اند.

مساحت در صفحه

ناحیه AOP در شکل ۲۰.۱۰ محدود به پرتوهای $\theta = \alpha$ ، $\theta = \beta$ ، و خم $r = f(\theta)$ است. زاویه AOB را به n قسمت تقسیم



۲۰.۱۰ وقتی P روی خم از A به B حرکت می کند، شعاع OP ناحیه ای پدید می آورد که برای یافتن فرمول مساحت آن، ناحیه را به چند قطاع تقسیم می کنیم.

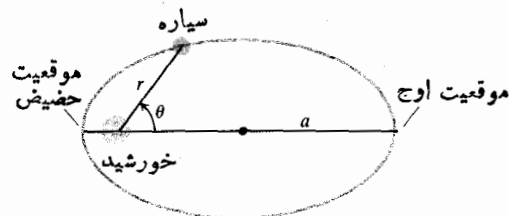
جدول ۱ نصف قطر بزرگ و خروج از مرکز مدار سیارات منظومه شمسی

| سیاره | نصف قطر بزرگ (واحد نجومی) | خروج از مرکز |
|---------|------------------------------|--------------|
| عطارد | ۰.۳۸۷۱ | ۰.۲۰۵۶ |
| زهره | ۰.۷۲۳۳ | ۰.۰۰۶۸ |
| زمین | ۱.۰۰۰ | ۰.۰۱۶۷ |
| مریخ | ۱.۵۲۴ | ۰.۰۹۳۴ |
| مشتری | ۵.۲۰۳ | ۰.۰۴۸۴ |
| زحل | ۹.۵۳۹ | ۰.۰۵۴۳ |
| اورانوس | ۱۹.۱۸ | ۰.۰۴۶۰ |
| نپتون | ۳۰.۰۶ | ۰.۰۰۸۲ |
| پلوتون | ۳۹.۴۲ | ۰.۲۴۸۱ |

۳۶. حضیض و اوج (شکل ۲۹.۱۰ را ببینید.) سیاره ای روی مداری به شکل بیضی که طول نصف قطر بزرگش a است، دور خورشیدش می گردد.

(الف) نشان دهید که وقتی سیاره در نزدیکترین نقطه مسیرش به خورشید قرار دارد، $r = a(1 - e)$ و وقتی در دورترین نقطه نسبت به خورشید قرار دارد، $r = a(1 + e)$.

(ب) با استفاده از داده های جدول ۱، نزدیکترین و دورترین فاصله هر يك از سیارات منظومه شمسی ما را از خورشید حساب کنید.



۲۹.۱۰ مواضع يك سیاره در نزدیکترین و دورترین نقاط مسیرش از خورشید، موسوم به حضیض و اوج.

۳۷. (الف) معادلاتی دکارتی برای خمهای $r = 2 \sin \theta$ و $r = \csc \theta$ بیابید.

(ب) خمهای قسمت (الف) را در يك نمودار رسم کنید و نقاط تقاطع را هم در مختصات دکارتی و هم در مختصات

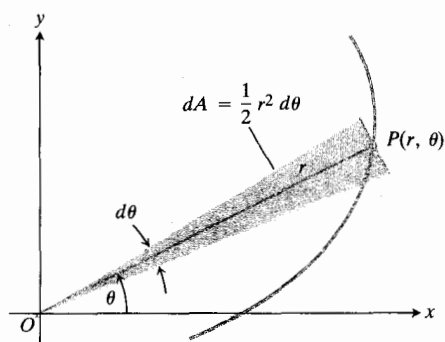
مساحت ناحیه بین مبدا و $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ، $r = f(\theta)$

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta. \quad (1)$$

این، انتگرال دیفرانسیل مساحتی زیر است

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta. \quad (2)$$

شکل ۳۲.۱۰ را ببینید.



۳۲.۱۰ دیفرانسیل مساحتی dA .

مثال ۱ مساحت ناحیه محدود به دلووار $r = 2(1 + \cos \theta)$ را پیدا کنید.

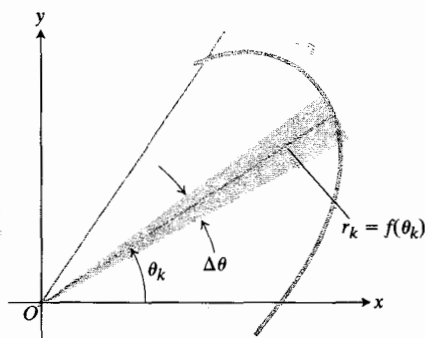
حل: نمودار دلووار را رسم می‌کنیم (شکل ۳۳.۱۰) و می‌بینیم که اگر θ از ۰ تا 2π تغییر کند، شعاع OP این ناحیه را (دقیقاً یکبار) می‌روبد. بنابراین، مساحت برابر است با

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 2(1 + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2(1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2 + 4\cos \theta + 2\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (3 + 2\cos \theta + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \left[3\theta + 2\sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 6\pi - 0 \\ &= 6\pi. \end{aligned}$$

می‌کنیم و یک قطاع نمونه‌وار POQ را با یک قطاع مستدیر به شعاع r و به زاویه مرکزی $\Delta\theta$ تقریب می‌زنیم (شکل ۳۱.۱۰). حال

$$POQ \text{ مساحت} \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

$$A = AOB \text{ مساحت} \approx \sum_{k=\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta.$$



۳۱.۱۰ به ازای θ_k ای بین θ و $\theta + \Delta\theta$ ، مساحت قطاع مستدیر سایه‌خورده دقیقاً برابر است با مساحت قطاع POQ محدود به خمی که در شکل ۳۱.۱۰ نشان داده شد.

اگر تابع $r = f(\theta)$ ، که خم قطبی را معرفی می‌کند، تابع پیوسته‌ای از θ به ازای $\alpha \leq \theta \leq \beta$ باشد، آنگاه θ_k ای بین θ و $\theta + \Delta\theta$ وجود دارد که به ازای آن، قطاع مستدیر به شعاع

$$r_k = f(\theta_k)$$

و به زاویه مرکزی $\Delta\theta$ ، مساحت دقیق POQ را به دست می‌دهد (شکل ۳۱.۱۰ را ببینید). پس کل مساحت دقیقاً از رابطه زیر به دست می‌آید

$$A = \sum \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta = \sum \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \Delta\theta.$$

اگر فرض کنیم $\Delta\theta \rightarrow 0$ ، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \sum \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \Delta\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta. \end{aligned}$$

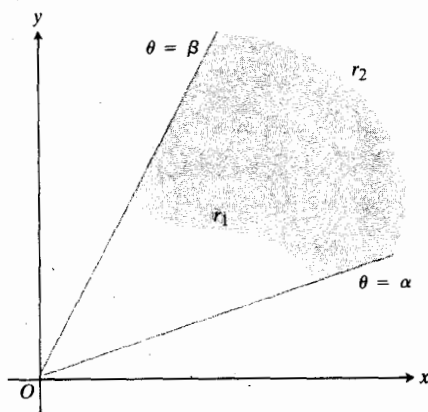
داریم

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\pi/3}^{\pi} (3 + 2 \cos 2\theta + 2 \cos \theta) d\theta \\
 &= \left[3\theta + \sin 2\theta + 2 \sin \theta \right]_{\pi/3}^{\pi} \\
 &= (3\pi) - \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

برای یافتن مساحت ناحیه‌ای مانند ناحیه شکل ۳۵.۱۰، که بین دو خم قطبی از $\theta = \alpha$ تا $\theta = \beta$ قرار دارد، انتگرال $\frac{1}{2} r_2^2 d\theta$ را از انتگرال $\frac{1}{2} r_1^2 d\theta$ کم می‌کنیم. این عمل به فرمول زیر می‌انجامد.

مساحت ناحیه $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ، $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$

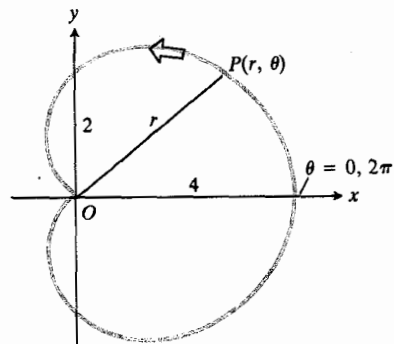
$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_2^2 d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_1^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) d\theta \quad (۳)$$



۳۵.۱۰ مساحت ناحیه سایه‌خورده با تفريق مساحت ناحیه بین r_1 و مبدأ از مساحت ناحیه بین r_2 و مبدأ به دست می‌آید.

مثال ۳ مساحت ناحیه‌ای را که درون دایره $r = 1$ و بیرون دایره $r = 1 - \cos \theta$ قرار دارد، پیدا کنید.

حل: نمودار این ناحیه را می‌کشیم و مرزهای آن را مشخص می‌کنیم و حدود انتگرال‌گیری را می‌یابیم (شکل ۳۶.۱۰). خم بیرونی، $r_2 = 1$ و خم درونی، $r_1 = 1 - \cos \theta$ است و θ از



۳۳.۱۰ دایره $r = 2(1 + \cos \theta)$

مثال ۲ مطلوب است مساحت ناحیه داخل طوق کوچک حلزونی زیر

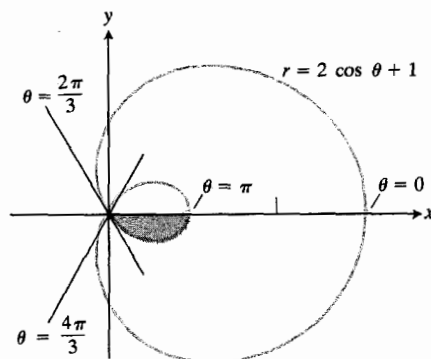
$$r = 2 \cos \theta + 1.$$

حل: پس از ترسیم این خم (شکل ۳۴.۱۰) می‌بینیم که طوق کوچک حلزونی با حرکت نقطه (r, θ) همراه با افزایش θ از $2\pi/3$ تا $4\pi/3$ رسم می‌شود. چون این خم نسبت به محور x متقارن است (معادله با تبدیل θ به $-\theta$ تغییر نمی‌کند) می‌توانیم مساحت نیمه سایه‌خورده طوق داخلی را با انتگرال‌گیری از $\theta = 2\pi/3$ تا $\theta = \pi$ حساب کنیم. مساحت A که در جستجوی آن هستیم، دو برابر مقدار انتگرال حاصل است

$$A = 2 \int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi} r^2 d\theta.$$

چون

$$\begin{aligned}
 r^2 &= (2 \cos \theta + 1)^2 \\
 &= 4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 1 \\
 &= 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 4 \cos \theta + 1 \\
 &= 2 + 2 \cos 2\theta + 4 \cos \theta + 1 \\
 &= 3 + 2 \cos 2\theta + 4 \cos \theta
 \end{aligned}$$

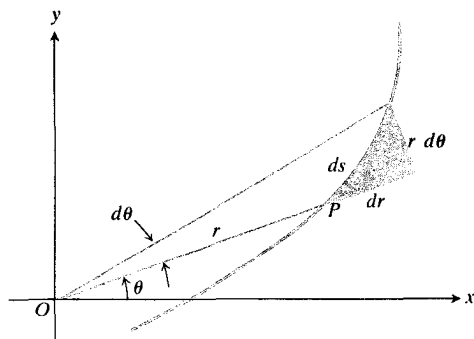


۳۴.۱۰ حلزونی مورد بحث در مثال ۲.

پس از انجام دادن عملیات، رابطه زیر حاصل می شود

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2. \quad (۲)$$

۳۷۰۱۰. dr ، $r d\theta$ و ds را اضلاع و وتر «مثلث قائم الزاویه» در شکل ۳۷۰۱۰ تلقی می کنیم.



۳۷۰۱۰. برای طول قوس، رابطه $ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$ برقرار است.

برای یافتن طول یک خم درمختصات قطبی

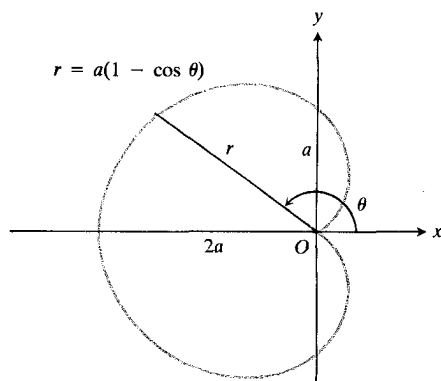
۱. ds را از معادله زیر پیدا کنید

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2. \quad (۵)$$

۲. سپس از ds بین حدود مناسبی از θ انتگرال بگیرید.

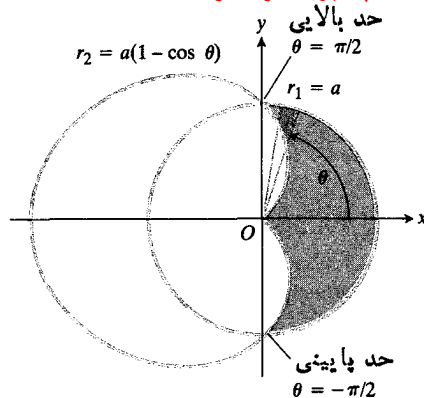
مثال ۴. طول دلواری $r = a(1 - \cos \theta)$ را پیدا کنید.

حل: نمودار دلواری را می کشیم (شکل ۳۸۰۱۰) تا حدود انتگرالگیری معلوم شود. به موازات آنکه θ از ۰ تا 2π تغییر می کند، ترسیم نمودار را از مبدأ شروع می کنیم، یک بار دلواری را در خلاف جهت ساعت رسم می کنیم، و به مبدأ بازمی گردیم.



۳۸۰۱۰. در مثال ۴، طول این دلواری محاسبه می شود.

کتاب، جزوه، نمونه سوال



۳۹۰۱۰. مبدأ و حدود انتگرالگیری در مثال ۳.

$-\pi/2$ تا $\pi/2$ تغییر می کند. با توجه به رابطه (۳)، مساحت برابر است با

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (r_1^2 - r_2^2) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((1)^2 - (1 - \cos \theta)^2) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 \cos \theta - \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2 \cos \theta - \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{\theta}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(-2 + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} \\ &= 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

طول قوس

با مجذور کردن و جمع کردن دیرانسیلهای زیر، فرمولی برای دیرانسیل طول قوس ds به دست می آوریم

$$dx = d(r \cos \theta) = -r \sin \theta d\theta + \cos \theta dr$$

$$dy = d(r \sin \theta) = r \cos \theta d\theta + \sin \theta dr.$$

x و y بر حسب r و θ بیان می‌کنیم. مثال بعد نشان می‌دهد که این کار چگونه انجام می‌شود.

مثال ۵ مساحت رویه‌ای را که از دوران طوق سمت راست پروانه $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ حول محور y پدید می‌آید، به دست آورید.

حل: خم را رسم می‌کنیم تا حدود انتگرالگیری و شعاع ρ یک قوس نمونه‌وار به طول ds معلوم شود (شکل ۳۹.۱۰). در این خم، θ از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ تغییر می‌کند، و $\rho = x = r \cos \theta$ از این رو،

$$\begin{aligned} 2\pi \rho ds &= 2\pi r \cos \theta \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} \\ &= 2\pi \cos \theta \sqrt{r^2 dr^2 + r^4 d\theta^2}. \end{aligned}$$

از روی معادله خم به دست می‌آوریم

$$r dr = -2a^2 \sin 2\theta d\theta$$

بنابراین

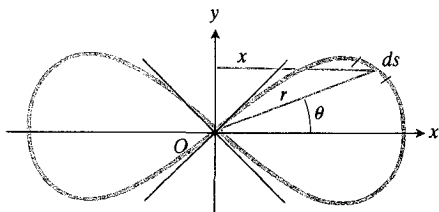
$$r^2 dr^2 + r^4 d\theta^2 = (2a^2 d\theta)^2 (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$$

و

$$2\pi \rho ds = 2\pi a^2 \cos \theta d\theta.$$

مساحت رویه برابر است با

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\pi a^2 \cos \theta d\theta &= 2\pi a^2 \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 2\pi a^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\pi a^2 \sqrt{2}. \end{aligned}$$



۳۹.۱۰ نیمه سمت راست یک پروانه حول محور y دوران می‌کند تا یک رویه تولید شود، که مساحتش در مثال ۵ محاسبه شده است.

برای محاسبه طول خم، در معادله (۵) قرار می‌دهیم

$$r = a(1 - \cos \theta), \quad dr = a \sin \theta d\theta$$

و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2 d\theta^2 + dr^2 \\ &= a^2(1 - \cos \theta)^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\theta^2 \\ &= 2a^2 d\theta^2 (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

و

$$ds = a\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta.$$

برای انتگرالگیری از عبارت سمت راست، جانشانی زیر را انجام می‌دهیم

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

بنابراین

$$ds = 2a \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta.$$

چون به ازای $0 \leq \theta \leq 2\pi$ داریم $\sin \theta/2 \geq 0$ ، پس

$$\begin{aligned} \text{طول دلواری} &= \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -2a \cos \frac{\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4a. \end{aligned}$$

اگر بخواهیم از تقارن دلواری استفاده کنیم، می‌توانیم طول قسمت بالایی را از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ حساب کرده نتیجه حاصل را دو برابر کنیم

$$\begin{aligned} \text{طول نیمه بالایی:} \quad \int_0^{\pi} 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta &= -2a \cos \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} \\ &= 2a. \end{aligned}$$

$$2(2a) = 4a$$

طول دلواری:

مساحت رویه

فرمول مساحت رویه دورانی عبارت است از

$$S = \int 2\pi \rho ds \quad (۶)$$

که در مختصات قائم‌هم چنین بود. اما اکنون این انتگرال را به جای

معادله (۵) را برای محاسبه محیط دایره‌های زیر به کار برید

$$r = a \quad (\text{الف})$$

$$r = a \cos \theta \quad (\text{ب})$$

$$r = a \sin \theta \quad (\text{پ})$$

۲۲. طول دلواری $r = a(1 + \cos \theta)$ را بیابید. (دانهمایی)

$$\left(\int \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = \int \sqrt{2} |\cos(\theta/2)| d\theta \right)$$

۲۳. طول خم $r = a \sin^2(\theta/2)$ از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ را بیابید.۲۴. طول مساریچ سه‌موی $r = a\theta^2$ بین $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ را پیدا کنید.۲۵. طول خم $r = a \sin^3(\theta/3)$ بین $\theta = 0$ و $\theta = 3\pi$ را بیابید.۲۶. معادله‌های $r = e^{2t}$ ، $\theta = 3t$ ، $0 \leq t \leq \pi/6$ خمی را در صفحه مختصات قطبی تعریف می‌کنند.

الف) مساحت ناحیه محدود به این خم در ربع اول را حساب کنید.

ب) طول خم را حساب کنید.

۲۷. مساحت رویه‌ای را که از دوران پروانه $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ حول محور x تولید می‌شود، پیدا کنید.۲۸. مساحت رویه‌ای را که از دوران دایره $r = 2a \cos \theta$ حول محور y تولید می‌شود، بیابید.۲۹. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران قسمتی از دلواری $r = 1 + \cos \theta$ که در ربع اول است حول محور x تولید می‌شود. (دانهمایی: برای ساده کردن انتگرال، از اتحادهای $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ و $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$ استفاده کنید.)۳۰. مقدار متوسط. مقدار متوسط r روی خم $r = f(\theta)$ ، $\alpha \leq \theta \leq \beta$ عبارت است از مقدار انتگرال زیر

$$r_{av} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) d\theta.$$

مطلوب است مقدار متوسط r نسبت به θ روی

$$r = a(1 - \cos \theta) \quad (\text{الف})$$

$$r = a \quad (\text{ب})$$

$$r = a \cos \theta \quad (\text{پ})$$

مطلوب است مساحت نواحی که در مسأله‌های ۱-۲۰ توصیف می‌شوند. حرف a ، هر جا دیده می‌شود، نشان دهنده يك ثابت مثبت است.۱. درون دایره $r = \cos \theta$ بین پرتوهای $\theta = 0$ و $\theta = \pi/2$ در ربع اول۲. ناحیه مشترک بین دایره $r = a$ و دلواری $r = a(1 - \cos \theta)$ ۳. درون حلزونی $r = 2 + 2 \cos \theta$ ۴. درون دلواری $r = a(1 + \cos \theta)$ ۵. درون دایره $r = 2a \sin \theta$ ۶. درون پروانه $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ ۷. قسمتی از درون پروانه $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ که در دایره $r = a$ قرار ندارد۸. درون خم $r = a(2 + \cos \theta)$ ۹. ناحیه مشترک بین دایره‌های $r = 2a \cos \theta$ و $r = 2a \sin \theta$ ۱۰. درون دایره $r = 2a \cos \theta$ ولی بیرون دلواری $r = a(1 + \cos \theta)$ ۱۱. درون دایره $r = -2 \cos \theta$ و بیرون دایره $r = 1$ ۱۲. ناحیه مشترک بین دایره‌های $r = a$ و $r = 2a \sin \theta$ ۱۳. ناحیه مشترک بین دلواری $r = a(1 + \cos \theta)$ و $r = a(1 - \cos \theta)$ ۱۴. درون يك پر از گل $r = \cos 2\theta$ ۱۵. درون يك طوق از پروانه $r^2 = 4 \sin 2\theta$ ۱۶. درون خم $r = -2 + 2 \cos \theta$ ۱۷. درون گل شش‌پر $r^2 = 2a^2 \sin 2\theta$ ۱۸. الف) درون طوق بزرگ حلزونی مثال ۲
ب) درون طوق بزرگ این حلزونی ولی بیرون طوق کوچک آن۱۹. ناحیه محدود به پرتوهای $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ و خم $r = \sqrt{\theta} e^{\theta}$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ ۲۰. درون دایره $r = 6$ و بالای خط $r \sin \theta = 3$ ۲۱. طبق معمول، وقتی با فرمول جدیدی روبرو می‌شویم خوب است آن را در مورد اشیاء آشنا بیازماییم تا مطمئن شویم نتایج دلخواه ما را به دست می‌دهد. فرمول $ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$ از

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. نموداری رسم کنید که روابط متعارف بین مختصات دکارتی (x, y) و مختصات قطبی (r, θ) را نشان دهد. هر زوج از مختصات را بر حسب زوج دیگر بیان کنید.

۲. اگر نقطه‌ای دارای مختصات قطبی (r_1, θ_1) باشد، چه مختصات قطبی دیگری دارد؟

۳. چطور می‌توان نمودار معادله $F(r, \theta) = 0$ را از لحاظ تقارن نسبت به مبدأ آزمود؟ نسبت به محور x چطور؟ نسبت به محور y چطور؟ مثالهایی بیاورید.

۴. روشی برای ترسیم نمودار معادله $r = f(\theta)$ ذکر کنید که شامل استفاده از صفحه $r\theta$ دکارتی باشد. مثالی بیاورید.

۵. معادلات قطبی متعارف خطها و دایره‌ها چیستند؟

۶. درباره معادله $r = ke/(1 - e \cos \theta)$ بحث کنید.

۷. مدار یک ماهواره. ماهواره‌ای در مداری حرکت می‌کند که از فراز قطبهای شمال و جنوب کره زمین می‌گذرد. وقتی ماهواره بر فراز قطب شمال است، در مسافتی نقطه مدارش یعنی در ۱۰۰۰ مایلی بالای سطح زمین قرار دارد. ماهواره بر فراز قطب جنوب در پایینترین نقطه مدارش یعنی در ۳۰۰ مایلی بالای سطح زمین است.

الف) با فرض اینکه مدار ماهواره (نسبت به زمین) بیضی است که یک کانون آن در مرکز زمین است، خروج از مرکزش را پیدا کنید. (قطر زمین را ۸۰۰۰ مایل بگیرید.)

ب) با در نظر گرفتن محور شمال-جنوب زمین به عنوان محور x و مرکز زمین به عنوان مبدأ، معادله‌ای قطبی برای این مدار بیابید.

۸. چگونه مساحت و طول قوس در مختصات قطبی محاسبه می‌شوند؟ مثالهایی بیاورید.

مسئله‌های گوناگون

در مسئله‌های ۱-۱۴، خمها را رسم کنید (در این مسئله‌ها a یک ثابت مثبت است). [نوع خمها را، در مواردی که می‌توانید، مشخص کنید.]

$$r = a\theta \quad ۱$$

$$r = a(1 + \cos 2\theta) \quad ۲$$

$$r = a \sec \theta \quad \text{الف} \quad ۳$$

$$r = a \csc \theta \quad \text{ب}$$

$$r = a \sec \theta + a \csc \theta \quad \text{ب}$$

$$r = a \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \quad ۴$$

$$r^2 + 2r(\cos \theta + \sin \theta) = 2 \quad ۵$$

$$r = a \cos \theta - a \sin \theta \quad ۶$$

$$r \cos(\theta/2) = a \quad ۷$$

$$r^2 = a^2 \sin \theta \quad ۸$$

$$r^2 = 2a^2 \sin 2\theta \quad ۹$$

$$r = a(1 - 2 \sin 3\theta) \quad ۱۰$$

$$r = \cos 2\theta \quad \text{الف} \quad ۱۱$$

$$r^2 = \cos 2\theta \quad \text{ب}$$

$$r = 1 + \cos \theta \quad \text{الف} \quad ۱۲$$

$$r = \frac{1}{1 + \cos \theta} \quad \text{ب}$$

$$r = \frac{2}{1 - \cos \theta} \quad \text{الف} \quad ۱۳$$

$$r = \frac{2}{1 + \sin \theta} \quad \text{ب}$$

$$r = \frac{1}{2 + \cos \theta} \quad \text{الف} \quad ۱۴$$

$$r = \frac{1}{2 + \sin \theta} \quad \text{ب}$$

در مسئله‌های ۱۵-۲۲، نقاط تقاطع خمها را بیابید. در همه موارد، a یک ثابت مثبت است.

$$r = a \cos \theta, \quad r = a \sin \theta \quad ۱۵$$

$$r = a, \quad r = 2a \sin \theta \quad ۱۶$$

$$r = a, \quad r = a(1 - \sin \theta) \quad ۱۷$$

$$r = a \sec \theta, \quad r = 2a \sin \theta \quad ۱۸$$

$$r = a \cos \theta, \quad r = a(1 + \cos \theta) \quad ۱۹$$

$$r = a(1 + \sin \theta), \quad r = 2a \sin \theta \quad ۲۰$$

$$r = a(1 + \cos 2\theta), \quad r = a \cos 2\theta \quad ۲۱$$

$$r^2 = 2 \cos 2\theta, \quad r^2 = \sec 2\theta \quad ۲۲$$

در مسئله‌های ۲۳-۲۶، معادله‌های دکارتی مقطعهای مخروطی را

پیدا کنید.

$$r = 2a \sin^2 \theta \quad ۰۳۶$$

$$r^2 = 2a^2 \sin^2 \theta \quad ۰۳۷$$

$$r^2 = 2a^2 \cos^2(\theta/2) \quad ۰۳۸$$

۰۳۹. مساحت ناحیه‌ای را که درون دلواری $r = a(1 + \sin \theta)$ و بیرون دایره $r = a \sin \theta$ واقع است، پیدا کنید.

۰۴۰. مساحت ناحیه‌ای را که درون خم $r = 2a \cos 2\theta$ و بیرون خم $r = a\sqrt{2}$ واقع است، به دست آورید.

۰۴۱. ناحیه‌های محدود به خمهای

$$r = 2a \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$r = 2a \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

و با رسم شکل نشان دهید و مساحت قسمت مشترک آنها را حساب کنید.

۰۴۲. مساحت ناحیه‌ای را که درون پروانه $r = 2a^2 \cos 2\theta$ و بیرون دایره $r = a$ قرار دارد، پیدا کنید.

۰۴۳. اگر $r = a \cos^2(\theta/3)$ ، نشان دهید که

$$ds = a \cos^2(\theta/3) d\theta$$

و محیط [طول] خم را به دست آورید.

۰۴۴. مساحت رویه‌ای را که از دوران دلواری $r = a(1 - \cos \theta)$ حول محور x پدید می‌آید، بیابید. (داهنمایی: از اتحادهای $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$ و $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ برای ساده کردن انتگرال استفاده کنید.)

زاویه بین بردار شعاعی و خط مماس

در دستگاه دکارتی، وقتی می‌خواهیم درباره جهت یک خم در یک نقطه بحث کنیم، زاویه ϕ را که در خلاف جهت ساعت از قسمت مثبت محور x تا خط مماس اندازه‌گیری می‌شود، به کار می‌گیریم. در دستگاه قطبی، مناسبتر است زاویه ϕ را که از بردار شعاعی تا خط مماس اندازه‌گیری می‌شود محاسبه کنیم (شکل ۴۰.۱۵). در این صورت، زاویه ϕ با توجه به رابطه زوایای داخلی و خارجی مثلث به صورت زیر به دست می‌آید

$$\phi = \theta + \psi \quad (۱)$$

فرض کنید معادله خم به شکل $r = f(\theta)$ داده شده باشد که در آن، $f(\theta)$ تابع مشتق‌پذیری از θ است. در این صورت

$$y = r \sin \theta \quad \text{و} \quad x = r \cos \theta \quad (۲)$$

$$r = \frac{1}{1 - \cos \theta} \quad \text{الف} \quad ۰۲۳$$

$$r = \frac{1}{1 + \cos \theta} \quad \text{ب}$$

$$r = \frac{1}{1 - \sin \theta} \quad \text{الف} \quad ۰۲۴$$

$$r = \frac{1}{1 + \sin \theta} \quad \text{ب}$$

$$r = \frac{1}{1 - 2 \cos \theta} \quad \text{الف} \quad ۰۲۵$$

$$r = \frac{1}{1 + 2 \cos \theta} \quad \text{ب}$$

$$r = \frac{2}{2 - \cos \theta} \quad \text{الف} \quad ۰۲۶$$

$$r = \frac{2}{2 + \cos \theta} \quad \text{ب}$$

۰۲۷. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای سهمی که کانونش در مبدأ و رأس آن در نقطه $(1, 0) = (r, \theta)$ است.

۰۲۸. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای خطی که فواصل نقاط تقاطع آن با پرتوهای $\theta = 0$ و $\theta = \pi/2$ از مبدأ، a و b است.

۰۲۹. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای دایره‌ای که شعاعش a و مرکزش بر پرتو $\theta = \pi$ واقع است و از مبدأ می‌گذرد.

۰۳۰. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای سهمی که کانونش در مبدأ و رأس آن در $(a, \pi/4)$ است.

۰۳۱. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای بیضی که کانونهایش در مبدأ و نقطه $(2, 0)$ اند، و یک رأس آن در $(4, 0)$ است.

۰۳۲. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای هذلولی که یک کانونش در مبدأ، مرکزش در $(2, \pi/2)$ و رأس آن در $(1, \pi/2)$ است.

درمسأله‌های ۳۳-۳۸، کل مساحت محدود به خم را حساب کنید. در همه موارد، a یک ثابت مثبت است.

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad ۰۳۳$$

$$r = a(2 - \cos \theta) \quad ۰۳۴$$

$$r = a(1 + \cos 2\theta) \quad ۰۳۵$$

معادله (۲) به صورت زیر است

$$x \frac{dy}{d\theta} - y \frac{dx}{d\theta} = r^2.$$

همین طور، مخرج آن چنین است

$$x \frac{dx}{d\theta} + y \frac{dy}{d\theta} = r \frac{dr}{d\theta}.$$

اگر اینها را در معادله (۲) قرار دهیم، به دست می آوریم

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta}. \quad (5)$$

این معادله ای است که برای یافتن ψ به کار می بریم.

۴۵. با استفاده از شکل نشان دهید که می توان زاویه β بین مماسهای رسم شده بر دو خم در یک نقطه تقاطع آنها را از فرمول زیر به دست آورد

$$\tan \beta = \frac{\tan \psi_2 - \tan \psi_1}{1 + \tan \psi_2 \tan \psi_1}. \quad (6)$$

چهار وقتی دو خم یکدیگر را در زاویه های قائمه قطع می کنند؟

۴۶. مقدار $\tan \psi$ برای خم $r = \sin^2(\theta/2)$ چقدر است؟

۴۷. زاویه بین خم $r = 2a \sin^2 \theta$ و مماس بر آن به ازای $\theta = \pi/3$ را پیدا کنید.

۴۸. نشان دهید که در مارپیچ هذلولوی $r\theta = a$ وقتی θ برابر ۱ رادیان است، $\psi = 3\pi/4$ و وقتی مارپیچ حول مبدأ پیچ می خورد، $\psi \rightarrow \pi/2$. خم را رسم کنید و ψ را به ازای $\theta = 1 \text{ radian}$ نشان دهید.

۴۹. دایره های $r = \sqrt{3} \cos \theta$ و $r = \sin \theta$ در نقطه $(\sqrt{3}/2, \pi/3)$ یکدیگر را قطع می کنند. نشان دهید که مماسهای آنها در این نقطه برهم عمودند.

۵۰. دلواری $r = a(1 + \cos \theta)$ و دایره $r = 3a \cos \theta$ را در یک نمودار رسم کنید و زاویه بین مماسهای آنها را در نقطه تقاطعی که در ربع اول واقع است، بیابید.

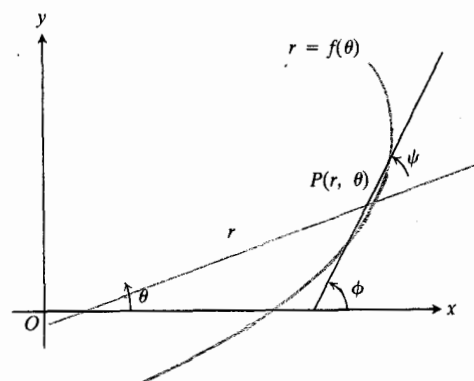
۵۱. نقاط تقاطع سهمیهای

$$r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$$

و

$$r = \frac{3}{1 + \cos \theta}$$

و زاویه های بین مماسهای آنها در این نقاط را به دست آورید.

۴۰.۱۰ زاویه ψ بین خط مماس و بردار شعاعی.توابع مشتق پذیری از θ هستند و داریم

$$\frac{dx}{d\theta} = -r \sin \theta + \cos \theta \frac{dr}{d\theta} \quad (3)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = r \cos \theta + \sin \theta \frac{dr}{d\theta}.$$

چون با توجه به (۱) داریم $\psi = \phi - \theta$ ، پس

$$\tan \psi = \tan(\phi - \theta) = \frac{\tan \phi - \tan \theta}{1 + \tan \phi \tan \theta}.$$

به علاوه

$$\tan \phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

زیرا $\tan \phi$ شیب خم در p است. همچنین

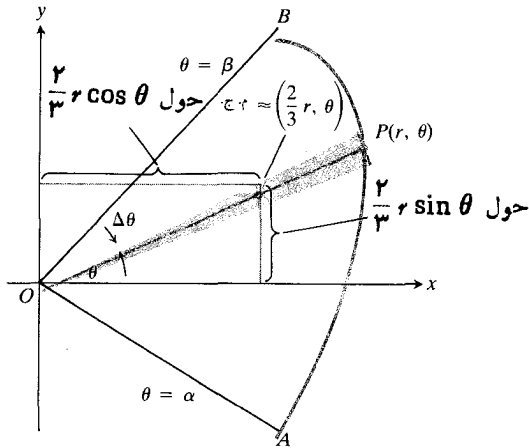
$$\tan \theta = \frac{y}{x}.$$

از این دو

$$\tan \psi = \frac{\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}} \quad (2)$$

$$= \frac{x \frac{dy}{d\theta} - y \frac{dx}{d\theta}}{x \frac{dx}{d\theta} + y \frac{dy}{d\theta}}.$$

از روی معادله های (۲) و (۳) می بینیم که صورت آخرین کسر در



۴۱.۱۰ گشتاور مثلثی نازک حول محور x تقریباً برابر است با

$$\frac{2}{3} r \sin \theta dA = \frac{2}{3} r \sin \theta \cdot \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{3} r^3 \sin \theta d\theta.$$

همین‌طور، بازوی اهرم برای گشتاور این ناحیه حول محور y ، تقریباً $(2/3)r \cos \theta$ است. این تقریبها وقتی $\Delta \theta \rightarrow 0$ بهتری شوند و به فرمول زیر برای مختصات مرکز جرم ناحیه AOB می‌انجامند

$$\bar{x} = \frac{\int \frac{2}{3} r \cos \theta \cdot \frac{1}{2} r^2 d\theta}{\int \frac{1}{2} r^2 d\theta} = \frac{\frac{2}{3} \int r^3 \cos \theta d\theta}{\int r^2 d\theta}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \frac{2}{3} r \sin \theta \cdot \frac{1}{2} r^2 d\theta}{\int \frac{1}{2} r^2 d\theta} = \frac{\frac{2}{3} \int r^3 \sin \theta d\theta}{\int r^2 d\theta}$$

حدود همه این انتگرالها از $\theta = \alpha$ تا $\theta = \beta$ است.

۶۱ مرکز جرم ناحیه محدود به دلواری $r = a(1 + \cos \theta)$ را به دست آورید.

۶۲ مرکز جرم ناحیه محدود به نیم‌دایره‌ای به شعاع a را به دست آورید.

۶۳ مرکز جرم سیم یکنواخت نازکی را که به شکل دلواری $r = a(1 + \cos \theta)$ خم شده است، پیدا کنید. (دانه‌مایی: می‌توانید $\int \cos \theta \cos(\theta/2) d\theta$ را با جانشانی $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$ و سپس با فرض $u = \sin(\theta/2)$ محاسبه کنید.)

۵۲ نقاطی از دلواری $r = a(1 + \cos \theta)$ را که در آنها خط مماس (الف) افقی، (ب) قائم، است پیدا کنید.

۵۳ نشان دهید که سهمیه‌های $r = a/(1 + \cos \theta)$ و $r = b/(1 - \cos \theta)$ در هر یک از نقاط تقاطعشان متعامدند ($ab \neq 0$).

۵۴ زاویه‌ای را به دست آورید که تحت آن زاویه، دلواری $r = a(1 - \cos \theta)$ پرتو $\theta = \pi/2$ را قطع می‌کند.

۵۵ مطلوب است زاویه بیسن خط $r = 3 \sec \theta$ و دلواری $r = 2(1 + \cos \theta)$ در یکی از نقاط تقاطع آنها.

۵۶ مطلوب است شیب خط مماس بر خم $r = a \tan(\theta/2)$ در $\theta = \pi/2$.

۵۷ زاویه‌ای را به دست آورید که تحت آن زاویه، سهمیه‌ای $r = 1/(1 - \sin \theta)$ و $r = 1/(1 - \cos \theta)$ در ربع اول یکدیگر را قطع می‌کنند.

۵۸ معادله $r^2 = 2 \csc 2\theta$ خمی را در مختصات قطبی معرفی می‌کند.

(الف) این خم را رسم کنید.

(ب) معادله‌ای برای این خم در مختصات قائم پیدا کنید.

(پ) زاویه‌ای را که این خم تحت آن زاویه پرتو $\theta = \pi/4$ را قطع می‌کند به دست آورید.

۵۹ فرض کنید زاویه ϕ از بردار شعاعی تا خط مماس بر خم $r = f(\theta)$ دارای مقدار ثابت α است.

(الف) نشان دهید که مساحت ناحیه محصور به این خم و دو پرتو $\theta = \theta_1$ ، $\theta = \theta_2$ متناسب است با $r_2^2 - r_1^2$ که در آن، (r_1, θ_1) و (r_2, θ_2) مختصات قطبی دو انتهای قوسی از این خم‌اند که بین این پرتوها قرار دارد. ضریب تناسب را پیدا کنید.

(ب) نشان دهید که طول قوس خم در قسمت (الف) متناسب با $r_2 - r_1$ است و ثابت تناسب را پیدا کنید.

۶۰ فرض کنید P نقطه‌ای از هذلولی $2a^2 \sin 2\theta = r^2$ است. نشان دهید مثلثی که از OP ، مماس بر P و خط نخستین تشکیل می‌شود، متساوی‌الساقین است.

مرکز جرم

چون مرکز جرم مثلث روی هریک از میانه‌هایش قرار دارد، دوسوم فاصله از رأس تا قاعده مقابل، یعنی بازوی اهرم برای گشتاور ناحیه نازک مثلثی شکل ۴۱.۱۰ حول محور x ، تقریباً

دنباله‌های نامتناهی و سریهای نامتناهی

چشم انداز

در این فصل و فصل بعد، دو بحث مربوط به هم را مطالعه می‌کنیم: دنباله‌های نامتناهی و سریهای نامتناهی. چون مفهوم سری با دنباله سروکار دارد، بحث را با بررسی دنباله‌ها آغاز می‌کنیم و چون ساده‌ترین دنباله‌ها، دنباله‌های مقادیر ثابت‌اند، ابتدا آنها را بررسی می‌کنیم. در فصل ۱۲ دنباله‌ها و سریهایی را که هر جمله‌شان یک تابع است، مورد بحث قرار خواهیم داد.

در اینجا و در ریاضیات پیشرفته‌تر، کلمه سری همواره به معنی تعدادی نامتناهی از جمله‌هاست که قرار است به ترتیب معینی با هم جمع شوند. این امر که ما نمی‌توانیم بینهایت جمله را عملاً جمع کنیم، به مفهوم همگرایی به یک حد می‌انجامد؛ آیا مجموعه‌ای متناهی که می‌توانیم آنها را محاسبه کنیم به حدی میل می‌کنند؟ اگر چنین است، آن حد چیست؟ در دست داشتن مجموعه‌ای از روشهای پرداختن به این مسائل مفید است و ما برای فراهم ساختن آزمونهای مناسب برای همگرایی (یا مخالف آن، واگرایی) هم از مشتقگیری و هم از انتگرالگیری استفاده خواهیم کرد.

دنباله‌ها و سریها در بسیاری از مباحث علوم فیزیکی، علوم کامپیوتری، و ریاضیات عالی مطرح می‌شوند. چون از سریها می‌توان برای تقریب زدن مقادیر بسیاری از توابع با هر درجه دلخواهی از دقت استفاده کرد، از آنها برای تهیه جدولهای مقادیر توابع مثلثاتی، نمایی، ولگاریتمی بهره می‌گیرند. جوابهای بسیاری از معادلات دیفرانسیل با استفاده از تعدادی متناهی از جملات یک سری نامتناهی که جوابهای دقیق را به دست می‌دهد، به بهترین وجه تقریب زده می‌شود. گاه برای یافتن «جواب» معادله‌ای چون معادله کپلر برای

تعیین موضع یک سیاره یا ماهواره در مدارش، چاره‌ای جز استفاده از روش تقریبهای متوالی نداریم. غالباً، این تقریبهای متوالی اولین جملات دنباله‌ای از اعدادند که به وسیله یک برنامه کامپیوتری مناسب تولید می‌شوند.

بسیاری از کاربردهای سریها و دنباله‌ها خارج از حیطه بحث این کتاب است، ولی مطالب این دو فصل می‌تواند شما را برای مطالعات بعدی آماده کند و نیز روشهایی به دست دهد که می‌توانید در موقع نیاز آنها را به کار ببرد.

۱.۱۱ دنباله‌های اعداد

دنباله از نظر صوری گردآورده‌ای است از اعداد با ترتیبی خاص. دنباله‌ها در چه مواردی مطرح می‌شوند؟ با آنها چه کاری می‌توانیم بکنیم؟ قبلاً کاربردهایی از دنباله‌ها دیده‌ایم؛ مثلاً، در استفاده از روش نیوتن برای یافتن جوابهای معادلات $f(x) = 0$ (بخش ۹.۲)، در تقریب زدن یک انتگرال معین به کمک قاعده ذوزنقه‌ای یا سیمپسون (بخش ۹.۴)، و در درسهای ریاضی مقدماتی‌تر. در هندسه، مساحت ناحیه محدود به دایره‌ای با شعاع R به صورت حد مساحتهای n ضلعیهای منتظم محاطی یا محیطی، وقتی n به بینهایت می‌گراید، تعریف می‌شود. این مساحتها دنباله‌هایی از اعداد A_4, A_5, \dots را تشکیل می‌دهند که A_n مساحت یک n ضلعی منتظم است.

همچنین در حساب دنباله‌های زیادی را دیده‌ایم، از قبیل

برای نشان دادن متغیر مستقل به کار می‌روند در مورد دنباله‌ها مرسوم است که از حروف وسط الفبا [ی لاتین] نظیر n برای متغیر مستقل استفاده شود. با این حال، فرمولهائی که دنباله‌ها را تعریف می‌کنند، نظیر فرمولهائی بالا، برای دامنه‌هایی بسیار بزرگتر از مجموعه اعداد صحیح مثبت برقرارند. این امر، همچنانکه بعداً خواهیم دید، مفید واقع می‌شود.

عدد $a(n)$ جمله n ام دنباله یا جمله n ام با اندیس n خوانده می‌شود. مثلاً، اگر $a(n) = (n-1)/n$ ، آنگاه جملات عبارت‌اند از

$$\begin{array}{cccc} \text{جمله } n\text{ام} & \text{جمله سوم} & \text{جمله دوم} & \text{جمله اول} \\ a(1)=0, & a(2)=\frac{1}{2}, & a(3)=\frac{2}{3}, \dots, & a(n)=\frac{n-1}{n}. \end{array} \quad (2)$$

از نماد ساده‌تر a_n به جای $a(n)$ استفاده می‌کنیم و دنباله (۲) به این صورت درمی‌آید

$$a_1=0, \quad a_2=\frac{1}{2}, \quad a_3=\frac{2}{3}, \dots, a_n=\frac{n-1}{n}. \quad (3)$$

برای توصیف دنباله‌ها، اغلب چند جمله اول و نیز فرمول جمله n ام را می‌نویسیم.

دنباله اعداد صحیح مثبت $1, 2, 3, 4, \dots$ دنباله اعداد صحیح زوج $2, 4, 6, 8, \dots$ دنباله اعداد اول $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$ و دنباله مربعات $1, 4, 9, 16, \dots$ ولی این دنباله‌ها به حدهای متناهی میل نمی‌کنند؛ و دنباله‌هایی که به حدهای متناهی میل می‌کنند در این فصل مورد توجه خاص ما هستند. مثلاً، دنباله عکس اعداد صحیح مثبت $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots, 1/n, \dots$ دنباله‌ای است که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به یک حد می‌گراید؛ این حد، ۰ است. پیش از بررسی بیشتر ویژگیهای دنباله‌هایی که به حدهای متناهی میل می‌کنند، تعریف دقیقتری از دنباله عرضه می‌کنیم.

تعریف ۱

دنباله‌ای از اعداد، تایی است که دامنه‌اش مجموعه اعداد صحیح مثبت است.

دنباله‌ها مانند توابع دیگر با قاعده‌هایی تعریف می‌شوند. چند قاعده نمونه‌وار اینها هستند

$$a(n)=n-1, \quad a(n)=1-\frac{1}{n}, \quad a(n)=\frac{\ln n}{n^2}. \quad (1)$$

برای اشاره به این امر که دامنه‌ها محدود به مجموعه اعداد صحیح مثبت‌اند، به جای حروفی از قبیل x, y, z ، و t که در مباحث دیگر

مثال ۱

برای دنباله‌ای که قاعده

تعریف کننده‌اش عبارت است از

می‌نویسیم

$$0, 1, 2, \dots, n-1, \dots$$

$$a_n = n - 1$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \dots$$

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

$$0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n}\right), \dots$$

$$a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$3, 3, 3, \dots, 3, \dots$$

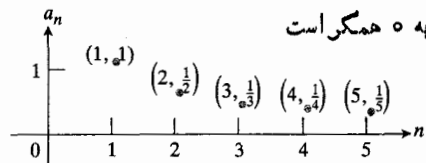
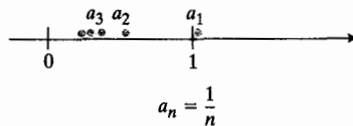
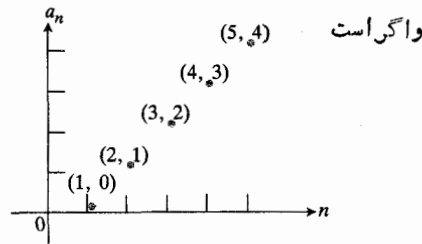
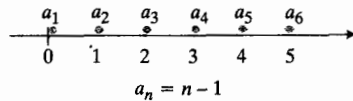
$$a_n = 3$$

آخر، $\{3\}$ است.

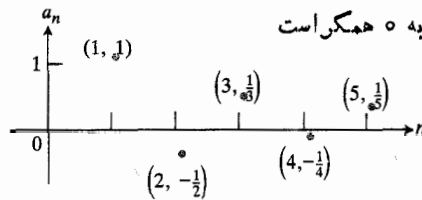
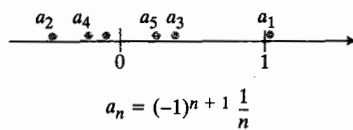
نمودار شکل ۱۱۰۱ را ببینید. به زبان دقیق، نمودار دنباله $\{a_n\}$ مرکب از نقاطی در صفحه xy است که برای آنها $x=n$ و $y=a_n$

نماد دنباله‌ای را که جمله n ام آن a_n است به صورت «دنباله $\{a_n\}$ » بیان می‌کنیم. در اینجا، علامت $\{ \}$ نشان می‌دهد که همه جملات دنباله را در نظر داریم و نه فقط یک جمله را. بنابراین، دودنباله اول مثال ۱ عبارت‌اند از $\{1/n\}$ و $\{n-1\}$ و دنباله

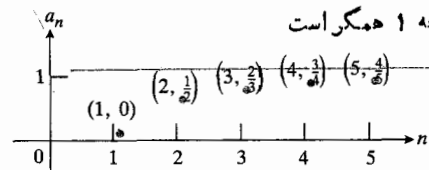
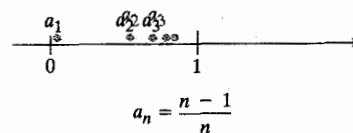
جمله‌های $a_n = n-1$ سرانجام هر عدد صحیحی را پشت سر می‌گذارند، بنابراین دنباله $\{a_n\}$ واگراست. ...



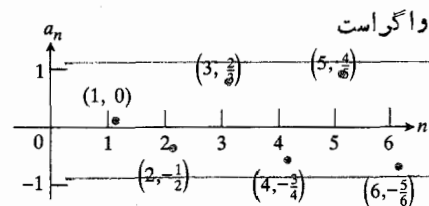
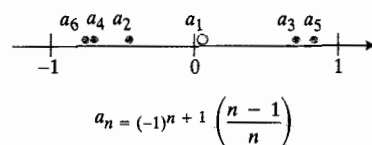
... ولی، جمله‌های $a_n = 1/n$ وقتی n افزایش می‌یابد دائماً نزول می‌کنند و به قدر دلخواه به ۰ نزدیک می‌شوند، پس دنباله $\{a_n\}$ به ۰ همگراست.



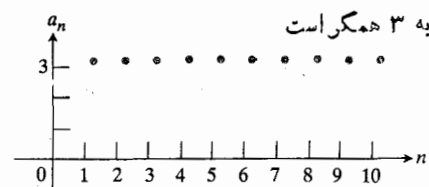
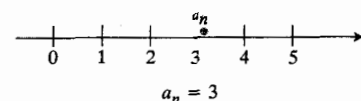
علامت جمله‌های $a_n = (-1)^{n+1} (1/n)$ یک‌درمیان تغییر می‌کند ولی باز هم دنباله به ۰ همگراست.



جمله‌های $a_n = (n-1)/n$ وقتی n افزایش می‌یابد دائماً به ۱ میل می‌کنند و به قدر دلخواه نزدیک آن می‌شوند، پس دنباله $\{a_n\}$ به ۱ همگراست.

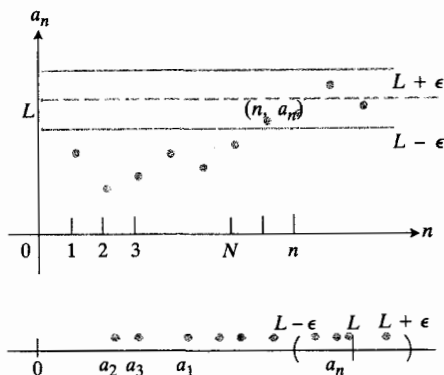


علامت جمله‌های $a_n = (-1)^{n+1} (n-1)/n$ یک‌درمیان تغییر می‌کند، وقتی n افزایش می‌یابد، جملات مثبت به ۱ و جملات منفی به -۱ میل می‌کنند، بنابراین دنباله $\{a_n\}$ واگراست.



جملات دنباله ثابتهای $a_n = 3$ صرف نظر از n مقدار یکسانی دارند؛ پس می‌گوییم که دنباله $\{a_n\}$ به ۳ همگراست.

۱۱۰۱ نمودار دنباله‌های مثال ۱ در اینجا به دو صورت رسم شده است: با مشخص کردن اعداد a_n روی یک محور افقی و با مشخص کردن نقاط (n, a_n) در صفحه مختصات.



۲.۱۱ اگر L يك مجانب افقی $\{(n, a_n)\}$ باشد،
 $a_n \rightarrow L$ در این شکل، همه a_n ها پس از a_N
 در محدوده‌ای به مرکز L و به شعاع ϵ قرار
 می‌گیرند.

مثال ۲ از فهم متعارف چنین برمی‌آید که دنباله $\{1/n\}$ به صفر
 همگراست. در تعریف ۲، L را مساوی صفر قرار دهید و معلوم
 کنید N به چه بزرگی باید باشد تا در شرط (۲) صدق کند.

حل: فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده است. کار را با نوشتن
 نامساوی (۲) با ضوابط $1/n = a_n$ و $L = 0$ شروع می‌کنیم.
 داریم

$$|a_n - L| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \quad (5)$$

و بنابراین، در جستجوی عدد صحیح N هستیم که

$$\frac{1}{n} < \epsilon, \quad n > N \quad (6)$$

مسلماً

$$\frac{1}{n} < \epsilon, \quad n > \frac{1}{\epsilon} \quad (7)$$

اما دلیلی ندارد که $1/\epsilon$ يك عدد صحیح باشد. این اشکال کوچک
 به سادگی رفع می‌شود. کافی است عدد صحیح دلخواه $N > 1/\epsilon$
 را انتخاب کنیم. در این صورت، هر اندیس n که بزرگتر از N باشد،
 خود به خود بزرگتر از $1/\epsilon$ خواهد بود. خلاصه، با این انتخاب
 N می‌توانیم درستی (۶) را تضمین کنیم. ملاکهای تعریف ۲ برای
 همگرایی به ۰ برقرار است. ■

مثال ۳ اگر k عدد دلخواهی باشد، دنباله ثابت $\{k\}$ به ازای
 هر n به صورت $a_n = k$ تعریف می‌شود. حد این دنباله چیست؟

$(n = 1, 2, 3, \dots)$. روش دیگری برای تجسم دنباله، که
 نادقیقتر ولی اغلب مفید است، این است که اعداد a_n را روی
 يك خط اعداد، مثلاً محور x ، نمایش دهیم. اگر این نقطه‌ها را
 به ترتیب، یکی پس از دیگری، روی محور مشخص کنیم، ممکن
 است به وضوح دیده شود که به يك حد میل می‌کنند. همچنین اگر
 نمودار نقاط (n, a_n) وقتی n افزایش می‌یابد به مجانبی چون
 $y = L$ میل کند، میل دنباله به يك حد واضح خواهد بود.

همگرایی و واگرایی

همچنانکه شکل ۱.۱۱ نشان می‌دهد، دنباله‌های مثال ۱ رفتار
 متفاوتی دارند. به نظر می‌رسد هر يك از دنباله‌های $\{1/n\}$ ،
 $\{(1/n)^{n-1}\}$ و $\{(n-1)/n\}$ وقتی n افزایش می‌یابد
 به يك مقدار جدی میل می‌کند و دنباله $\{3\}$ هم از اول در يك مقدار
 حدی استقرار دارد. ولی جملات دنباله $\{(n-1)/n\}$ و $\{(1/n)^{n-1}\}$
 نزدیک دو مقدار متفاوت ۱- و ۱ انباشته می‌شوند، درحالی که
 جملات $\{n-1\}$ بزرگ و بزرگتر می‌شوند و نزدیک هیچ مقداری
 انباشته نمی‌شوند.

برای تمایز دنباله‌هایی که وقتی n افزایش می‌یابد به يك
 مقدار حدی یکتا میل می‌کنند از دنباله‌هایی که چنین نمی‌کنند،
 دنباله‌های دسته اول را طبق تعریف زیر همگرا می‌نامیم.

تعریف ۲

دنباله $\{a_n\}$ به حد L همگراست اگر به هر عدد مثبت ϵ يك اندیس
 N نظیر شود به طوری که

$$|a_n - L| < \epsilon, \quad n > N \quad (2)$$

اگر چنین حدی وجود نداشته باشد، گوییم که $\{a_n\}$ واگراست.

به عبارت دیگر، $\{a_n\}$ همگرا و حد آن L است اگر، به ازای
 هر ϵ مثبت، يك اندیس N وجود داشته باشد به قسمی که همه جملات
 پس از جمله N ام بین $L - \epsilon$ و $L + \epsilon$ قرار داشته باشند یا به قسمی که
 همه جملات دنباله بجز تعدادی متناهی از آنها (یعنی N جمله اول)
 در محدوده‌ای به مرکز L و به شعاع ϵ واقع باشند. (شکل ۲.۱۱)
 را ببینید و يك بار دیگر به دنباله‌های شکل ۱.۱۱ نظری
 بیفکنید. برای اینکه نشان دهیم $\{a_n\}$ به L همگراست،
 می‌نویسیم

$$a_n \rightarrow L \quad \text{یا} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \quad n \rightarrow \infty$$

و L را حد دنباله $\{a_n\}$ می‌نامیم.

یکتایی حد

آیا يك دنباله می تواند همگرا به دو حد مختلف باشد؟ قضیه یکتایی زیر به این سؤال پاسخ می دهد.

قضیه ۱

قضیه یکتایی

اگر دنباله ای چون $\{a_n\}$ همگرا باشد، حد آن یکتاست.

اثبات اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد و دارای دو حد L و L' ، $L \neq L'$ ، باشد می توانیم ϵ را مساوی $|L - L'|/2$ بگیریم که عدد مثبتی است، و آنگاه تعریف حد را به صورت زیر در مورد هر دو L و L' به کار ببریم.

$$(۹ الف) \quad \text{وقتی } n > N, \quad |a_n - L| < \epsilon$$

و

$$(۹ ب) \quad \text{وقتی } n > N', \quad |a_n - L'| < \epsilon$$

ولی بینهایت مقدار n بزرگتر از هر دو N و N' وجود دارد و به ازای هر يك از این مقادیر n ، هم (۹ الف) و هم (۹ ب) برقرارند. با ترکیب این روابط خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |L - L'| &= |L - a_n + a_n - L'| \\ &\leq |L - a_n| + |a_n - L'| \\ &< 2\epsilon \\ &= |L - L'|. \end{aligned}$$

ولی این نتیجه مهم است؛ هیچ عددی کوچکتر از خودش نیست. از این رو، اگر دنباله ای همگرا باشد، حد آن یکتاست.

دم دنباله $\{a_n\}$ گردآورده تمام جملاتی است که اندیس آنها بزرگتر از اندیسی چون N باشد؛ به عبارت دیگر، یکی از مجموعه های $\{a_n | n > N\}$ است. راه دیگری برای بیان $a_n \rightarrow L$ این است که بگوییم هر بازه ای به مرکز L و به شعاع ϵ ، شامل يك دم از دنباله $\{a_n\}$ است. همگرایی (یا واگرایی) يك دنباله و نیز حد يك دنباله همگرا، فقط به رفتار دم دنباله بستگی دارد.

رفتار دنباله $\{(-1)^{n+1}/n\}$ کیفیتاً با رفتار $\{n-1\}$ متفاوت است؛ دنباله اخیر واگراست زیرا [در نهایت] جمله های آن هر عدد حقیقی L را پشت سر می گذارند. رفتار $\{n-1\}$ را با نوشتن عبارت زیر توصیف می کنیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) = \infty.$$

وقتی از بینهایت به عنوان حد دنباله ای چون $\{a_n\}$ صحبت می کنیم

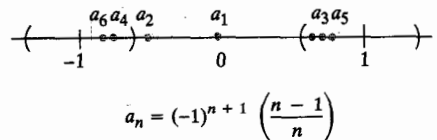
حل: این حد باید k باشد. برای نشان دادن این امر، فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده است. اگر به جای a_n ، L ، k را در سمت چپ نامساوی مذکور در (۲) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$(۸) \quad |a_n - L| = |k - k| = 0$$

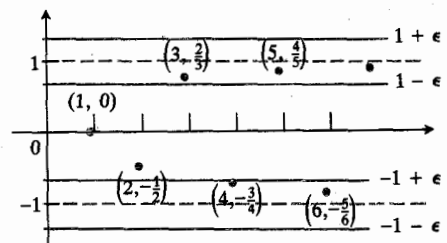
که به ازای هر $n \geq 1$ از هر ϵ مثبت کوچکتر است. از این رو، در اینجا $N = 1$ به کار ما می آید. ■

مثال ۴ نشان دهید که دنباله $\{(n-1)/n\}$ واگراست.

حل: ϵ مثبتی کوچکتر از ۱ در نظری می گیریم به طوری که نوارهایی که در شکل ۳.۱۱ حول خط $y = 1$ و خط $y = -1$ می بینید رویهم افتادگی نداشته باشند. هر $\epsilon < 1$ چنین خاصیتی دارد. همگرایی به ۱ ایجاب می کند که هر نقطه نمودار که پس از يك اندیس معین N قرار دارد، در داخل نوار بالای قرار گیرد، ولی چنین چیزی اتفاق نمی افتد. به محض اینکه نقطه ای چون (n, a_n) در داخل نوار بالایی واقع شود، نقطه $(n+1, a_{n+1})$ و نقاط پس از آن یکی در میان در داخل نوار پایینی قرار می گیرند. پس دنباله دارای حد ۱ نیست. به همین ترتیب، دارای حد -1 هم نیست. از طرف دیگر، چون جملات دنباله به تناوب به ۱ و -1 نزدیک و نزدیکتر می شوند، نزدیک هیچ مقدار دیگری انباشته نمی شوند. بنابراین، دنباله واگراست.



نه بازه ϵ حول ۱ نه بازه ϵ حول -1 ، هیچ يك شامل يك دم کامل دنباله نیست.



هیچ يك از نوارهای ϵ ی که در اینجا نشان داده شده، همه نقاط (n, a_n) را از اندیسی به بعد در بر ندارد.

۳.۱۱ دنباله $\{(-1)^{n+1}[(n-1)/n]\}$ واگراست.

آشنا نباشید می‌توانید مثالهای زیر را به آسانی درک کنید. برای سهولت کار، گامهای يك برنامه معمولاً با شماره‌هایی از قبیل 10، 20، 30 و مانند اینها شماره گذاری می‌شود و اعداد بین آنها آزاد گذاشته می‌شود تا اگر در اولین اقدام خود برای نوشتن برنامه به اشکالی برخوردیم، از آن شماره‌ها برای تصحیحات استفاده کنیم. در مثال بعد، برنامه‌ای برای فهرست کردن جفت‌های اعداد $(n, 2n)$ به ازای $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ می‌آید. برنامه‌ما با $x_1 = 2$ شروع می‌شود و فرمول بازگشت $x_{n+1} = x_n + 2$ را به کار می‌گیرد.

مثال ۵ با استفاده از فرمول بازگشت $x_{n+1} = x_n + 2$ ، يك برنامه بیسیك برای فهرست کردن جفت‌های اعداد $(n, 2n)$ به ازای $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ بنویسید و درباره آن بحث کنید.

حل: يك برنامه ممکن، این است

شرح
PROGRAM
10 LET x=2 با $x_1 = 2$ شروع می‌کنیم.
20 FOR n=1 TO 10 این مقادیر n را اختیار کرده‌ایم.
30 PRINT n; x فهرستی از مقادیر (n, x_n) می‌خواهیم.
40 LET x=x+2 x بعدی عبارت است از
 $x_{n+1} = x_n + 2$
50 NEXT n این گام، حلقه را ایجاد می‌کند و
 برنامه‌را به سطر 30 برمی‌گرداند،
 $n+1$ به جای n قرار می‌گیرد و
 x_{n+1} به جای x_n
60 END به کامپیوتر دستور توقف می‌دهیم.

در عباراتی نظیر $x = x + 2$ در سطر 40، اندیشه‌های x در معادله $x_{n+1} = x_n + 2$ را کنار می‌گذاریم. به یاد داشته باشید که مقدار جدید x در سمت چپ معادله و مقدار قدیم آن در سمت راست معادله است. (به زبان ماشین، این مانند دستوری است که می‌گوید «محتویات x را در حافظه قرار بده، ۲ را به آن بیفزای و محتویات حافظه را مجدداً در x بگذار»).

در مثال ۵ لازم نبود که از فرمول بازگشت برای محاسبه x_n استفاده کنیم؛ به کمک ضرب معمولی می‌توان به سادگی $x_n = 2n$ را مستقیماً به دست آورد. ولی در مثال بعد، این امکان در دسترس ما نیست.

منظورمان این نیست که تفاضل بین a_n و بینهایت، با افزایش n کوچک می‌شود. بلکه منظورمان این است که با افزایش n ، a_n از لحاظ عددی بزرگ می‌شود.

تعریف دنباله‌ها به‌طور بازگشتی

در مثالهای قبل فرمولهای صریحی داشتیم که a_n از آنها مستقیماً بر حسب n به دست می‌آمد. اما دنباله‌ها اغلب به صورت دیگری - یعنی به طور بازگشتی - تولید می‌شوند. منظور ما این است که جمله‌ها به وسیله فرایندی با دو ویژگی زیر تولید می‌شوند.

۱. جمله اول (یا چند جمله اول) داده می‌شود، و
۲. قاعده‌ای داده می‌شود که بر طبق آن می‌توان هر جمله بعدی را از روی جملات قبل از آن محاسبه کرد.

در این صورت می‌گوییم که دنباله به‌طور بازگشتی تعریف شده و قاعده شماره ۲ را فرمول بازگشت می‌نامیم.

ساده‌ترین مثال این است

$$a_1 = 1 \quad \text{و} \quad a_{n+1} = a_n + 1$$

این فرایند بازگشت، دنباله اعداد صحیح مثبت ۱، ۲، ... را تولید می‌کند. مثال ساده دیگر چنین است

$$x_1 = 1 \quad \text{و} \quad x_{n+1} = x_n + (2n + 1)$$

که دنباله مربعات را تولید می‌کند: ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ... در هر دو مثال، دروس برای توصیف دنباله‌ها داریم: با فرمولهای بازگشت، و، به ترتیب، با فرمولهای صریح $\{a_n\} = \{n\}$ و $\{x_n\} = \{n^2\}$. ولی مثلاً وقتی که روش نیوتن را برای یافتن جوابهای يك معادله $f(x) = 0$ (بخش ۹.۲) به کار می‌بریم، اغلب برای تعریف يك دنباله خاص هیچ چیزی جز فرایند بازگشت در دست نداریم. وقتی در مورد يك دنباله مفروضه فرمول صریح و هم فرمول بازگشت را در اختیار داریم، با هم محاسبه جملات متوالی به‌طور بازگشتی ساده‌تر است. دنباله فاکتوریلها $1, 2, 6, 24, \dots, n!, \dots$ نمونه‌ای از این موارد است. در مورد این دنباله بهتر است از فرمول $n! = (n+1)n!$ استفاده کنیم و از يك جمله به جمله بعد برویم تا اینکه مرتباً از ۱ شروع کنیم و همه عددها تا n را در هم ضرب کنیم و $n!$ را به دست آوریم. (اگر فقط يك فاکتوریل خاص، مثلاً $5!$ ، مورد نظر بود طبیعتاً ضرب $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ را انجام می‌دادیم، ولی وقتی جملات متعددی از دنباله $\{n!\}$ را می‌خواهیم، استفاده از فرایند بازگشت با ضوابط $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = (n+1)x_n$ بهتر است).

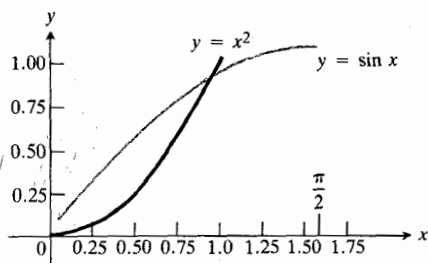
دنباله‌ها و زبان کامپیوتر: حلقه‌های کامپیوتری شما ممکن است با زبان برنامه‌نویسی کامپیوتری بیسیك آشنا باشید، ولی اگر هم

جدول ۱۰۱۱

| n | x_n | s_n |
|-----|----------------|----------------|
| ۱ | ۱ | ۱ |
| ۲ | ۱ | ۲ |
| ۳ | ۰٫۵ | ۲٫۵ |
| ۴ | ۰٫۱۶۶۶۶۶ ۶۶۶۶۷ | ۲٫۶۶۶۶۶۶ ۶۶۶۶۷ |
| ۵ | ۰٫۰۴۱۶۶ ۶۶۶۶۷ | ۲٫۷۰۸۳۳ ۳۳۳۳ |
| ۶ | ۰٫۰۰۸۳۳ ۳۳۳۳۳ | ۲٫۷۱۶۶۶ ۶۶۶۶۷ |
| ۷ | ۰٫۰۰۱۳۸ ۸۸۸۸۹ | ۲٫۷۱۸۰۵ ۵۵۵۵۶ |
| ۸ | ۰٫۰۰۰۱۹ ۸۲۱۲۷ | ۲٫۷۱۸۲۵ ۳۹۶۸ |
| ۹ | ۰٫۰۰۰۰۰۲ ۲۸۰۱۶ | ۲٫۷۱۸۲۷ ۸۷۷۰ |
| ۱۰ | ۲٫۷۵۵۷۳ E-06 | ۲٫۷۱۸۲۸ ۱۵۲۶ |
| ۱۱ | ۲٫۷۵۵۷۳ E-07 | ۲٫۷۱۸۲۸ ۱۸۰۱ |
| ۱۲ | ۲٫۷۵۵۷۳ E-08 | ۲٫۷۱۸۲۸ ۱۸۲۶ |

به‌عنوان آخرین مثال، نشان می‌دهیم که چگونه با استفاده از کامپیوتر می‌توان روش برآورد کردن نیوتن را برای تعیین محل تقاطع نمودارهای $y = \sin x$ و $y = x^2$ به‌کار برد. نخستین برآورد عبارت است از $x_1 = 1$. چند نماد جدید را معرفی و تشریح می‌کنیم.

مثال ۷ شکل ۴.۱۱ را ببینید. یک برنامه یسک برای برآورد کردن ریشه معادله $\sin x = x^2$ براساس روش نیوتن بنویسید و اجرا کنید.



۴.۱۱ نمودارهای $y = \sin x$ و $y = x^2$ در نزدیکی $x = 1$ یکدیگر را قطع می‌کنند. یک تقریب بهتر عبارت است از $x = 0.87۶۷۲۶۲۱۵۴$.

مثال ۶ با توجه به اطلاعات زیر، یک برنامه یسک برای محاسبه و فهرست کردن n ، x_n و s_n به‌ازای $n = 1, \dots, 12$ بنویسید و درباره آن بحث کنید

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{1}{2!}, \dots, \quad x_n = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$s_1 = x_1, \quad s_2 = x_1 + x_2, \dots, \quad s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

حل: روابط تعریف‌کننده x_n و s_n را می‌توان به شکلی نوشت که برای محاسبه بازگشتی مناسبتر باشد

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{n} \quad \text{و} \quad x_1 = 1$$

$$s_{n+1} = s_n + x_{n+1} \quad \text{و} \quad s_1 = x_1$$

به کمک این معادلات، برنامه زیر را می‌نویسیم

PROGRAM

اولین جمله در دنباله x
 10 LET x = 1
 اولین جمله در دنباله s
 20 LET s = x
 ۱۲ جمله از هر دنباله را می‌خواهیم.
 30 FOR n = 1 to 12
 این گام، فهرست مورد نظر ما را می‌دهد.
 40 PRINT n; x; s
 مقدار جدید x ، مقدار قدیم آن تقسیم بر n است.
 50 LET x = x/n
 مقدار جدید s ، مقدار قدیم آن به اضافه مقدار جدید x است.
 60 LET s = s + x
 این گام، برنامه را به سطر 40 بازمی‌گرداند؛
 70 NEXT n
 ۸۰ x ، s و n مقادیر جدیدی دارند.
 80 END
 کامپیوتر پس از $n = 12$ توقف می‌کند.

جدول ۱۰۱۱ نتایجی را نشان می‌دهد که با استفاده از یک کامپیوتر کوچک به دست آورده ایم. مقدار x_1 با نماد علمی به صورت $2.75573 \text{ E}-06$ نشان داده می‌شود که به معنی 2.75573×10^{-6} است؛ همین‌طور نمادهای مشابهی برای x_{11} و x_{12} به کار رفته است.

احتمالاً، حدس زده‌اید که دنباله اعداد $\{s_n\}$ به حد e میل می‌کند. در این باره بعداً بیشتر صحبت خواهیم کرد.

70 GO TO 20 اگر شرط $ABS(f) < 10 \wedge (-10)$ هنوز برقرار نیست، کار را تکرار کن.
80 END بر نامه فقط بعد از آن متوقف می‌شود که
 $ABS(f) < 10 \wedge (-10)$.

در جدول ۲۰۱۱ مقادیر انسلیس n و نیز x_n و $f(x_n)$ را آورده‌ایم.

جدول ۲۰۱۱

برآوردهای ریشه $\sin x - x^2 = 0$

| n | x_n | $f(x_n)$ |
|-----|---------------|----------------|
| ۱ | ۱ | -۰٫۱۵۸۵۲ ۹۰۱۵۲ |
| ۲ | ۰٫۸۹۱۳۹ ۵۹۹۵۳ | -۰٫۰۱۶۶۳ ۷۱۷۲۲ |
| ۳ | ۰٫۸۷۶۹۸ ۲۸۲۴۸ | -۰٫۰۰۰۲۸ ۸۱۴۹۲ |
| ۴ | ۰٫۸۷۶۷۲ ۶۲۹۸۵ | -۰٫۰۲۵۲۰۲ E-08 |
| ۵ | ۰٫۸۷۶۷۲ ۶۲۱۵۲ | -۰٫۲۲ E-13° |

* يك نتیجه غیرمنتظره، دقیقتر از آنچه که در جستجوی بودیم.

نکته از لحاظ نظری، محاسبات جدول را می‌توان به‌طور نامحدود ادامه داد و به‌این ترتیب دنباله کاملی تولید کرد؛ ولی در عمل، در چنین کاربردی ما می‌خواهیم وقتی درجه دقت مطلوب حاصل شد کار را متوقف کنیم. آیا این نتایج مثالی از يك دنباله‌اند؟ اگر بردنباله‌ای تأکید کنیم که به‌طور نامحدود ادامه می‌یابد، پاسخ این سؤال منفی است. ولی می‌توانیم نتایج را به عناصر يك دنباله تبدیل کنیم به‌این طریق که جملات اولیه x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 را اعدادی تعریف کنیم که در جدول نشان داده شده‌اند و سپس بگوییم به‌ازای $x_n = x_5, n > 5$ (که دیگر لازم نیست x ها همان x هایی باشند که روش نیوتن به‌دست می‌دهد).

اگر به راحتی به کامپیوتر دسترسی دارید و می‌توانید برنامه‌های کوتاهی برای کندوکاو در مباحث بعدی این فصل و فصل بعد بنویسید بسیار خوب است ولی اگر هم دسترسی ندارید، نگران نباشید زیرا ما دیگر بحث کامپیوتر را دنبال نخواهیم کرد. دوره‌های آموزش کامپیوتر همه‌جا در دسترس شماست و فرصت کسب تجربه عملی را در اختیار شما می‌گذارد. این بحث کوتاه درباره زبان کامپیوتر را از آن رو در اینجا آوردیم که بعضی از تفاوتها و بعضی از تشابهات نمادهایی که برای نمایش دنباله به کار می‌روند، نشان

حل: محاسباتی که باید انجام شود، به قرار زیر است.

۱. با $x_1 = 1$ شروع می‌کنیم.
۲. می‌خواهیم تابع $f(x) = \sin x - x^2$ را کوچک کنیم - در صورت امکان صفر کنیم - و می‌دانیم مشتق آن برابر است با $f'(x) = \cos x - 2x$.
۳. به‌ازای هر x_n مفروض، مقدار بعدی x این است

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

(بخش ۹.۲ را ببینید.) کامپیوتر x^2 را تشخیص نمی‌دهد مگر اینکه همان‌طور که در سطر 20 بر نامه زیر دیده می‌شود، آن را به صورت $x \wedge 2$ بنویسیم. همین‌طور، 10^{-10} را در سطر 40 بر نامه به شکل $10 \wedge (-10)$ می‌نویسیم. علامت ستاره در سطر 50، 2^*x ، نشان دهنده عمل ضرب است - ماشین تشخیص نمی‌دهد که $2x$ عبارت است از ۲ ضربدر x .

اکنون بار دیگر نگاهی به سطر 40 می‌اندازیم. ما نمی‌دانیم که چند بار تکرار ممکن است برای یافتن يك برآورد «به اندازه کافی دقیق» از ریشه $f(x) = 0$ لازم باشد، از این رو به دلخواه تصمیم می‌گیریم که وقتی به مقداری از x برسیم که به‌ازای آن قدر مطلق $f(x)$ کوچکتر از 10^{-10} باشد، آنگاه محاسبه را متوقف کنیم. کل دستور سطر 40، يك دستور شرطی «IF... THEN» است. اگر شرط برآورده شود، ماشین به سطر 80 می‌رود که دستور این سطر، محاسبه را متوقف می‌سازد. اما اگر شرط برآورده نشود، ماشین به دستور العملهای سطرهای 50، 60، و 70 می‌رود. سطر 70 حلقه را ایجاد می‌کند که باعث يك تکرار اضافی می‌شود. بر نامه این است

PROGRAM

شرح

مقدار آغازی x برابر است با ۱.
10 LET $x=1$
تابع عبارت است از
20 LET $f = \sin(x) - x \wedge 2$
 $f(x) = \sin x - x^2$
بنابراین، می‌توان ببینیم که جریان
30 PRINT $x; f$ از چه قرار است.

دستور شرطی مورد بحث
40 IF $ABS(f) < 10 \wedge (-10)$ THEN 80
در متن.

فرض می‌کنیم g مشتق f' را
50 LET $g = \cos(x) - 2^*x$
نشان دهد.

این، اساس روش نیوتن است:
60 LET $x = x - f/g$
 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

فیبوناتچی می‌نامند. نسبت $r_n = x_n / x_{n+1}$ دنباله وابسته r_1, r_2, \dots را به دست می‌دهد.

۱۲. اولین جمله دنباله‌ای عبارت است از $x_1 = ۱$. هر يك از جملات بعدی برابر است با مجموع همه جملات قبل از آن

$$x_{n+1} = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

تعدادی کافی از جملات اولیه این دنباله را بنویسید تا فرمولی کلی برای x_n به دست آید که به ازای هر $n \geq 2$ برقرار باشد.

۱۳. دنباله‌ای از اعداد گویا به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots, \frac{a}{b}, \frac{a+2b}{a+b}, \dots$$

در اینجا، صورتها يك دنباله تشکیل می‌دهند، مخرجها دنباله دیگری، و نسبتهای آنها نیز دنباله سومی را به وجود می‌آورند. فرض کنید x_n و y_n ، به ترتیب، صورت و مخرج کسر n ام، $r_n = x_n / y_n$ باشند.

الف) تحقیق کنید که $x_1^2 - 2y_1^2 = -1$ ، $x_2^2 - 2y_2^2 = +1$ و به طور کلیتر، اگر $a^2 - 2b^2$ برابر با -1 یا $+1$ باشد، آنگاه $(a+2b)^2 - 2(a+b)^2$ به ترتیب برابر با $+1$ یا -1 خواهد بود.

ب) کسره‌های $r_n = x_n / y_n$ وقتی n افزایش می‌یابد به يك حد میل می‌کنند. این حد چیست؟ (دانه‌مایی: با استفاده از قسمت الف) نشان دهید که $(1/y_n)^2 = \pm (r_n^2 - 2)$ ؛ و r_n کوچکتر از n نیست.

مسائل زیر با کامپیوتر یا ماشین حساب حل می‌شوند

۱۴. تقریبهایی را که در مثال ۷ برای جواب $\sin x = x^2$ در نزدیکی $x = ۱$ ارائه شد تحقیق (یا تصحیح) کنید.

۱۵. با استفاده از روش نیوتن، تقریبهایی برای جواب $\cos x = x$ به دست آورید.

۱۶. با $x_0 = ۱$ شروع کنید و فرض کنید $x_{n+1} = \cos(x_n)$. آیا به نظرتان می‌رسد که این فرایند به جوابی از $\cos x = x$ بینجامد؟ اگر جواب مثبت است، به ازای چه مقداری از x ؟

۱۷. با $x_1 = ۱$ شروع کنید و فرض کنید $x_{n+1} = \sqrt{\sin(x_n)}$. آیا به نظرتان می‌رسد که این فرایند به يك مقدار حدی بینجامد؟ اگر جواب مثبت است، این حد در چه معادله‌ای صدق می‌کند (یعنی، در ارتباط با فرمول تکرار)؟

۱۸. ماشین حساب معادله کپلر. در تعیین موضع يك سیاره (یا ماهواره) در مدارش در هر لحظه t ، حل معادله کپلر یعنی $E - e \sin E = M$ اهمیت دارد؛ در این معادله، e خروج از مرکز

داده شود. به ویژه، دنباله‌هایی که به وسیله بازگشت تولید می‌شوند. یکی از برجسته ترین تفاوتها در نمادگذاری دنباله‌ها، استفاده فراوان از اندیس در این کتاب و فقدان اندیس در برنامه‌های کامپیوتری است. در کامپیوتر، هر جا که متغیری، مثلاً x ، درست راست يك معادله ظاهر می‌شود، اشاره به مقدار متغیر قبل از اجرای آن سطر دارد. اگر همین متغیر درست چپ معادله ظاهر شود، به مقداری که متغیر درست پس از اجرای آن سطر خواهد داشت اشاره دارد. نماد متناظر ریاضی عبارت است از x_n درست راست و x_{n+1} درست چپ.

مسئله‌ها

در مسئله‌های ۱-۶، چهار جمله اول دنباله $\{a_n\}$ را به طور صریح بنویسید. اگر دنباله همگراست، حد آن چیست؟

$$۱. a_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

$$۲. a_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

$$۳. a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$$

$$۴. a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$۵. a_n = \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$۶. a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}$$

در مسئله‌های ۷-۱۱، هر يك از جملات x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 و x_6 را به طور صریح بنویسید.

$$۷. x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$۸. x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1}$$

$$۹. x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$$

$$۱۰. x_1 = -2, x_{n+1} = \frac{n}{n+1} x_n$$

$$۱۱. (این را دنباله $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, x_1 = x_2 = 1$)$$

مدار و M میانگین بی‌هنجاری (که بر حسب t معین می‌شود) است و E (بی‌هنجاری مربوط به خروج از مرکز) باید پیدا شود. اگر E معلوم باشد، موضع سیاره در مدارش را می‌توان تعیین کرد. با استفاده از روش نیوتن، تقریبهای جواب معادله کپلر برای E را با فرض $M = \pi/3$ و $e = 0.1$ بیابید. (برای مقادیر کوچک e ، تکرار معمولاً با $E_1 = M$ شروع می‌شود.)

PROGRAM n a_n b_n

10 LET a=1 1 1 1

20 LET b=1 2 2

30 FOR n=1 to 6 3

40 PRINT n;a;b 4

50 LET a=a+b 5

60 LET b=a+b 6

70 NEXT n

80 END

توجه: a در سمت راست دستور 60، همان a در سمت چپ دستور 50 است.

۲.۱۱ قضیه‌های مربوط به حد

اگر قرار باشد برای پاسخ دادن به هر سؤالی درباره همگرایی، تعریف ۲ را مستقیماً به کار ببریم - همچنانکه تا کنون به کار برده ایم - مطالعه حد کار خسته کننده‌ای می‌شود. خوشبختانه سه قضیه در دست داریم که باعث می‌شوند استفاده مستقیم از تعریف حد تا حد زیادی ضرورت خود را از دست بدهد. دو قضیه اول عملاً همان قضیه‌های ۱ و ۲ در بخش ۹.۱ هستند.

قضیه ۴

اگر $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ و $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ هر دو موجود و متناهی باشند.

آنگاه

$$\lim \{a_n + b_n\} = A + B \quad (i)$$

$$\lim \{ka_n\} = kA, \quad k \text{ به ازای هر } (ii)$$

$$\lim \{a_n \cdot b_n\} = A \cdot B \quad (iii)$$

$$(iv) \text{ به شرط آنکه } B \neq 0 \text{ و } b_n \text{ هیچگاه صفر نباشد,}$$

$$\lim \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} = \frac{A}{B}.$$

فرض بر این است که در همه حدهای بالا، $n \rightarrow \infty$.

۱۹. ماشین حساب گاهی اطلاع از اینکه نابرابریهای خاصی در بازه معینی برقرارند، اهمیت دارد. مثلاً، تقریب نمودار $y = \tan x$ به ازای $0 < x < \pi/2$ رو به بالاست و خط $y = x$ در مبدأ بر نمودار مماس است. از اینجا معلوم می‌شود که به ازای $0 < x < \pi/2$ ، $\tan x > x$. اگر خطی از مبدأ با شیب $m > 1$ بگذرانیم، این خط تا نقطه‌ای که به ریشه‌ای از معادله $\tan x = mx$ برسیم در بالای نمودار $y = \tan x$ قرار دارد. (الف) با استفاده از روش نیوتن معلوم کنید که خط $y = 2x$ در کجا $y = \tan x$ را در نزدیکی $x = \pi/3$ قطع می‌کند.

(ب) با این اطلاع، آیا درست است که به ازای $0 < x < \pi/3$ داریم $x < \tan x < 2x$ یا خیر؟ (پ) اگر x در بازه‌ای چون $0 < x < b$ باشد، که می‌دانیم در این بازه $x < \tan x < 2x$ ، ثابت کنید که $x^2 < \ln \sec x < x^2/2$. (دانشجوی: از اولین دسته نابرابریها از 0 تا h انتگرال بگیرد و سپس x را به جای h قرار دهد.)

در مسائل ۲۰-۲۳، یک برنامه بیسیک بنویسید که x_n را تولید کند و n و x_n را به ازای $n=1$ تا $n=10$ چاپ کند.

۲۰. برای دنباله مذکور در مسئله ۷.

۲۱. برای دنباله مذکور در مسئله ۸.

۲۲. برای دنباله مذکور در مسئله ۹.

۲۳. برای دنباله مذکور در مسئله ۱۰.

۲۴. دنباله فیبوناچی مذکور در مسئله ۱۱، به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌شود: $x_1 = 1$ ، $x_2 = 1$ ، و $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$. این دنباله را به صورت دیگری نیز می‌توان توصیف کرد که عبارت است از «درآمیختن» دو دنباله. (گرچه ممکن است این کار لازم نباشد چون دیدیم که نوشتن یک برنامه بیسیک آسانتر است.) فرض کنید $a_n = x_{2n}$ و $b_n = x_{2n-1}$. در این صورت، دنباله فیبوناچی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_k, b_k, a_{k+1}, b_{k+1}, \dots$$

فرمول بازگشت اکنون به صورت $a_1 = b_1 = 1$ و

مثال ۱

$$0 \leq \left| \frac{\cos n}{n} \right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{زیرا} \quad \frac{\cos n}{n} \rightarrow 0$$

$$1/n \rightarrow 0 \quad \text{و}$$

مثال ۲

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{زیرا} \quad \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

$$1/n \rightarrow 0 \quad \text{و}$$

مثال ۳

$$0 \leq \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{زیرا} \quad (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$1/n \rightarrow 0 \quad \text{و}$$

کاربرد قضیه‌های ۲ و ۳ با توجه به قضیه زیردانه گسترده‌تری پیدا می‌کند. این قضیه می‌گوید که حاصل اعمال یک تابع پیوسته بر یک دنباله همگرا، یک دنباله همگراست. این قضیه را بدون اثبات بیان می‌کنیم. (برای ملاحظه کلیات اثبات، مسأله ۶۵ را ببینید.)

قضیه ۴

اگر $a_n \rightarrow L$ و اگر f تابعی باشد که در L پیوسته و در همه a_n ها تعریف شده باشد، آنگاه $f(a_n) \rightarrow f(L)$.

مثال ۴ مطلوب است محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}$

حل: فرض کنید $f(x) = \sqrt{x}$ و $a_n = (n+1)/n$ در این صورت

$$f(a_n) = \sqrt{a_n} \rightarrow f(1) = \sqrt{1} = 1 \quad \text{و} \quad a_n \rightarrow 1$$

زیرا $f(x)$ در $x=1$ پیوسته است.

مثال ۵ شکل ۵.۱۱ را ببینید. مطلوب است محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n}$.

حل: فرض کنید $f(x) = 2^x$ و $a_n = 1/n$ در این صورت

$$f(a_n) = 2^{1/n} \rightarrow f(0) = 2^0 = 1 \quad \text{و} \quad a_n \rightarrow 0$$

زیرا 2^x در $x=0$ پیوسته است.

می‌توانیم با ترکیب قضیه ۲ با مثالهای ۲ و ۳ بخش ۱.۱۱ به صورت زیر پیش برویم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = -1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = -1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 5 \times 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 7n^2}{n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4/n^2) - 7}{1 + (3/n^2)} = \frac{0 - 7}{1 + 0} = -7.$$

نتیجه‌ای از قضیه ۲ که بعداً مفید خواهد بود این است که هر مضرب ناصفر از یک دنباله واگرا، واگراست.

نتیجه

اگر دنباله $\{a_n\}$ واگرا باشد و اگر c عدد دلخواهی مخالف ۰ باشد، آنگاه دنباله $\{ca_n\}$ واگراست.

اثبات نتیجه فرض کنید حکم برقرار نباشد و $\{ca_n\}$ همگرا باشد. در این صورت، اگر در قسمت (ii) قضیه ۲، k را برابر $1/c$ بگیریم، می‌بینیم که دنباله

$$\left\{ \frac{1}{c} \cdot ca_n \right\} = \{a_n\}$$

همگراست. بنابراین، نمی‌تواند همگرا باشد مگر آنکه $\{a_n\}$ همگرا باشد. اگر $\{a_n\}$ همگرا نباشد، $\{ca_n\}$ هم همگرا نیست.

قضیه زیر، صورتی از قضیه ساندویچ بخش ۹.۱ است که بر حسب دنباله بیان می‌شود.

قضیه ۳

اگر به ازای هر n پس از یک اندیس N داشته باشیم $a_n \leq b_n \leq c_n$ و اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ ، آنگاه برابری $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ را نیز خواهیم داشت.

یکی از پیامدهای فوری قضیه ۳ این است که اگر $-c_n \leq b_n \leq c_n$ و $c_n \rightarrow 0$ ، آنگاه $b_n \rightarrow 0$ زیرا $b_n \rightarrow 0$ و $-c_n \leq b_n \leq c_n$ این مطلب را در مثال زیر به کار می‌بریم.

تصور کنید N عدد صحیحی باشد به طوری که

$$N > M \text{ و } N \geq n_0.$$

در این صورت

$$|a_n - L| = |f(n) - L| < \epsilon \text{ و } n > N \Rightarrow a_n = f(n)$$

در حالت $f(x) \rightarrow +\infty$ یا $f(x) \rightarrow -\infty$ این اثبات

به تغییراتی جزئی نیاز دارد ولی در هر دو حالت، دنباله $\{a_n\}$ واگراست. قضیه ۵ به ما امکان می‌دهد که قاعده هوییتال را برای تعیین حدهای برخی از دنباله‌ها به کار ببریم. مثال زیر، نحوه کار را نشان می‌دهد.

مثال ۶ مطلوب است $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)/n$.

حل: تابع $(\ln x)/x$ به ازای هر $x \geq 1$ تعریف می‌شود و بنا به دنباله مفروض بر روی اعداد صحیح مثبت مطابق است. بنابراین، $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)/n$ با $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)/x$ برابر است اگر حد اخیر موجود باشد. با یک بار به کار بردن قاعده هوییتال می‌بینیم که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

نتیجه می‌گیریم که $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)/n = 0$.

وقتی قاعده هوییتال را برای یافتن حد یک دنباله به کار می‌بریم، اغلب با n به صورت یک متغیر حقیقی پیوسته رفتار می‌کنیم و مستقیماً نسبت به n مشتق می‌گیریم. به این ترتیب، مجبور نیستیم مانند مثال ۶ فرمول مربوط به a_n را بازنویس کنیم.

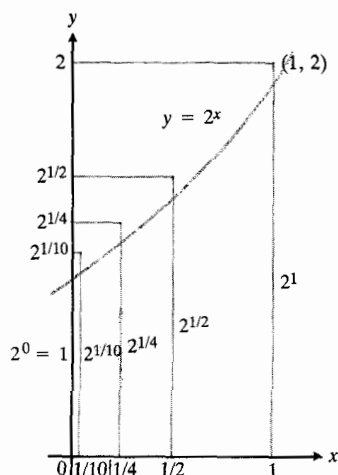
مثال ۷ مطلوب است محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n / 5n)$.

حل: بنا به قاعده هوییتال،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{5} = \infty.$$

وقتی جملات یک دنباله به صورت نسبت‌های چندجمله‌ایایی بر حسب n هستند، می‌توانیم برای یافتن حد از قاعده هوییتال استفاده کنیم و یا صورت و مخرج را بر توان مناسبی از n تقسیم کنیم. (مثلاً می‌توانیم صورت و مخرج را بر بزرگترین توان n در صورت یا مخرج تقسیم کنیم.) مثال زیر نشان می‌دهد که وقتی

| n | $2^{1/n}$ |
|-------|--------------|
| ۱ | ۲ |
| ۲ | ۱.۴۱۴۲۱۳۵۶۲ |
| ۳ | ۱.۲۱۸۹۲۰۷۱۱۵ |
| ۱۰ | ۱.۰۷۱۷۷۳۲۶۳ |
| ۱۰۰ | ۱.۰۰۰۶۹۵۵۵۵۵ |
| ۱۰۰۰ | ۱.۰۰۰۰۶۹۳۳۸۷ |
| ۱۰۰۰۰ | ۱.۰۰۰۰۰۶۹۳۱۷ |



۵۰۱۱ چون وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $x = 0$ در 2^x

پیوسته است، $x = 1/n \rightarrow 0$ و

$$y = 2^{1/n} \rightarrow 2^0 = 1.$$

قضیه ۵

فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد که به ازای هر $x \geq n_0$ تعریف شده و $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که وقتی $n \geq n_0$ ، $a_n = f(n)$.

اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

اثبات فرض کنید $\epsilon > 0$. نیز فرض کنید L یک حد متناهی است به طوری که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

در این صورت، یک عدد M وجود دارد به قسمی که

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

درجه صورت برابر، کوچکتر، یا بزرگتر از درجه مخرج است، چه اتفاقی می‌افتد.

مثال ۸. حدهای زیر را وقتی $n \rightarrow \infty$ پیدا کنید.

$$\lim \frac{n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 5} = \lim \frac{1 - (2/n) + (1/n^2)}{2 + (5/n^2)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{n^2 + 5n}{n^2 - 6} = \lim \frac{(1/n) + (5/n^2)}{1 - (6/n^2)} = 0$$

$$\lim \frac{n^2 - 5}{n + 1} = \lim \frac{2n}{1} = \infty \quad (\text{قاعده هوییتال})$$



مسئله‌ها

درمسئله‌های ۱-۱۰، برای هر دنباله $\{a_n\}$ جملات a_1, a_2, a_3, \dots و a_n را بنویسید. معین کنید که کدام دنباله‌ها همگرا باشند و کدامها واگرا. حد هر دنباله‌ای را که همگراست، بیابید.

$$a_n = \frac{1-n}{n^2} \quad ۱$$

$$a_n = \frac{n}{2^n} \quad ۲$$

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad ۳$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad ۴$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \quad ۵$$

$$a_n = 2 + (-1)^n \quad ۶$$

$$a_n = \cos \frac{n\pi}{2} \quad ۷$$

$$a_n = 8^{1/n} \quad ۸$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \quad ۹$$

$$a_n = \sin^2 \frac{1}{n} + \cos^2 \frac{1}{n} \quad ۱۰$$

$$a_n = \frac{1}{10n} \quad ۱۱$$

$$a_n = \frac{n}{10} \quad ۱۲$$

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \quad ۱۳$$

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n} \quad ۱۴$$

$$a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad ۱۵$$

$$a_n = 1 + (-1)^n \quad ۱۶$$

$$a_n = \frac{2n+1}{1-3n} \quad ۱۷$$

$$a_n = \frac{n^2 - n}{2n^2 + n} \quad ۱۸$$

$$a_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \quad ۱۹$$

$$a_n = \frac{\sin n}{n} \quad ۲۰$$

$$a_n = \sin \pi n \quad ۲۱$$

$$a_n = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) \quad ۲۲$$

$$a_n = n\pi \cos n\pi \quad ۲۳$$

$$a_n = \frac{\sin^2 n}{2^n} \quad ۲۴$$

$$a_n = \frac{n^2}{(n+1)^2} \quad ۲۵$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \quad ۲۶$$

$$a_n = \frac{1 - 5n^2}{n^2 + 8n^2} \quad ۲۷$$

$$a_n = \sqrt[3]{2^{2n+1}} \quad ۲۸$$

درمسئله‌های ۱۱-۵۲، همگرایی یا واگرایی دنباله‌ها را معلوم کنید. حد هر دنباله‌ای را که همگراست بیابید.

$$a_n = \sinh(\ln n) \quad \cdot ۵۰$$

$$a_n = n \sin \frac{1}{n} \quad \cdot ۵۱$$

$$a_n = \frac{2n + \sin n}{n + \cos n} \quad \cdot ۵۲$$

$$a_n = \frac{n^2}{2n-1} \sin \frac{1}{n} \quad \cdot ۵۳$$

$$a_n = n \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \quad \cdot ۵۴$$

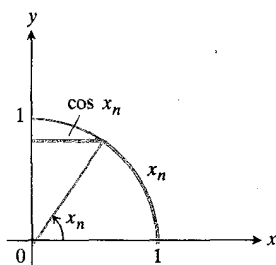
۵۵. نشان دهید که $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!/n^n) = 0$ (داهنمایی: صورت و

مخرج را بسط دهید و خارج قسمت را با $1/n$ مقایسه کنید).

۵۶. ماشین حساب فرمول $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$ فرمولی است که از روش نیوتن به دست آمده تا دنباله‌ای از تقریبهای جواب مثبت $x^2 - a = 0$ ، $a > 0$ را تولید کند. از $x_1 = 1$ و $a = 3$ شروع کنید و با استفاده از این فرمول، جملات متوالی دنباله را تا جایی که $\sqrt{3}$ با حداکثر دقت ممکن در ماشین حساب شما تقریب زده شود، محاسبه کنید.

۵۷. ماشین حساب اگر ماشین حساب شما دکمه ریشه دوم دارد، $x = 10$ را به ماشین حساب بدهید و ریشه‌های دوم متوالی را بگیرید و به این وسیله جملات دنباله $10^{1/2}, 10^{1/4}, 10^{1/8}, \dots$ را تقریب بزنید و این کار را تا جایی که ماشین حساب شما اجازه می‌دهد ادامه دهید. این جریان را با $x = 0.1$ تکرار کنید. و نیز اعداد مثبت دیگری را که بالا و پایین ۱ باشند بیازمایید. وقتی شواهد کافی فراهم کردید، پاسخ این سؤالها را حدس بزنید: آیا $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 0$ وقتی $x > 0$ وجود دارد؟ آیا این امر به مقدار x بستگی دارد؟

۵۸. ماشین حساب اگر با مقدار مناسبی از x_1 شروع کنید، قاعده $x_{n+1} = x_n + \cos x_n$ دنباله‌ای تولید خواهد کرد که به $\pi/2$ همگراست. شکل ۶.۱۱ دلیل این امر را نشان می‌دهد. همگرایی،



۶.۱۱ طول این قوس مستدیر، $\pi/2$ ، به وسیله

$x_n + \cos x_n$ تقریب زده می‌شود.

$$a_n = \tanh n \quad \cdot ۲۹$$

$$a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \quad \cdot ۳۰$$

$$a_n = \frac{2(n+1)+1}{2n+1} \quad \cdot ۳۱$$

$$a_n = \frac{(n+1)!}{n!} \quad \cdot ۳۲$$

$$a_n = 5 \quad \cdot ۳۳$$

$$a_n = 5^n \quad \cdot ۳۴$$

$$a_n = (0.5)^n \quad \cdot ۳۵$$

$$a_n = \frac{10^{n+1}}{10^n} \quad \cdot ۳۶$$

$$a_n = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \quad \cdot ۳۷$$

$$a_n = (0.03)^{1/n} \quad \cdot ۳۸$$

$$a_n = \sqrt{2 - \frac{1}{n}} \quad \cdot ۳۹$$

$$a_n = 2 + (0.1)^n \quad \cdot ۴۰$$

$$a_n = \frac{3^n}{n^2} \quad \cdot ۴۱$$

$$a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \quad \cdot ۴۲$$

$$a_n = \ln n - \ln(n+1) \quad \cdot ۴۳$$

$$a_n = \frac{1-2^n}{2^n} \quad \cdot ۴۴$$

$$a_n = \frac{n^2 - 2n + 1}{n-1} \quad \cdot ۴۵$$

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{n} \quad \cdot ۴۶$$

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdot ۴۷$$

$$a_n = \frac{\ln n}{\ln 2n} \quad \cdot ۴۸$$

$$a_n = \tan^{-1} n \quad \cdot ۴۹$$

هستند. در این بخش، این حدها را بررسی می‌کنیم و نظری به چند مثال که آنها را دربردارند می‌افکنیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \quad ۰.۱$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad ۰.۲$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0) \quad ۰.۳$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1) \quad ۰.۴$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x \text{ دلخواه}) \quad ۰.۵$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (x \text{ دلخواه}) \quad ۰.۶$$

توجه به این نکته ضروری است که در فرمولهای ۳ تا ۶، x ثابت است و فقط n تغییر می‌کند.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \quad ۰.۱$$

این حد در مثال ۶ از بخش ۲.۱۱ محاسبه شد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad ۰.۲$$

فرض کنید $a_n = n^{1/n}$. در این صورت

$$\ln a_n = \ln n^{1/n} = \frac{1}{n} \ln n \rightarrow 0 \quad (۱)$$

پس، با کاربرد قضیه ۴ بخش ۲.۱۱ در مورد $f(x) = e^x$ داریم

$$n^{1/n} = a_n = e^{\ln a_n} = f(\ln a_n) \rightarrow f(0) = e^0 = 1. \quad (۲)$$

$$x > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1 \quad ۰.۳$$

فرض کنید $a_n = x^{1/n}$. در این صورت

$$\ln a_n = \ln x^{1/n} = \frac{1}{n} \ln x \rightarrow 0 \quad (۳)$$

زیرا در حالی که n بزرگ می‌شود، x ثابت می‌ماند. پس، بنا به قضیه ۴ با ضابطه $f(x) = e^x$ داریم

$$x^{1/n} = a_n = e^{\ln a_n} \rightarrow e^0 = 1. \quad (۴)$$

سریع است. با در نظر گرفتن $x_1 = 1$ مقادیر x_2, x_3, x_4 را حساب کنید. معلوم کنید که اگر با $x_1 = 5$ شروع کنید چه پیش می‌آید. فراموش نکنید که از رادیان استفاده کنید.

۰.۵۹ فرض کنید $f(x)$ به ازای هر x در بازه $0 \leq x \leq 1$ تعریف شود، f در $x = 0$ مشتقپذیر باشد، و $f(0) = 0$. دنباله‌ای چون $\{a_n\}$ را با قاعده $a_n = nf(1/n)$ تعریف کنید. نشان دهید که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = f'(0)$.

با استفاده از نتیجه مسأله ۰.۵۹، حد هر یک از دنباله‌ها را در مسائل ۰.۶۰ تا ۰.۶۲ بیابید.

$$a_n = n \tan^{-1} \frac{1}{n} \quad ۰.۶۰$$

$$a_n = n(e^{1/n} - 1) \quad ۰.۶۱$$

$$a_n = n \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) \quad ۰.۶۲$$

۰.۶۳ تحت فرض قضیه ۵، ثابت کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ ، آنگاه دنباله $\{a_n\}$ واگراست.

۰.۶۴ قضیه ۳ را ثابت کنید.

۰.۶۵ قضیه ۴ را ثابت کنید. کلیات اثبات: فرض قضیه را در نظر بگیرید و تصور کنید ϵ عدد مثبت دلخواهی باشد. برای این ϵ یک $\delta > 0$ وجود دارد به قسمی که

$$\text{وقتی } |x - L| < \delta \text{ داریم } |f(x) - f(L)| < \epsilon.$$

برای چنین δ ی مثبتی، اندیسی چون N وجود دارد به طوری که

$$\text{وقتی } n > N \text{ داریم } |a_n - L| < \delta.$$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۰.۶۶ قضیه «درآمیختن» دنباله‌ها را ثابت کنید: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو همگرا و دارای حد L باشند، آنگاه دنباله

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

نیز همگراست و حدش L است.



TOOLKIT PROGRAMS

Sequences and Series

۳.۱۱ حدهایی که با آنها بسیار سروکار داریم

بعضی از حدها آنقدر زیاد مطرح می‌شوند که سزاوار توجه خاصی

حال، بنا به قضیه ۴ از بخش ۲.۱۱ با ضابطه $f(x) = e^x$ ،

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{1/n} a_n \rightarrow e^x.$$

۶. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ ، که x دلخواه است.

چون

$$-\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

کافی است نشان دهیم که $|x|^n/n! \rightarrow 0$. نخستین گام این است که یک عدد صحیح $M > |x|$ انتخاب کنیم به طوری که

$$\left(\frac{|x|}{M}\right)^n \rightarrow 0 \quad \text{و} \quad \frac{|x|}{M} < 1$$

حال توجه خود را به مقادیر $n < M$ محدود می‌کنیم. برای این مقادیر n می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{1 \cdot 2 \cdots M \cdot \underbrace{(M+1)(M+2) \cdots n}_{\text{عامل } (n-M)}}$$

$$\leq \frac{|x|^n}{M! M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M! M^n} = \frac{M^M}{M!} \left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

پس

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{M^M}{M!} \left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

اکنون توجه کنید که ثابت $M^M/M!$ با n تغییر نمی‌کند. بنا بر این، قضیه ساندویچ به ما می‌گوید که

$$\frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0 \quad \text{زیرا} \quad \left(\frac{|x|}{M}\right)^n \rightarrow 0.$$

تعداد زیادی از حدها را می‌توان از شش حدی که محاسبه کردیم به طور مستقیم به دست آورد.

مثالهای ۱-۵ حدهای زیر را وقتی $n \rightarrow \infty$ محاسبه کنید.

$$۱. \text{ اگر } |x| < 1, \text{ آنگاه } x^n \rightarrow 0, x^{n+4} = x^4 \cdot x^n \rightarrow x^4 \cdot 0 = 0.$$

$$۲. \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \times 1 = 1.$$

$$۳. \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 \rightarrow e^2.$$

$$۴. \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0, \text{ اگر } |x| < 1.$$

در اینجا یک راه این است که نشان دهیم ملاکهای تعریف ۲ ی بخش ۱.۱۱ به ازای $L = 0$ صادق اند. یعنی، نشان دهیم که به هر $\epsilon > 0$ یک اندیس N نظیر می‌شود به طوری که

$$(۵) \quad |x^n| < \epsilon, \quad n > N \quad \text{به ازای}$$

چون $\epsilon^{1/N} \rightarrow 1$ در حالی که $|x| < 1$ ، اندیس N وجود دارد که به ازای آن

$$(۶) \quad |x| < \epsilon^{1/N}.$$

به عبارت دیگر

$$(۷) \quad |x^N| = |x|^N < \epsilon.$$

این همان اندیسی است که در جستجوی هشتم

$$(۸) \quad |x^n| < |x^N|, \quad n > N \quad \text{به ازای}$$

با ترکیب (۷) و (۸) خواهیم داشت

$$(۹) \quad |x^n| < |x^N| < \epsilon, \quad n > N \quad \text{به ازای}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

$$۵. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \text{ که } x \text{ دلخواه است.}$$

فرض کنید

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

در این صورت

$$\ln a_n = \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \rightarrow x$$

این نتیجه را با کاربرد قاعده هوییتال، که در آن نسبت به n مشتق می‌گیریم، می‌توان به دست آورد

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x/n)}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1+x/n}\right) \cdot \left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x/n} = x. \end{aligned}$$

مسئله‌ها

در مسئله‌های ۱-۳۳، همگرایی یا واگرایی هر یک از دنباله‌ها را معلوم کنید. حد هر دنباله‌ای را که همگر است، بیابید.

$$a_n = \frac{1 + \ln n}{n} \quad .1$$

$$a_n = \frac{\ln n}{3n} \quad .2$$

$$a_n = \frac{(-4)^n}{n!} \quad .3$$

$$a_n = \sqrt[n]{10n} \quad .4$$

$$a_n = (0.5)^n \quad .5$$

$$a_n = \frac{1}{(0.9)^n} \quad .6$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad .7$$

$$a_n = \left(\frac{n+5}{n}\right)^n \quad .8$$

$$a_n = \frac{\ln(n+1)}{n} \quad .9$$

$$a_n = \sqrt[n]{n+1} \quad .10$$

$$a_n = \frac{n!}{10^n} \quad .11$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \quad .12$$

$$a_n = \sqrt[n]{2n} \quad .13$$

$$a_n = (n+4)^{1/(n+4)} \quad .14$$

$$a_n = \frac{1}{3^{2n-1}} \quad .15$$

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad .16$$

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad .17$$

$$.4 \quad \frac{100^n}{n!} \rightarrow 0$$

$$.5 \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x}{(n+1)} \cdot \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0 \times 0 = 0$$

با استفاده از لگاریتم یا قاعده هوییتال، به همان شیوه‌ای که در محاسبه حدهای شماره ۲ و ۳ و ۵ در آغاز این بخش عمل کردیم، می‌توان باز هم حدهای دیگری را محاسبه کرد.

مثال ۶: مطلوب است محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(3n+5))/n$

حل: بنا به قاعده هوییتال

$$. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3n+5)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3/(3n+5)}{1} = 0$$

مثال ۷: مطلوب است محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n+5}$

حل: فرض کنید

$$a_n = \sqrt[n]{3n+5} = (3n+5)^{1/n}$$

پس، همان‌طور که در مثال ۶ دیدیم، داریم

$$\ln a_n = \ln(3n+5)^{1/n} = \frac{\ln(3n+5)}{n} \rightarrow 0$$

بنابراین، طبق قضیه ۴ بخش ۲.۱۱

$$. a_n = e^{\ln a_n} \rightarrow e^0 = 1$$

می‌دانیم که وقتی $\ln n$ ، $n \rightarrow \infty$ کندتر از n افزایش می‌یابد چون $(\ln n)/n \rightarrow 0$. اما در واقع $\ln n$ کندتر از $\sqrt[n]{n}$ ، $\sqrt[n]{n}$ یا حتی $n^{0.000001}$ رشد می‌کند. اگر c ثابت مثبتی باشد، وقتی $(\ln n)/n^c \rightarrow 0$ ، $n \rightarrow \infty$ این مطلب در مثال زیر ثابت می‌شود.

مثال ۸: نشان دهید که اگر c ثابت مثبتی باشد، داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0$$

حل: قاعده هوییتال را به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{cn^{c-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{cn^c} = 0$$

ماشین حساب درمسأله‌های ۳۴-۳۶، با استفاده از ماشین حساب مقداری برای N بیابید به طوری که نابرابری داده شده به ازای $n \geq N$ صادق باشد.

$$|\sqrt[n]{0.5} - 1| < 10^{-3} \quad ۰.۳۴$$

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < 10^{-3} \quad ۰.۳۵$$

$$\frac{2^n}{n!} < 10^{-9} \quad ۰.۳۶$$

(دانهمایی: اگر ماشین حساب شما دکمه فاکتوریل را ندارد، بنویسید)

$$\frac{2^n}{n!} = \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{2}{2}\right) \cdots \left(\frac{2}{n}\right).$$

یعنی جملات متوالی را با ضرب کردن در ۲ و تقسیم کردن بر مقدار بعدی n حساب کنید.)

۰.۳۷. در مثال ۸، فرض کردیم که اگر $c > 0$ آنگاه وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $1/n^c \rightarrow 0$. اثبات رسمی این مطلب را بنویسید. (دانهمایی: اگر $\epsilon = 0.001$ و $c = 0.004$ ، N به چه بزرگی باشد تا مطمئن شویم که وقتی $n > N$ ، $|1/n^c - 0| < \epsilon$ ؟)



TOOLKIT PROGRAMS
Sequences and Series

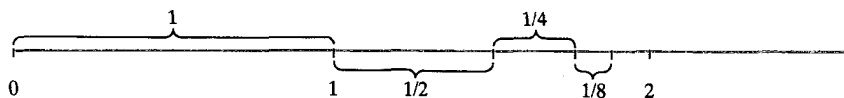
۴.۱۱ سریهای نامتناهی

قبل از آنکه تعریفی از اصطلاح سری نامتناهی ارائه کنیم به سوال زیر توجه کنید: آیا برای عبارتی به صورت زیر می شود معنایی قائل شد و اگر می شود چه معنایی؟

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

آیا می توان بینهایت جمله را عملاً باهم جمع کرد؟ جوابی که ما می دهیم همان جوابی است که معمولاً می دهند: از جمله اول شروع می کنیم و تعدادی متناهی از جملات را، به ترتیب، یکی پس از دیگری به آن می افزاییم (شکل ۷.۱۱). این فرایند، دنباله ای از

۷.۱۱ اگر طولهای ۱، ۱/۲، ۱/۴، ۱/۸، ...، باهم جمع شوند، مجموع به ۲ میل می کند.



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \rightarrow 2$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \quad ۰.۱۸$$

$$a_n = \frac{\ln(2n+1)}{n} \quad ۰.۱۹$$

$$a_n = \sqrt[n]{2n+1} \quad ۰.۲۰$$

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{x^n}{2n+1}}, \quad x > 0 \quad ۰.۲۱$$

$$a_n = \sqrt[n]{n^2} \quad ۰.۲۲$$

$$a_n = \sqrt[n]{n^2 + n} \quad ۰.۲۳$$

$$a_n = \frac{3^n \times 6^n}{2^{-n} \times n!} \quad ۰.۲۴$$

$$a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{1/n} \quad ۰.۲۵$$

$$a_n = \sqrt[n]{4^n n} \quad ۰.۲۶$$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad ۰.۲۷$$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad ۰.۲۸$$

$$a_n = \frac{\ln(n^2)}{n} \quad ۰.۲۹$$

$$a_n = \frac{(\ln n)^{200}}{n} \quad ۰.۳۰$$

$$a_n = \frac{\ln n}{n^{1/n}} \quad ۰.۳۱$$

$$a_n = \frac{1}{n} \int_1^n \frac{1}{x} dx \quad ۰.۳۲$$

$$a_n = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx, \quad p > 1 \quad ۰.۳۳$$

اعداد چون $\{s_n\}$

$$\left\{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \dots\right\}$$

$$= \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \dots\right\}$$

را به دست می‌دهد که به نظر می‌رسد همگراست و حدش ۲ است. در واقع، اگر بنویسیم

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

می‌توانیم نشان دهیم که

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

اگر افزایش n نامحدود باشد، $(1/2)^{n-1}$ به صفر میل می‌کند و به این نتیجه می‌رسیم که

$$\lim s_n = 2.$$

این مطلب به این معناست که

$$\text{«مجموع سری } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\text{»}$$

برابر است با ۲. آیا مجموع هر تعداد متناهی از جملات این دنباله، ۲ است؟ خیر. آیا می‌توانیم بینهایت جمله را عملاً با هم جمع کنیم؟ خیر. وقتی که می‌گوییم «مجموع سری» ۲ است، منظورمان فقط این است که دنبالهٔ مجموعهای جزئی s_n به حد ۲ همگراست. در مثال قبل، عوامل متوالی جمع یک دنباله تشکیل می‌دهند

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

با جمع کردن جملات متوالی این دنباله، دنبالهٔ جدیدی تشکیل می‌دهیم

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

چون چیزی که مورد مطالعه‌ماست مجموع جملات دنبالهٔ اول است.

تاریخ طولانی سریهای نامتناهی

گرچه سریهای نامتناهی در اوایل پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال، به‌ویژه به‌وسیلهٔ نیوتن، مورد استفادهٔ فراوان قرار گرفتند، ولی این مفهوم از روزگار باستان در ریاضیات حضور داشته‌است. در قرون وسطی ریاضیدانی به نام نیکل اورم^۱ در اثرش به نام مسائل در زمینهٔ هندسهٔ اقلیدسی^۲ (۱۳۶۵ میلادی) با استفاده از دسته‌بندی جملات، شبیه آنچه در مثال ۹ می‌بینید، نشان داد که سری همساز و اگر است. با این حال، در سراسر قرن هیجدهم، ریاضیدانان با آنکه می‌توانستند مجموع سریهای خاصی را بیابند و آزمونهای محدودی برای همگرایی سریهای معینی عرضه کردند و می‌دانستند که بقیهٔ سریها و اگر هستند، با این حال شناختی از مفاهیم کلی واگرایی و همگرایی سریها نداشتند. بسیاری از ریاضیدانان، از جمله ریاضیدان بزرگی چون اویلر، برخورد سهل‌انگارانه‌ای با سریها داشتند چنانکه گویی سری چیزی نیست جز يك مسألهٔ جمع طولانی یا (در مورد سریهای توانی)، يك چندجمله‌ای طولی. کوشی در قرن نوزدهم اولین ریاضیدانی بود که ملاکی اسلوبمند، روشن و کلی برای همگرایی به دست داد. ملاک کوشی اساساً بر تعریف دقیق او از حد استوار بود.

یک سری همگرا

در اینجا روش یافتن مجموع یک سری نامتناهی را که عددی اعشاری با رقم تکراری است نشان می‌دهیم

$$0.3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots$$

$$s_1 = \frac{3}{10}$$

$$s_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2}$$

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots + \frac{3}{10^n}$$

به صورت زیر می‌توان عبارت ساده و جمع وجوری برای s_n به دست آورد؛ هر دو طرف رابطه مربوط به s_n را در $1/10$ ضرب می‌کنیم

$$\frac{1}{10} s_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^{n+1}} + \frac{3}{10^{n+2}}$$

اگر این را از s_n کم کنیم، خواهیم داشت

$$s_n - \frac{1}{10} s_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}} = \frac{3}{10} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

پس

$$s_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \quad \text{و} \quad \frac{9}{10} s_n = \frac{3}{10} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $(1/10)^n \rightarrow 0$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{3}$$

بنابراین، می‌گوییم که مجموع سری نامتناهی

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$$

برابر با $1/3$ است و می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}$$

عدد اعشاری $0.3333\ldots$ نوع خاصی از سری هندسی

است.

در ریاضیات موارد بسیاری هست که در آنها چنین مجموعی اهمیت دارد. مثلاً ثابتهای ریاضی π و e و نیز جدولهای توابعی از قبیل $\sin x$ ، $\cos x$ ، e^x ، $\ln x$ ، $\tan^{-1}(x)$ و نظایر اینها را می‌توان با استفاده از سریها محاسبه کرد. اینها و کاربردهای دیگر در فصلهای ۱۲ و ۲۰ تشریح می‌شوند.

معنای اصطلاح سری در ریاضیات نباید با معنی این کلمه در زبان معمولی یکی گرفته شود.

تعریف

با در نظر گرفتن دنباله‌ای از اعداد چون $\{a_n\}$ عبارتی به صورت

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \quad (1 \text{ الف})$$

یک سری نامتناهی نامیده می‌شود. عدد a_n را جمله n ام سری می‌نامند. دنباله دومی وابسته به عبارت (۱ الف) در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

(۱ ب)

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

دنباله $\{s_n\}$ دنباله مجموعهای جزئی سری نامیده می‌شود. اگر این دنباله مجموعهای جزئی به حدهی چون L همگرا باشد، گوییم سری همگراست و مجموع آن L است. در این حالت می‌نویسیم

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L. \quad (1 \text{ پ})$$

اگر دنباله مجموعهای جزئی سری همگرا نباشد، گوییم سری واگراست.

نمادها وقتی شروع به بررسی یک سری نامتناهی مفروض می‌کنیم، ممکن است ندانیم همگراست یا واگرا. در هر حالت، بهتر است از نماد سیگما، \sum ، برای نشان دادن سری استفاده کنیم و بنویسیم

$$\sum a_n \quad \text{یا} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{یا} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

اولین عبارت خوانده می‌شود «مجموع جملات a_n از $n=1$ تا بینهایت»؛ دومی خوانده می‌شود «مجموع جملات a_k از $k=1$ تا بینهایت»؛ و سومی خوانده می‌شود «مجموع a_n ». هر سه نماد اختصاراتی هستند برای نوشتن

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

حد متناهی ندارد. اگر $a = 0$ ، سری (۲) عبارت است از

$$0 + 0 + 0 + \dots$$

که همگراست و مجموعش صفر است.

در حالت $r \neq 1$ ، رابطه (۷ الف) را به کار می‌بریم. در طرف راست (۷ الف)، n فقط در عبارت r^n ظاهر شده است. اگر $|r| < 1$ ، این عبارت وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به صفر میل می‌کند. بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1 \quad \text{اگر} \quad (۸)$$

اگر به یاد داشته باشیم که وقتی $r \neq 0$ داریم $r^0 = 1$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = a \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad (۹)$$

یا

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = a \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{a}{1-r} \quad (۱۰)$$

که در اینجا $1 > |r| > 0$ اگر $r = 0$ ، سری همگراست به $a/(1-r) = a$. اگر $|r| > 1$ ، آنگاه $|r^n| \rightarrow \infty$ و (۲) واگراست.

حالت باقیمانده حالتی است که $r = -1$. در این حالت، $s_1 = a$ ، $s_2 = a - a = 0$ ، $s_3 = a$ ، $s_4 = 0$ ، و الی آخر. اگر $a \neq 0$ ، این دنباله مجموعهای جزئی وقتی $n \rightarrow \infty$ حدی ندارد، و سری (۲) واگراست. پس قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۹

مجموع یک سری هندسی

اگر $|r| < 1$ ، سری هندسی

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

به $a/(1-r)$ همگراست. اگر $|r| \geq 1$ ، سری واگراست مگر آنکه $a = 0$ ، اگر $a = 0$ ، سری به ۰ همگراست.

مثال ۱ سری هندسی با ضوابط $a = 1/9$ و $r = 1/3$ عبارت

تقریب

سری هندسی

سری به صورت

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad (۲)$$

سری هندسی نامیده می‌شود.

نسبت r می‌تواند مثبت باشد، مثلاً در سری زیر

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots \quad (۳ \text{ الف})$$

یا منفی باشد، مثلاً در سری زیر

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} + \dots \quad (۳ \text{ ب})$$

مجموعهای جزئی سری هندسی

مجموع n جمله اول (۲) این است

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}. \quad (۴)$$

اگر دو طرف (۴) را در r ضرب کنیم خواهیم داشت

$$rs_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n. \quad (۵)$$

و اگر (۵) را از (۴) کم کنیم، تقریباً همه جملات سمت راست حذف می‌شود و آنچه می‌ماند این است

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

یا

$$(1-r)s_n = a(1-r^n). \quad (۶)$$

اگر $r \neq 1$ ، می‌توانیم (۶) را بر $(1-r)$ تقسیم کنیم و رابطه زیر را به دست آوریم

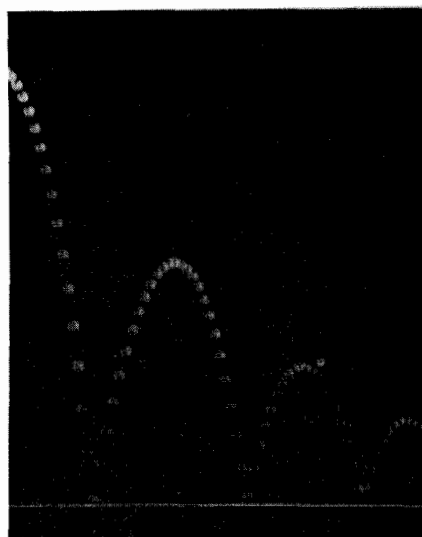
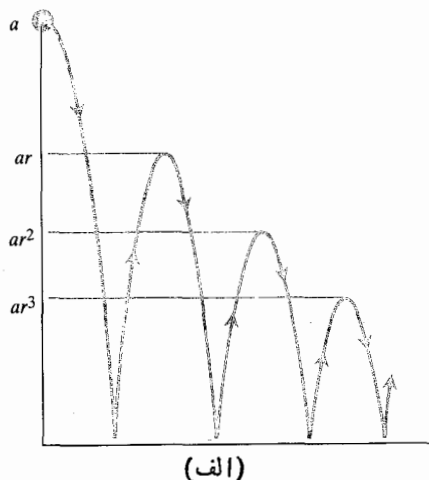
$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1. \quad (۷ \text{ الف})$$

از سوی دیگر، اگر در (۴) داشته باشیم $r = 1$ ، نتیجه می‌شود

$$s_n = na, \quad r = 1. \quad (۷ \text{ ب})$$

می‌خواهیم ببینیم که وقتی n در (۷ الف) و (۷ ب) به بینهایت میل می‌کند، حد چیست. واضح است که اگر $a \neq 0$ ، (۷ ب)

است از



(ب)

۸۰۱۱ (الف) ارتفاع هر برگشت توپ، یا ضریب r کاهش می‌یابد. (ب) عکسی که با استروپوسکوپ از توپ گرفته شده.

را پیدا کردیم و از روی اینها توانستیم نتایج دقیقی را که در قضیه آمده است به دست آوریم. ولی تعداد سریهایی که چنین عبارات جمع و جوری در مورد آنها پیدا شود، زیاد نیستند. (مثال بعد یکی از آن موارد نادر است.) قسمت اعظم باقیمانده این فصل اختصاص به آزمونهای دارد که می‌توانیم آنها را در مورد جملات a_n سری $\sum a_n$ به کار ببریم و همگرایی یا واگرایی سری را معلوم کنیم بدون آنکه مجموعه‌های جزئی s_n را محاسبه کرده باشیم. این کار را برای تعداد بسیار زیادی از سریها می‌توانیم انجام دهیم. اگر بدانیم که یک سری همگراست، باز هم مسأله تعیین مجموع آن باقی می‌ماند. فصل ۱۲ تا اندازه‌ای بدین امر کمک می‌کند ولی در مورد تعداد زیادی از سریها چاره‌ای نداریم جز آنکه مقادیر

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots = \frac{1}{9} (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots)$$

$$= \frac{1/9}{1 - 1/3} = \frac{1}{6}.$$

مثال ۲ سری هندسی با ضوابط $a=4$ و $r=-1/2$ عبارت است از

$$4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots \right)$$

$$= \frac{4}{1 + (1/2)} = \frac{8}{3}.$$

مثال ۳ تویی از ارتفاع a متری رها می‌شود. زمین، مسطح است و هر بار که توپ از ارتفاع h سقوط می‌کند و به زمین می‌خورد، به اندازه rh بالا می‌رود که r عدد مثبتی کوچکتر از ۱ است. کل مسافتی را که توپ بالا و پایین می‌رود پیدا کنید. شکل ۸۰۱۱ را ببینید.

حل: مسافت از سری زیر به دست می‌آید

$$s = a + 2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \dots$$

جملات پس از اولین جمله یک سری هندسی با مجموع $2ar/(1-r)$ تشکیل می‌دهند. بنابراین، مسافت برابر است با

$$s = a + \frac{2ar}{1-r} = a \frac{1+r}{1-r}.$$

مثلاً اگر a برابر ۶ متر باشد و $r=2/3$ ، مسافت برابر است با

$$s = 6 \frac{1 + (2/3)}{1 - (2/3)} = 6 \frac{5/3}{1/3} = 30 \text{ m}.$$

نکته ۱ در مورد سریهای هندسی از این بخت خوش برخوردار بودیم که برای آنها عبارات جمع وجود

$$s_n = \begin{cases} a \frac{1-r^n}{1-r} & r \neq 1 \\ na & r = 1 \end{cases}$$

رهگشاست، یعنی استفاده از کسره‌های ساده

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad (۱۱ \text{ الف})$$

با توجه به این، می‌توانیم مجموع جزئی

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

را به صورت

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \quad (۱۱ \text{ ب})$$

بنویسیم. با حذف پرانتزهای سمت راست و ترکیب جملات، مجموع به صورت زیر درمی‌آید.

$$s_k = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1} \quad (۱۲)$$

از روی این عبارتی که برای s_k نوشته‌ایم فوراً ملاحظه می‌شود که $s_k \rightarrow 1$ بنا بر این، سری همگراست و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad (۱۳)$$

چندسری واگرا

علاوه بر سریهای هندسی که در آنها $|r| \geq 1$ ، سریهای واگرای دیگری هم هستند.

مثال ۵ سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 + \dots$$

واگراست زیرا مجموعهای جزئی هر عدد L را پشت سر می‌گذارند. عدد $s_n = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$ در هر مرحله بزرگتر از n^2 یا مساوی با آن است.

مثال ۶ سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} + \dots$$

واگراست زیرا دنباله مجموعهای جزئی در نهایت از هر عدد از پیش تعیین شده‌ای فراتر می‌رود. هر جمله بزرگتر از ۱ است، پس مجموع

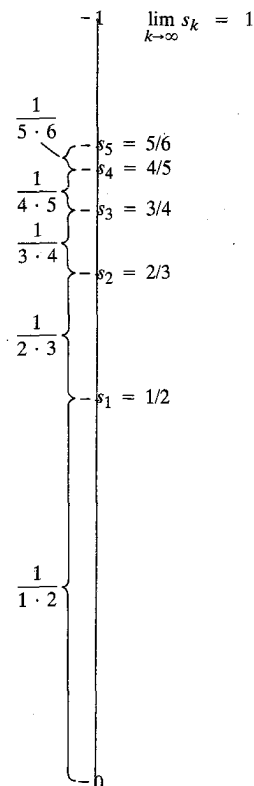
عددی مجموعهای جزئی را حساب کنیم و با استفاده از آنها مجموع واقعی را برآورد کنیم.

همان طور که در بالا گفتیم، مثال زیر، سری دیگری است که مجموع دقیقش را می‌توان از این طریق حساب کرد که ابتدا عبارت جمع و جور یا فرمولی برای مجموع جزئی k ام آن، s_k پیدا کنیم.

مثال ۴ معلوم کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} [1/n(n+1)]$ همگراست یا خیر. اگر همگراست، حدش را بیابید.

حل: شکل ۹۰۱۱ را ببینید. ابتدا سعی می‌کنیم در دنباله مجموعهای جزئی الگویی بیابیم که به عبارت جمع و جوری برای s_k بینجامد. در اینجا کلید موفقیت همان است که در انتگرالگیری

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$$



۹۰۱۱ مجموع اولین k جمله سری

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)}$$

برابر است با $k/(k+1)$ و مجموع سری برابر است با

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1.$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow S - S = 0.$$

در مثال بعد، هر دو قضیه ۶ و ۷ را به کار می‌بریم.

مثال ۸ معین کنید که هر یک از سریهای زیر همگراست یا واگرا. هر کدام همگراست، مجموعش را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \right)^n \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tan \frac{\pi}{4} \right)^n \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+5} \quad (\text{پ})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{4^n} \quad (\text{ت})$$

حل:

(الف) $\cos(\pi/3) = 1/2$. این يك سری هندسی است که اولین جمله آن $a_1 = 2(\cos \pi/3)$ و نسبت $r = \cos(\pi/3) = 1/2$ است؛ پس سری همگراست و مجموع آن،

$$a_1/(1-r) = 1/(1-1/2) = 2$$

است.

(ب) $\tan(\pi/4) = 1$. حد جمله n ام صفر نیست، بنابراین سری واگراست.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ و } a_n = \frac{n}{2n+5} \quad (\text{پ})$$

واگراست.

(ت) این يك سری هندسی است که اولین جمله آن $a_1 = -5/4$ و نسبت $r = -1/4$ از آن عبارت است. این سری همگراست و مجموعش این است

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{-5/4}{1+(1/4)} = -1.$$

يك شرط لازم برای همگرایی سری

به خاطر شیوه اثبات قضیه ۷، این قضیه را اغلب به صورت کوتا‌تر زیر بیان می‌کنند.



ممکن است يك سری واگرا باشد بدون اینکه مجموعهای جزئی‌اش بزرگ شوند. مثلاً، مجموعهای جزئی ممکن است همان‌طور که در مثال زیر خواهیم دید، بین دو مقدار نوسان کنند.

مثال ۷ سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ واگراست زیرا مجموعهای جزئی آن بین ۰ و ۱ تغییر می‌کنند

$$s_1 = (-1)^2 = 1$$

$$s_2 = (-1)^2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$$

$$s_3 = (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 = 1 - 1 + 1 = 1$$

والی آخر.

قضیه زیر روش سری برای آشکار کردن واگرایی از آن نوعی که در مثالهای ۵، ۶، و ۷ دیده شد به دست می‌دهد.

قضیه ۷

آزمون n امین جمله برای واگرایی

اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ، یا اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ وجود نداشته باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

اگر قضیه ۷ را در مورد سریهای مثالهای ۵، ۶، و ۷ به کار ببریم، نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \text{ واگراست زیرا } n^2 \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \text{ واگراست زیرا } \frac{n+1}{n} \rightarrow 1 \neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \text{ واگراست زیرا } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \text{ وجود ندارد.}$$

اثبات قضیه قضیه ۷ را با نشان دادن این مطلب که اگر $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، ثابت می‌کنیم. فرض کنید

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

و تصور کنید که $\sum a_n$ همگرا به S باشد؛ یعنی

$$s_n \rightarrow S.$$

وقتی n بزرگ است، $n-1$ نیز بزرگ است و هر دوی s_n و s_{n-1} نزدیک S اند. پس تفاضل آنها، a_n ، باید نزدیک صفر باشد.

جزئی $\sum (ka_n)$ به این شکل اند

$$S_n = ka_1 + ka_2 + \dots + ka_n \\ = k(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = kA_n$$

که به kA همگراست.

نکته ۲ اگر فکر می‌کنید قضیه ۹ باید دو قسمت دیگر داشته باشد تا با قضیه ۲ در بخش ۲.۱۱ متناظر باشد، مسائل ۲۲-۲۶ را ببینید. همچنین مسأله ۳۰ در بخش ۵.۱۱ و مسأله ۳۹ در بخش ۸.۱۱ را ببینید.

قسمت (ii) قضیه ۹ می‌گوید که هر مضربی از یک سری همگرا، همگراست. نظیر این مطلب در نتیجه زیر بیان می‌شود که می‌گوید هر مضرب ناصفر یک سری واگرا، واگراست.

نتیجه

اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، و اگر c عددی مخالف صفر باشد، آنگاه سری مضارب، $\sum ca_n$ ، واگراست.

نکته ۳ پیامد مستقیمی از قضیه ۹ این است که اگر $A = \sum a_n$ و $B = \sum b_n$ ، آنگاه

$$\sum (a_n - b_n) = \sum a_n + \sum (-1)b_n \\ = \sum a_n - \sum b_n = A - B. \quad (14)$$

سری $\sum (a_n - b_n)$ تفاضل $\sum a_n$ و $\sum b_n$ نامیده می‌شود و مجموع آنها خوانده می‌شود.

مثال ۱۰

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} = 2 \frac{1}{1 - (1/2)} = 4 \quad (\text{الف})$$

(ب)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\ = \frac{1}{1 - (1/2)} - \frac{1}{1 - (1/3)} \\ = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

نکته ۴ همیشه می‌توان تعدادی متناهی از جملات را به یک سری افزود یا از آن کاست بدون آنکه در همگرایی یا واگرایی سری تغییری حاصل شود. اگر $\sum a_n$ همگرا و k اندیسی بزرگتر از ۱

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، $a_n \rightarrow 0$.

هشدار: قضیه ۸ نمی‌گوید که اگر $a_n \rightarrow 0$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست. سری چون $\sum a_n$ ممکن است واگرا باشد حتی اگر $a_n \rightarrow 0$. پس، $\lim a_n = 0$ یک شرط لازم برای همگرایی سری $\sum a_n$ است ولی شرط کافی نیست.

مثال ۹ سری

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{جمله ۲}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\text{جمله ۴}} + \dots$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{\text{جمله } 2^n} + \dots$$

واگراست گرچه جملاتش دنباله‌ای می‌سازند که به ۰ همگراست.

وقتی دو سری همگرا داریم، می‌توانیم آنها را باهم جمع، از هم تفریق، و در مقادیر ثابت ضرب کنیم و سریهای همگرایی دیگری به دست آوریم. قضیه بعد جزئیات این مطلب را بیان می‌کند.

قضیه ۹

اگر $\sum a_n$ به A و $\sum b_n$ به B همگرا باشد، آنگاه

(i) $\sum (a_n + b_n)$ به $A + B$ همگراست(ii) $\sum ka_n$ به kA همگراست (k عددی دلخواه).

اثبات قضیه فرض کنید

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

در این صورت، مجموعه‌های جزئی $\sum (a_n + b_n)$ به این شکل اند

$$S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n)$$

$$= (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n)$$

$$= A_n + B_n.$$

چون $A_n \rightarrow A$ و $B_n \rightarrow B$ ، داریم $S_n \rightarrow A + B$. مجموعه‌های

آن را بیابید.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots \quad ۱$$

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \dots + \frac{1}{100^n} + \dots \quad ۲$$

$$1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-(n-1)} + \dots \quad ۳$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \dots \quad ۴$$

$$1 - 2 + 4 - 8 + \dots + (-1)^{n-1} 2^{n-1} + \dots \quad ۵$$

۶

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{n}{n+1} + \dots \quad ۷$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots \quad ۸$$

۹. سری مذکور درمسأله ۶ را می توان به صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

نمایش داد. همچنین این سری را می توان به شکل مجموع زیر نشان

داد که در آن، اندیس از $n = -1$ شروع می شود

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

این سری را به شکل مجموعی که با

$$n = -2 \quad (\text{الف})$$

$$n = 0 \quad (\text{ب})$$

$$n = 5 \quad (\text{پ})$$

شروع شود نشان دهید.

۱۰. الف) توپی از ارتفاع ۴ متری رها می شود. هر بار که

توپ از ارتفاع h متری سقوط می کند و به زمین می خورد به اندازه $75\%h$ متر بالا می رود. کل مسافتی را که توپ پایین و بالا می رود تعیین کنید.

ب) کل زمانی را که توپ در حال حرکت است حساب کنید (دانهمایی: از فرمول $s = 4.9t^2$ به دست می آوریم $t = \sqrt{s/4.9}$ که در آن s بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است.)

باشد، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست و

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n. \quad (15)$$

به عکس، اگر $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ به ازای هر $k > 1$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست و مجموعها همان طور که در (۱۵) دیده می شود به هم مربوط خواهند بود. پس، مثلاً

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} \quad (16)$$

و

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}. \quad (17)$$

توجه کنید که گرچه افزودن یا کاستن تعدادی متناهی از جملات، تأثیری در همگرایی یا واگرایی سری ندارد، ولی ممکن است مجموع یک سری همگرا را تغییر بدهد.

نکته ۵. می توان اندیس گذاری جملات یک سری را تغییر داد بدون آنکه همگرایی سری تغییر کند. مثلاً، یک سری هندسی را که با

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

شروع می شود می توان به صورت های زیر نمایش داد

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{یا} \quad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} \quad \text{یا} \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}} \quad (18)$$

اندیس گذاری به هر نحوی انجام شود، مجموعهای جزئی تغییر نمی کنند و بنابراین، ما آزادیم که اندیس گذاری را از هر عدد صحیح دلخواهی شروع کنیم. معمولاً آن نوع اندیس گذاری ترجیح داده می شود که به عبارت ساده ای بینجامد. در مثال ۱۱ (ب) به جای اینکه با $n = 1$ شروع کنیم با $n = 0$ شروع می کنیم زیرا به این ترتیب می توانیم سری را که در ذهن داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} \quad \text{با} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 2^{n-1}}{6^{n-1}} \quad \text{نشان دهیم.} \quad (19)$$

مسأله ها

در مسأله های ۱-۸، عبارت جمع و جوری برای مجموع n جمله، S_n ، از هر سری پیدا کنید. سپس اگر سری همگراست، مجموع

در هر يك از مسائل ۱۱-۱۸، مجموع سری را بیابید.

۲۴. عدد اعشاری

$$۱۰۲۲۱۲۳۱۲۳۱۲۳۰۰۰$$

را که پس از سه رقم اولیه دارای جزء تکراری است، به صورت يك عدد گویا چون p/q بنویسید.

در مسائل ۲۵-۳۸، در مورد هر يك از سریها همگرایی یا واگرایی را معلوم کنید و هر کدام که همگراست، مجموعش را بیابید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad ۲۵$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{n} \quad ۲۶$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{4^n} \quad ۲۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^n \quad ۲۸$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi \quad ۲۹$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n} \quad ۳۰$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} \quad ۳۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} \quad ۳۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \quad ۳۳$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n} \quad ۳۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n} \quad ۳۵$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \quad ۳۶$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n} \quad ۳۷$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \quad |x| > 1 \quad ۳۸$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \quad ۱۱$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n} \quad ۱۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n} \quad ۱۳$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n} \quad ۱۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{4^n} + \frac{1}{3^n}\right) \quad ۱۵$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{4^n} - \frac{1}{3^n}\right) \quad ۱۶$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{5^n}\right) \quad ۱۷$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right) \quad ۱۸$$

در هر يك از مسائل ۱۹-۲۲، مجموع سری را با استفاده از کسرهای ساده بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} \quad ۱۹$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} \quad ۲۰$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)} \quad ۲۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \quad ۲۲$$

۲۳. الف (عدد اعشاری

$$۰.۰۲۳۴۲۳۴۲۳۴۰۰۰$$

را که دارای جزء تکراری است، به صورت يك سری نامتناهی بنویسید و مجموع را به شکل نسبتی از دو عدد صحیح چون p/q بیان کنید.

ب) آیا این مطلب درست است که هر عدد اعشاری با جزء تکراری، يك عدد گویا به صورت p/q است؟ برای پاسختان دلیل بیاورید.

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

$$+ (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}.$$

(ب) با انگرالگیری از دو طرف برای قسمت (الف) نسبت به t ، از 0 تا x ، نشان دهید که

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + R$$

که در آن

$$R = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt.$$

(پ) اگر $x > 0$ ، نشان دهید که

$$|R| \leq \int_0^x t^{n+1} dt = \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

(دانهمایی: وقتی t از 0 تا x تغییر می کند، $0.1+t \geq 1$)

(ت) اگر $x = 1/2$ ، n در قسمت (پ) به چه بزرگی باشد تا بتوانیم تضمین کنیم که $|R| < 0.001$ ؟ یک چندجمله ای بنویسید که $\ln(1+x)$ را به ازای $0 \leq x \leq 1/2$ تا این درجه از دقت تقریب بزنند.

(ث) اگر $x = 1$ ، n در قسمت (پ) به چه بزرگی باشد تا بتوانیم تضمین کنیم که $|R| < 0.001$ ؟



TOOLKIT PROGRAMS
Sequences and Series

۵.۱۱ سریهای با جملات نامنفی: آزمونهای مقایسه ای و انتگرال

در مورد هر سری مفروض $\sum a_n$ دو سؤال زیر مطرح می شود

۱. آیا سری همگراست؟

۲. اگر همگراست، مجموع آن چیست؟

در قسمت اعظم بقیه این فصل به سؤال اول می پردازیم. ولی در عمل، سؤال دوم نیز برای اهل علم یا مهندسان به همان اندازه اهمیت دارد و ما بعداً به این سؤال بر خواهیم گشت.

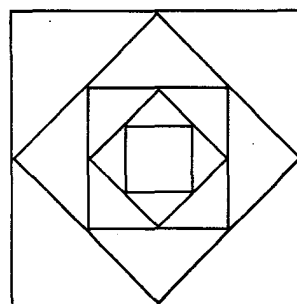
در این بخش و بخش بعد سریهایی را مطالعه خواهیم کرد که

در مسائل ۳۹ و ۴۰، برای آنها مثالهایی از قضیه ۶ هستند. در هر مورد مقدار a و r را پیدا کنید.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1 \quad ۳۹$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1 \quad ۴۰$$

۴۱. شکل ۱۰.۱۱ اولین پنج مربع از یک دنباله نامتناهی از مربعها را نشان می دهد. مساحت مربع بزرگ بیرونی، ۴ است و هر یک از مربعهای دیگر با وصل کردن نقاط وسط اضلاع مربع قبل از آن به دست می آید. مجموع مساحات همه مربعها را بیابید.



شکل ۱۰.۱۱

۴۲. عبارت جمع و جوری برای مجموع جزئی n ام سری $\sum (-1)^{n+1}$ بیابید.

۴۳. با آوردن مثال نشان دهید که ممکن است مجموع جمله به جمله دوسری واگرا، همگرا باشد.

۴۴. مطلوب است سریهای هندسی همگرای $A = \sum a_n$ و $B = \sum b_n$ که نشان بدهند $\sum a_n b_n$ ممکن است همگرا باشد بدون اینکه برابر $A \cdot B$ باشد.

۴۵. با آوردن مثال نشان دهید که ممکن است $\sum (a_n/b_n)$ واگرا باشد در حالی که $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند و هیچ b_n صفر نباشد.

۴۶. با آوردن مثال نشان دهید که ممکن است $\sum (a_n/b_n)$ به مقداری بجز A/B همگرا باشد در حالی که $A = \sum a_n$ ، $B = \sum b_n \neq 0$ ، و هیچ b_n صفر نباشد.

۴۷. نشان دهید که اگر $\sum a_n$ همگرا باشد و به ازای هر n ، $a_n \neq 0$ ، آنگاه $\sum (1/a_n)$ واگراست.

۴۸. (الف) از راه تقسیم تحقیق کنید که

$$s_{n+1} = s_n + a_n \text{ یعنی}$$

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \dots \quad (۴)$$

هر دنباله $\{s_n\}$ نظیر دنباله (۴) با این ویژگی که به ازای هر n ، $s_n \leq s_{n+1}$ ، يك دنباله غیر نزولی نامیده می‌شود.

دو نوع دنباله غیر نزولی داریم—آنکه از هر کران متناهی فراتر می‌رود و آنکه چنین نیست. دنباله نوع اول واگرا به بینهایت است. ما توجه خود را به دنباله نوع دوم معطوف می‌کنیم یعنی دنباله‌ای که از همه کرانها فراتر نمی‌رود. چنین دنباله‌ای را از بالا کراندار می‌نامند، و هر عدد M که برای آن

$$s_n \leq M \quad \text{به ازای هر } n$$

يك کران بالای دنباله نام دارد.

مثال ۱ اگر $s_n = n/(n+1)$ ، آنگاه ۱ يك کران بسالاست و هر عدد بزرگتری هم همین‌طور است، مثلاً $\sqrt{۲}$ ، ۵، یا ۱۷. هیچ عدد کوچکتری از ۱، کران بالا نیست؛ بنابراین عدد ۱، کوچکترین کران بالای این دنباله است.

وقتی يك دنباله غیر نزولی از بالا کراندار است ممکن است این سؤال مطرح شود که «آیا باید يك کوچکترین کران بسالاهم داشته باشد؟» پاسخ مثبت است ولی ما آن را ثابت نخواهیم کرد. ما ثابت می‌کنیم که اگر L کوچکترین کران بالا باشد، دنباله به L همگراست. استدلال زیر نشان می‌دهد که چرا L حد است.

وقتی نقاط $(1, s_1)$ ، $(2, s_2)$ ، \dots ، (n, s_n) را در صفحه xy مشخص می‌کنیم، اگر M يك کران بالای دنباله باشد، همه نقاط مشخص شده یا روی خط $y = M$ یا در زیر آن قرار می‌گیرند (شکل ۱۱.۱۱). روشن به نظر می‌رسد که باید خطی چون $y = L$ وجود داشته باشد که پایینتر از همه این گونه خطها باشد، یعنی هیچ يك از نقاط (n, s_n) بالای $y = L$ نباشد ولی به ازای هر عدد مثبت ϵ ،

جمله منفی ندارند. دلیل این محدودیت این است که مجموعه‌های جزئی این سریها همیشه دنباله‌هایی غیر نزولی تشکیل می‌دهند و دنباله‌هایی غیر نزولی که از بالا کراندارند، همان‌طور که خواهیم دید، همیشه همگرا هستند. پس، برای اینکه نشان دهیم يك سری با جملات نامنفی همگراست، کافی است نشان دهیم عددی هست که مجموعه‌های جزئی از آن فراتر نمی‌روند.

اینکه با چنین روشی همگرایی ثابت می‌شود بدون اینکه مجموع سری مورد نظر عملاً پیدا شود، ممکن است در نگاه اول رضایتبخش به نظر نرسد. البته بهتر است مجموع سری را از روی فرمول شسته‌رفته مجموعه‌های جزئی آن پیدا کنیم، ولی در بیشتر موارد چنین فرمولی در دسترس ما نیست و در نتیجه مجبوریم يك فرایند دومرحله‌ای را در پیش بگیریم، یعنی اول همگرایی را ثابت کنیم و سپس مجموع آن را تقریب بزنیم.

نکته تعجب‌آور این است که اگر در شروع بررسی خود از همگرایی، سریهای را که يك یا چند جمله منفی دارند موقتاً کنار بگذاریم، چندان محدودیتی ایجاد نکرده‌ایم. همچنانکه در بخش ۷.۱۱ خواهیم دید، يك سری $\sum a_n$ همگراست هرگاه سری متناظر قدر مطلقها، $\sum |a_n|$ ، همگرا باشد. (عکس این مطلب درست نیست. در بخشهای ۷.۱۱ و ۸.۱۱ به این موضوعات بیشتر خواهیم پرداخت). پس، اگر بدانیم که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \quad (۱)$$

همگراست، می‌دانیم که همه سریهای از قبیل

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots \quad (۲)$$

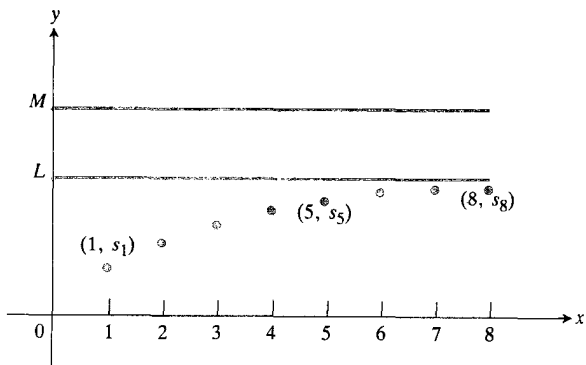
و

$$-1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} - \dots \quad (۳)$$

نیز که از (۱) با تغییر علامت يك یا چند جمله به دست می‌آیند، همگرايند. ممکن است ندانیم که به چه مقداری همگرا هستند، ولی دست کم می‌دانیم همگرا هستند و این اطلاع، گام اولیه و لازم برای برآورد کردن مجموعه‌های آنهاست.

دنباله‌های غیر نزولی

فرض کنید $\sum a_n$ يك سری نامتناهی بدون جملات منفی باشد. یعنی به ازای هر n ، $a_n \geq 0$. در این صورت، وقتی مجموعه‌های جزئی s_1 ، s_2 ، s_3 و غیره را محاسبه می‌کنیم می‌بینیم که هر يك بزرگتر از مجموع جزئی ماقبل خود و یا مساوی با آن است زیرا



۱۱.۱۱ وقتی جملات يك دنباله غیر نزولی کران بالایی چون M دارند، دارای حدی مثل $L \leq M$ هستند.

مثال ۲ سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \quad (۵)$$

همگراست زیرا همه جملاتش مثبت و نایبتر از جملات متناظر

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots \quad (۶)$$

هستند. برای اینکه ببینیم این رابطه بین دوسری چگونه به يك کران بالا برای مجموعهای جزئی $\sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)$ می انجامد، فرض می کنیم

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

و ملاحظه می کنیم که به ازای هر n ،

$$s_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - (1/2)} = 3.$$

پس، مجموعهای جزئی $\sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)$ همگی کوچکتر از ۳ اند.

بنابراین، $\sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)$ همگراست.

نمی توانیم فقط به این دلیل که ۳ يك کران بالای مجموعهای جزئی $\sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)$ است نتیجه بگیریم که سری به ۳ همگراست. این سری در واقع به $e = 2.71828$ همگراست. ■

آزمون مقایسه ای برای همگرایی

در مثال ۲، همگرایی سری را از طریق مقایسه آن با سری که می دانستیم همگراست، ثابت کردیم. این نوع مقایسه نمونه ای است از فرایندی که آزمون مقایسه ای برای همگرایی سریهای با جملات منفی، نامیده می شود.

آزمون مقایسه ای برای سریهای با جملات نامنفی

فرض کنید $\sum a_n$ سری باشد که جمله منفی ندارد.

الف) آزمون همگرایی $\sum a_n$ سری $\sum a_n$ همگراست اگر سری همگرایی چون $\sum c_n$ با جملات نامنفی وجود داشته باشد به طوری که به ازای عدد صحیح مثبتی چون n_0 ، برای هر $n > n_0$ داشته باشیم $a_n \leq c_n$.

ب) آزمون واگرایی $\sum a_n$ سری $\sum a_n$ واگراست اگر سری واگرایی چون $\sum d_n$ با جملات نامنفی وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n > n_0$ ، $a_n \geq d_n$.

نقاطی بالای هر خط پایینتر $y = L - \epsilon$ واقع باشند. در این صورت، L حد دنباله است زیرا عدد L دارای ویژگیهای زیر است
الف) به ازای هر مقدار n ، $s_n \leq L$ و
ب) به ازای هر $\epsilon > 0$ ، دست کم يك عدد صحیح چون N وجود دارد به قسمی که

$$s_N > L - \epsilon.$$

به علاوه، این واقعیت که $\{s_n\}$ دنباله ای غیر نزولی است، حاکی از آن است که

$$s_n \geq s_N > L - \epsilon, \quad n \geq N$$

این بدان معنی است که همه اعداد s_n بعد از N امین عدد دنباله، فاصله شان از L بیشتر از ϵ نیست. این دقیقاً همان شرطی است که باید L داشته باشد تا حد دنباله s_n باشد.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

مطالب مربوط به دنباله های غیر نزولی در قضیه زیر خلاصه شده اند.

قضیه ۱۰

قضیه دنباله غیر نزولی

فرض کنید $\{s_n\}$ دنباله ای غیر نزولی از اعداد حقیقی باشد. در این صورت، یکی از دو حالت زیر باید برقرار باشد
الف) جملات دنباله همگی نایبتر از يك ثابت منتهای چون M باشند. در این حالت، دنباله دارای حدی منتهای چون L است که آن هم نایبتر از M است.
ب) دنباله واگرا به بینهایت مثبت باشد؛ یعنی اعداد دنباله نهایتاً هر عدد از پیش تعیین شده ای را پشت سر بگذارند.

حالت (ب) قضیه وقتی پیش می آید که صرف نظر از اینکه M چقدر بزرگ باشد، نقاطی چون (n, s_n) وجود داشته باشند که در بالای هر خط مفروض $y = M$ باشند.

حال قضیه ۱۰ را در مورد همگرایی سریهای نامنتهای با جملات نامنفی به کار می بریم. اگر $\sum a_n$ چنین سری باشد، دنباله مجموعهای جزئی آن، $\{s_n\}$ ، دنباله ای غیر نزولی است. پس، $\{s_n\}$ و در نتیجه $\sum a_n$ ، همگرا خواهند بود اگر و تنها اگر s_n دارای يك کران بالا باشد. مسأله این است که در هر مورد خاص چگونه معلوم کنیم که s_n ها کران بالا دارند.

گاهی، از بالا کراندار بودن s_n را به این طریق می توان نشان داد که نشان دهیم هر يك از s_n ها نایبتر از مجموع جزئی متناظر يك سری است که همگرا بودنش معلوم است. مثال زیر، نحوه انجام این کار را نشان می دهد.

در قسمت (الف)، مجموعه‌های جزئی سری $\sum a_n$ از بالا به کران زیر محدودند

$$M = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n.$$

بنابراین، یک دنباله غیر نزولی با حدی چون L تشکیل می‌دهند که نایب‌تر از M است.

در قسمت (ب)، مجموعه‌های جزئی $\sum a_n$ از بالا کراندار نیستند. اگر باشند، مجموعه‌های جزئی $\sum d_n$ به کران زیر محدودند

$$M' = d_1 + d_2 + \dots + d_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n.$$

این به معنی همگرایی $\sum d_n$ است. بنابراین، واگرایی $\sum d_n$ ، واگرایی $\sum a_n$ را نتیجه می‌دهد.

در به کار بردن این آزمون در مورد یک سری، مجبور نیستیم که جملات اولیه سری را در نظر بگیریم. می‌توانیم از هر اندیس N شروع کنیم، به شرط اینکه تمام جملات سری را از آن به بعد در نظر بگیریم.

مثال ۳ برای اثبات همگرایی سری

$$5 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots$$

می‌توان از چهار جمله اول صرف نظر کرد و باقی‌مانده سری را از جمله پنجم به بعد (جمله پنجم، $1/2$ است) با سری هندسی همگرای زیر مقایسه کرد

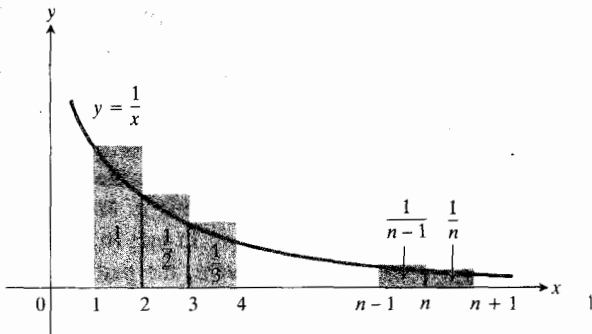
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

برای استفاده از آزمون مقایسه‌ای به فهرستی از سریهای که همگرا بودنشان معلوم است و نیز فهرستی از سریهایی که واگرا بودنشان معلوم است نیاز داریم. مثال بعدی ما یک سری واگرا را به این فهرست می‌افزاید. همچنین مثال ۴ مقدمه‌ای است بر آزمون انتگرال که به نوبه خود سریهای دیگری را، اعم از واگرا و همگرا، به فهرستهای ما خواهد افزود. پس از آزمون انتگرال، به شکل قویتری از آزمون مقایسه‌ای که به آزمون مقایسه‌ای حدی موسوم است، خواهیم پرداخت.

مثال ۴ سری همساز

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

واگراست زیرا دنباله مجموعهای جزئی آن کراندار نیست. برای مشاهده این امر، شکل ۱۲.۱۱ را ببینید. این شکل تعدادی از



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1) \quad 12.11$$

مستطیلهای سایه‌دار را نشان می‌دهد که مجموع مساحت آنها به صورت زیر است

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

این مستطیلهای سطحی را می‌پوشانند که مساحتش بزرگتر از مساحت سطح زیر نمودار $y = 1/x$ ، در بازه از $x=1$ تا $x=n+1$ است

$$s_n > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1).$$

بنابراین، $s_n \rightarrow +\infty$ زیرا $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$. سری

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

واگرا به بینهایت مثبت است.

سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ سری دیگری است که واگرایی اش را نمی‌توان با استفاده از آزمون جمله n ام آشکار ساخت. این سری، علی‌رغم اینکه $1/n \rightarrow 0$ ، واگراست. می‌دانیم که هر مضرب ناصفری از یک سری واگرا، واگراست (نتیجه قضیه ۹ در بخش قبل). بنابراین، واگرایی سری همساز، واگرایی سریهای نظیر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n} = \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \frac{1}{400} + \dots$$

را نتیجه می‌دهد.

در شکل ۱۳.۱۱ (ب) مستطیلهای به جای اینکه روبه راست تشکیل شوند، روبه چپ تشکیل شده‌اند. اگر موقتاً مستطیل اول، به مساحت a_1 ، را کنار بگذاریم، می بینیم که

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq \int_1^n f(x) dx.$$

اگر a_1 را وارد کار کنیم، داریم

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx.$$

از ترکیب این نتایج به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} f(x) dx &\leq a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &\leq a_1 + \int_1^n f(x) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

اگر انتگرال $\int_1^\infty f(x) dx$ متناهی باشد، نابرابری سمت راست نشان می دهد که $\sum a_n$ نیز متناهی است. ولی اگر $\int_1^\infty f(x) dx$ نامتناهی باشد، نساابرابری سمت چپ نشان می دهد که سری نیز نامتناهی است. پس، سری و انتگرال یا هر دو متناهی اند و یا هر دو نامتناهی.

مثال ۵ سری p . اگر p يك ثابت حقیقی باشد، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (8)$$

همگراست اگر $p > 1$ و واگراست اگر $p \leq 1$. برای اثبات این مطلب، فرض می کنیم

$$f(x) = \frac{1}{x^p}.$$

حال اگر $p > 1$ ، داریم $-p+1 < 0$ و

$$\begin{aligned} \int_1^\infty x^{-p} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^b \\ &= \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{-p+1} - 1) = \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

که متناهی است. پس، p -سری همگراست اگر p بزرگتر از ۱ باشد.

آزمون انتگرال

در مثال ۲، واگرایی سری همساز را از طریق مقایسه دنباله مجموعهای جزئی اش با يك دنباله واگرا از انتگرالها نتیجه گرفتیم. این مقایسه، حالت خاصی است از يك فرایند کلیتر مقایسه موسوم به آزمون انتگرال. این آزمون مسائلهایی برای همگرایی و واگرایی سریهایی که جملاتشان مثبت اند، به دست می دهد.

آزمون انتگرال

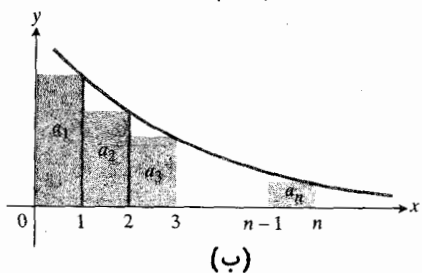
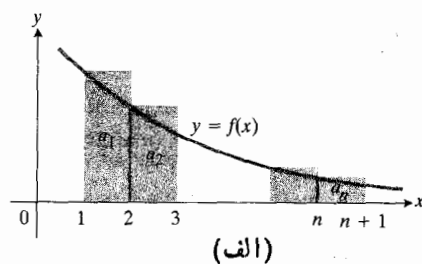
فرض کنید $a_n = f(n)$ که در آن، $f(x)$ به ازای هر $x \geq 1$ يك تابع نزولی مثبت و پیوسته از x است. در این صورت، سری $\sum a_n$ و انتگرال

$$\int_1^\infty f(x) dx$$

یا هر دو همگرا هستند و یا هر دو واگرايند.

اثبات با این فرض شروع می کنیم که f تابعی نزولی است بسا ضابطه $f(n) = a_n$ به ازای هر n . با توجه به این مطلب، ملاحظه می کنیم که مستطیلهای شکل ۱۳.۱۱ (الف) که دارای مساحات a_1, a_2, \dots, a_n هستند، جمعاً سطحی را می پوشانند که بزرگتر از سطح زیر خم $y = f(x)$ از $x = 1$ تا $x = n+1$ است. یعنی

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$



$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx$$

که a_n رفتارش تقریباً مثل $16/n^2$ است و از مقایسه با $\sum 1/n^2$ ، که p -سری است با ضابطه $p=2$ ، حدس می‌زنیم که این سری همگرا باشد. بدزبان دقیقتر، در قسمت (الف) می‌توانیم بنویسیم

$$d_n = \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad a_n = \frac{2n}{n^2 - n + 1}$$

و نسبت زیر را ملاحظه کنیم

$$\frac{a_n}{d_n} = \frac{2n^2}{n^2 - n + 1} = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

واضح است که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، حد برابر است با ۲:

$$\lim \frac{a_n}{d_n} = 2.$$

این بدان معنی است که می‌دانیم اگر در تعریف حد قرار دهیم $\epsilon = 1$ ، اندیسی چون N وجود دارد به قسمی که به ازای هر $n \geq N$ اختلاف a_n/d_n با این حد، بیشتر از ۱ نیست

$$\text{به‌ازای } n \geq N, \quad 2 - 1 \leq \frac{a_n}{d_n} \leq 2 + 1.$$

از این رو، به‌ازای $n \geq N$ ، $a_n \geq d_n$ ، پس، بنا به آزمون مقایسه‌ای، $\sum a_n$ واگراست زیرا $\sum d_n$ واگراست.

در قسمت (ب)، اگر قرار دهیم $c_n = 1/n^3$ ، به راحتی می‌توان نشان داد که

$$\lim \frac{a_n}{c_n} = 16.$$

اگر در تعریف حد قرار دهیم $\epsilon = 1$ ، می‌توان نتیجه گرفت که اندیسی چون N' وجود دارد به قسمی که وقتی $n \geq N'$ ، بین a_n/c_n و ۱۷ و ۱۵ است. چون $\sum c_n$ همگراست، $\sum 17c_n$ و در نتیجه $\sum a_n$ نیز همگراست.

کار حدس‌زنی ما راه را برای انتخاب موفقیت آمیز سریهای مورد مقایسه هموار ساخت. در آزمون مقایسه‌ای حدی که در زیر می‌آید، مطالبی را که در این زمینه گفتیم به زبان دقیقتری بیان می‌کنیم.

آزمون مقایسه‌ای حدی

(الف) آزمون همگرایی. اگر به‌ازای $n \geq n_0$ داشته باشیم $a_n \geq 0$ و سری همگرایی چون $\sum c_n$ وجود داشته باشد به قسمی که

اگر $p=1$ ، داریم

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

که می‌دانیم واگراست. یا، بنا به آزمون انتگرال،

$$\int_1^\infty x^{-1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = +\infty$$

و چون انتگرال واگراست، سری نیز واگراست.

بسالخره، اگر $p < 1$ آنگاه جملات p -سری بزرگتر از جملات متناظر سری همساز واگرا هستند. از این رو، p -سری بنا به آزمون مقایسه‌ای واگراست.

پس اگر $p > 1$ ، سری همگراست و به‌ازای هر مقدار دیگر p واگراست. ■

ملاحظه کردید که می‌توانیم آزمونهای مقایسه‌ای را با اطلاعاتی که درباره سریهای هندسی و p -سریهای مختلف داریم، ترکیب کنیم.

آزمون مقایسه‌ای حدی

اکنون شکل قویتری از آزمون مقایسه‌ای را عرضه می‌کنیم که به آزمون مقایسه‌ای حدی موسوم است. این آزمون مخصوصاً وقتی مفید است که در سری مورد نظر، a_n تابع گویایی از n باشد. مثال زیر نشان می‌دهد که منظورمان چیست.

مثال ۶ آیا فکر می‌کنید در موارد زیر $\sum a_n$ همگراست یا واگرا؟ چرا؟

$$a_n = \frac{2n}{n^2 - n + 1} \quad (\text{الف})$$

$$a_n = \frac{2n^2 + 1000n^2 + 1000}{(1/8)n^6 - n + 2} \quad (\text{ب})$$

بحث در تعیین همگرایی یا واگرایی فقط دمها به حساب می‌آیند. و وقتی n خیلی بزرگ است، بزرگترین توانهای n در صورت و مخرج بیش از هر چیزی اهمیت دارند. پس، در مورد (الف) چنین استدلال می‌کنیم

$$a_n = \frac{2n}{n^2 - n + 1}$$

تقریباً مثل $2/n$ رفتار می‌کند و از مقایسه آن با $\sum 1/n$ حدس می‌زنیم $\sum a_n$ واگرا باشد. در مورد (ب) استدلال می‌کنیم

حل:

الف) فرض کنید $a_n = (2n+1)/(n^2+2n+1)$ و $d_n = 1/n$ در این صورت

$$\lim \frac{a_n}{d_n} = \lim \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2 \text{ و اگر است } \sum d_n$$

پس $\sum a_n$ واگراست.

ب) فرض کنید $b_n = n/(n+1)$ در این صورت $\lim b_n = 1 \neq 0$ پس $\sum b_n$ بنسبیه آزمون جمله n ام واگراست.

ب) فرض کنید $a_n = (100+n)/(n^2+2)$ وقتی n بزرگ است، این را باید با $1/n^2 = 1/n^2$ مقایسه کرد، پس فرض می کنیم $c_n = 1/n^2$ حال آزمون مقایسه ای حدی را به کار می بریم

$$\lim \frac{a_n}{c_n} = \lim \frac{n^2+100n^2}{n^2+2} = 1 \text{ و } \sum c_n \text{ همگراست}$$

پس $\sum a_n$ همگراست.

ت) فرض کنید $a_n = 1/(2^n-1)$ و $c_n = 1/2^n$ (استدلال می کنیم که وقتی n بزرگ است، $1-2^n$ نظیر 2^n رفتار می کند). پس

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{2^n}{2^n-1} = \frac{1}{1-(1/2)^n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty \text{ وقتی}$$

چون $\sum c_n$ همگراست، نتیجه می گیریم $\sum a_n$ نیز همگراست.

همچنانکه در مثال زیر می بینید، در استفاده از p -سری برای مقایسه، نکته اساسی این است که p ثابت باشد.

مثال ۸ آیا سری زیر همگراست یا واگرا؟

$$1^{-2} + 2^{-3/2} + 3^{-4/3} + 4^{-5/4} + \dots + n^{-(n+1)/n} + \dots$$

حل: فرض کنید

$$a_n = n^{-(n+1)/n} = \frac{1}{n^{1+(1/n)}}.$$

این کمی شبیه $1/n^p$ با ضابطه $p = 1 + (1/n)$ است که بزرگتر از ۱ است. اما $1 + (1/n)$ ثابت نیست، پس باید در نتیجه گیری محتاط باشیم

$$(n)^{1/n} \rightarrow 1 \text{ و } n^{1+(1/n)} = n(n)^{1/n}, n \rightarrow \infty \text{ وقتی}$$

$$c_n > 0$$

$$\lim \frac{a_n}{c_n} < \infty \quad (9)$$

آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

ب) آزمون داگرایی. اگر به ازای $n \geq n_0$ داشته باشیم $a_n \geq 0$ و سری واگرایی چون $\sum d_n$ وجود داشته باشد به قسمی که $d_n > 0$

$$\lim \frac{a_n}{d_n} > 0 \quad (10)$$

آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

این نتایج را به طور رسمی ثابت نمی کنیم. قسمت (الف) از این مطلب نتیجه می شود که اگر (۹) برقرار باشد، اندیسی چون $N \geq n_0$ و عدد ثابتی چون M وجود دارد به قسمی که وقتی $n > N$ و $a_n < M c_n$ ، $\sum M c_n$ همگراست. همین طور، اگر (۱۰) برقرار باشد، اندیسی چون $N' \geq n_0$ و عدد ثابتی مثل $k > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای $n \geq N'$ ، $a_n > k d_n$ و $\sum k d_n$ واگراست.

قسمتهای (الف) و (ب) در شکل ساده تری از آزمون مقایسه ای حدی به صورت زیر در هم ادغام می شوند.

صورت ساده شده آزمون مقایسه ای حدی

اگر همه جمله های دوسری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ به ازای $n \geq n_0$ مثبت باشند، و حد a_n/b_n متناهی و مثبت باشد، آنگاه یا هر دو سری همگرایند یا هر دو واگرا هستند.

در عمل، اغلب این صورت ساده شده آزمون مقایسه ای حدی را به کار می بریم

مثال ۷ آیا سریهای زیر همگرایند یا واگرا؟

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} \quad \text{الف)}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \quad \text{ب)}$$

$$\frac{101}{3} + \frac{102}{10} + \frac{103}{29} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100+n}{n^2+2} \quad \text{پ)}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1} \quad \text{ت)}$$

يك سری هندسی باشد، این سری به $a/(1-r)$ همگراست اگر $|r| < 1$ ، و واگراست اگر $|r| \geq 1$ مگر اینکه $a = 0$.

۴. آزمون کراندار بودن در مورد سریهای با جملات نامنفی: اگر به ازای هر $n \geq 1$ ، $a_n \geq 0$ ، آنگاه سری $\sum a_n$ همگراست اگر و تنها اگر دنباله مجموعهای جزئی $\{s_n\}$ از بالا کراندار باشد.

۵. الف) آزمون مقایسه‌ای برای همگرایی: اگر $\sum a_n$ سری با جملات نامنفی باشد و سری همگرایی چون $\sum b_n$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر n ، $a_n \leq b_n$ ، آنگاه $\sum a_n$ همگراست. ب) آزمون مقایسه‌ای حدی برای همگرایی: اگر $\sum a_n$ سری با جملات نامنفی باشد و سری همگرایی چون $\sum b_n$ با $\lim(a_n/b_n)$ مثبت وجود داشته باشد به طوری که $\lim(a_n/b_n)$ متناهی باشد، آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

۶. الف) آزمون مقایسه‌ای برای واگرایی: اگر $\sum a_n$ سری با جملات نامنفی باشد و سری واگرایی چون $\sum d_n$ با جملات نامنفی وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر n ، $a_n \geq d_n$ ، آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

ب) آزمون مقایسه‌ای حدی برای واگرایی: اگر $\sum a_n$ سری با جملات نامنفی باشد و سری واگرایی چون $\sum d_n$ با جملات مثبت وجود داشته باشد به طوری که $\lim(a_n/d_n)$ مثبت باشد، آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

۷. صورت ساده شده آزمون مقایسه‌ای حدی: اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سریهایی از اعداد مثبت باشند به طوری که $\lim(a_n/b_n)$ مثبت و متناهی باشد، آنگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرایند.

۸. آزمون انتگرال: فرض کنید $a_n = f(n)$ که در آن، $f(x)$ به ازای هر $x \geq 1$ يك تابع نزولی، مثبت، و پیوسته از x است. در این صورت، سری $\sum a_n$ و انتگرال

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرایند.

مسئله‌ها

در هر يك از مسائل ۱-۲۴، معلوم کنید که سری داده شده همگراست یا واگرا. در هر مورد، برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$$

آزمون مقایسه‌ای حدی را با ضابطه $d_n = 1/n$ به کار می‌بریم. داریم

$$\frac{a_n}{d_n} = \frac{n}{n(n)^{1/n}}$$

$$= \frac{1}{(n)^{1/n}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty \text{ وقتی})$$

می‌دانیم که $\sum d_n$ واگراست، و اگر آزمون مقایسه‌ای حدی را به کار ببریم نتیجه می‌گیریم که $\sum a_n$ نیز واگراست.

مثال ۹. آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)/n^{3/2}$ همگراست؟

حل: فرض کنید $a_n = (\ln n)/n^{3/2}$ و $b_n = n^c/n^{3/2}$ در آن، c ثابت مثبتی کوچکتر از $1/2$ است. مثلاً می‌توانیم c را برابر با $1/4$ اختیار کنیم. حال، $b_n = 1/n^{3/2-c} = 1/n^p$ ، $p = 3/2 - c > 1$ (وقتی $c = 1/4$ ، $p = 5/4$) از این دو $\sum b_n$ همگراست. چون به ازای هر ثابت مثبت c ، $\ln n$ آهسته‌تر از n^c به سمت بینهایت می‌رود (بخش ۳.۱۱، مثال ۸)، این گمان در ذهن ما پدید می‌آید که $\sum a_n$ نیز همگراست. برای بررسی این حدس، آزمون مقایسه‌ای حدی را به کار می‌بریم

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\ln n}{n^c} = \lim \frac{1/n}{cn^{c-1}} \quad (\text{بنا به قاعده هسپیتال})$$

$$= \lim \frac{1}{cn^c} = 0.$$

سری مفروض همگراست.

دقت کنید که در مثال ۹ صورت ساده شده آزمون مقایسه‌ای حدی را به کار نبردیم چون حد a_n/b_n صفر است، و مثبت نیست. در سه بخش آتی، آزمونهای دیگری را برای همگرایی معرفی می‌کنیم ولی ارائه خلاصه‌ای از آنچه تا اینجا آموخته‌ایم مفید است. فهرست کاملتری از آزمونها، به شکل نمودار عمل، در انتهای بخش ۸.۱۱ خواهد آمد. موضوع بر آورد کردن مجموع يك سری همگرا در بخش ۹.۱۱ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

خلاصه آزمونهای همگرایی

۱. تعریف: سری $\sum a_n$ همگراست اگر و تنها اگر دنباله مجموعهای جزئی $\{s_n\}$ ، که به صورت زیر است، همگرا باشد

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

۲. آزمون جمله n ام برای واگرایی: اگر وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $a_n \not\rightarrow 0$ ، سری واگراست.

۳. آزمون سری هندسی: اگر $\sum a_n = a + ar + ar^2 + \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \quad .20$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n \cdot 2^n} \quad .21$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n} \quad .22$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}+1} \quad .23$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)} \quad .24$$

.25 نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$$

واگراست. (داهنمایی: آزمون انتگرال را به کار ببرید.)

.26 p -سری لگاریتمی. فرض کنید p يك ثابت مثبت باشد؛ نشان دهید که

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

همگراست اگر و تنها اگر $p > 1$. (انتگرالگیری از ۱ شروع نمی شود و از ۲ شروع می شود زیرا $\ln 1 = 0$.) در مورد همگرایی یا واگرایی سریهای زیر چه نتیجه ای می توانید بگیرید؟

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1.01}} \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{(\ln n)^2} \quad (\text{پ})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^2)} \quad (\text{ت})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{(n+1)/n}} \quad (\text{ث})$$

.27 ماشین حساب در بر آورد کردن مجموعه های جزئی سری همساز واگرا، نابرابری (۷) با ضابطه $f(x) = 1/x$ می گوید که

$$\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n n}{2^n} \quad .3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n} \quad .4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2} \quad .5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^2} \quad .6$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \quad .7$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad .8$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \quad .9$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n+1} \quad .10$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln n} \quad .11$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}} \quad .12$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} \quad .13$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \quad .14$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \quad .15$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(\ln n)^{10}}{n^{1/2}} \quad .16$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \quad .17$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \quad .18$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad .19$$

و انتگرال

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

رخ می‌دهد. برای بررسی این ایده، گامهای زیر را پیمایید.

الف) در نابرابری (۷) قرار دهید $f(x) = 1/x$ و نشان دهید که

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n$$

یا

$$0 < \ln(n+1) - \ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \leq 1.$$

بنابراین، دنباله

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

از پایین و از بالا کراندار است.

ب) نشان دهید که

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1) - \ln n$$

و با استفاده از این نتیجه نشان دهید که دنباله $\{a_n\}$ در قسمت (الف) نزولی است.

چون دنباله‌ای نزولی که از پایین کراندار باشد همگراست (مسأله ۳۱)، اعداد a_n که در قسمت (الف) تعریف شدند، همگرايند

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \rightarrow \gamma.$$

عدد γ ، که مقدارش $0.5772 \dots$ است، ثابت ادیلر نامیده می‌شود. برخلاف اعداد خاص دیگر نظیر π و e هیچ عبارت دیگری که γ را با فرمولبندی ساده‌ای بیان کند، پیدا نشده است.

۳۵. اعداد اول، دنباله

$$\{p_n\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$$

را تشکیل می‌دهند. می‌دانیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(\ln n)/p_n] = 1$

با استفاده از این مطلب نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{p_n} + \dots$$

و اگر است. (مسأله ۲۶ را ببینید.)

فرض کنید که مجموع، با جمله $s_1 = 1$ درسیزده میلیارد سال قبل (سن تخمینی عالم) شروع شده باشد و از آن زمان هر ثانیه يك جمله به مجموع اضافه شده باشد. انتظار دارید بزرگی s_n امروز چقدر باشد؟

۲۸. سری $\sum_{n=1}^{\infty} (1/nx)$ بدای هیج مقداری از x همگرا نیست. چرا؟

۲۹. نشان دهید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سری همگرایی با جملات نامنفی باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n)$ همگراست.

۳۰. نشان دهید که اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سریهای همگرایی با ضوابط $a_n \geq 0$ و $b_n \geq 0$ باشند، آنگاه $\sum a_n b_n$ همگراست. (داهنجایی: از اندیسی به بعد، $a_n b_n \leq a_n + b_n$.)

۳۱. دنباله‌ای از اعداد چون $\{s_n\}$ که در آن به ازای هر n ، $s_n \geq s_{n+1}$ ، يك دنباله غیرصعودی نامیده می‌شود. دنباله‌ای چون $\{s_n\}$ از پایین کراندار است اگر ثابتی مثلاً M با ضابطه $M \leq s_n$ بدای هر n وجود داشته باشد. چنین عدد M يك کران پایین دنباله نامیده می‌شود. از قضیه ۱۰ نتیجه بگیرید که دنباله‌ای غیرصعودی که از پایین کراندار است، همگراست، و دنباله‌ای غیرصعودی که از پایین کراندار نیست، واگراست.

۳۲. آزمون چگالش کوشی. این آزمون چنین می‌گوید: فرض کنید $\{a_n\}$ يك دنباله غیرصعودی (به ازای هر n ، $a_n \geq a_{n+1}$) از جملات مثبتی باشد که به ۰ همگرا هستند. در این صورت، $\sum a_n$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum 2^n a_{2^n}$ همگرا باشد. مثلاً، $\sum (1/n)$ واگراست چون $(1/2^n) = 1/2^n$ و $\sum 2^n \cdot (1/2^n)$ واگراست. نشان دهید که چرا این آزمون درست است.

۳۳. با استفاده از آزمون چگالش کوشی در مسأله ۳۲، نشان دهید که

$$\text{الف) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \text{ واگراست}$$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر $p > 1$ و واگراست اگر $p \leq 1$.

۳۴. از تصاویری نظیر شکل ۱۲۰۱۱ چنین برمی‌آید که وقتی n افزایش می‌یابد، تغییر بسیار کمی در تفاضل بین مجموع

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

۶.۱۱ سریهای با جملات نامنفی: آزمونهای نسبت و ریشه

آزمونهای همگرایی که مبتنی بر مقایسه یک سری با سری دیگر یا با یک انتگرال هستند، آزمونهای درونی نامیده می‌شوند. این آزمونها خیلی مفیدند ولی به دلایلی باید به جستجوی آزمونهایی پردازیم که شامل چنین مقایسه‌هایی نباشند. در عمل، ممکن است نتوانیم به راحتی سری دیگری یا تابع انتگرالی پیداکنیم که مقایسه را با آن انجام دهیم و علی‌الاصول، تمام اطلاعات مربوط به یک سری مفروض باید در جملات خودش نهفته باشد. پس، حال توجه خود را به آزمونهای درونی معطوف می‌کنیم که فقط با خود سری مورد نظر سروکار دارند.

آزمون نسبت

دو آزمون بعدی، درونی‌اند و کاربردشان آسان است. اولین آزمون، آزمون نسبت است که آهنگ رشد (یا نزول) یک سری را با بررسی نسبت a_{n+1}/a_n می‌سنجد. در مورد سری هندسی، آهنگ رشد، ثابت است و سری همگراست اگر و تنها اگر قدر مطلق نسبت آن کوچکتر از ۱ باشد. در موارد دیگر اگر این نسبت ثابت نباشد، ممکن است بتوانیم یک سری هندسی برای مقایسه پیدا کنیم. این مطلب در مثال زیر روشن می‌شود.

مثال ۱ فرض کنید $a_1 = 1$ و a_{n+1} را به صورت زیر تعریف کنید

$$a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} a_n.$$

آیا سری $\sum a_n$ همگراست یا واگرا؟

حل: در آغاز کار، چند جمله سری را می‌نویسیم

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3} a_1 = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{2}{5} a_2 = \frac{1 \times 2}{3 \times 5}, \quad a_4 = \frac{3}{7} a_3 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3 \times 5 \times 7}.$$

ملاحظه می‌کنیم که هر جمله کمتر از $1/2$ جمله قبل از خود است، زیرا $n/(2n+1)$ کوچکتر از $1/2$ است. بنا بر این، جملات سری مفروض نایبتر از جملات سری هندسی

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$$

هستند که به ۲ همگراست. پس، سری ما نیز همگراست و مجموع آن کوچکتر از ۲ است.

برای اثبات درستی آزمون نسبت، همان‌طور که در مثال بالا عمل کردیم، سری را با سری هندسی مناسبی مقایسه می‌کنیم ولی وقتی این آزمون را به کار می‌بریم، عملاً مقایسه مستقیمی انجام نمی‌دهیم.

آزمون نسبت

فرض کنید $\sum a_n$ سری با جملات مثبت باشد و نیز فرض کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \quad (\text{حرف یونانی } \rho)$$

در این صورت

الف) سری همگراست اگر $\rho < 1$

ب) سری واگراست اگر $\rho > 1$

پ) سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد اگر $\rho = 1$.
(آزمون اطلاعی به دست نمی‌دهد.)

اثبات

الف) ابتدا فرض کنید که $\rho < 1$ و تصور کنید r عددی بین ρ و ۱ باشد. در این صورت، عدد

$$\epsilon = r - \rho$$

مثبت است. چون

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \rho$$

وقتی n به قدر کافی بزرگ باشد، مثلاً به ازای هر $n \geq N$ ، a_{n+1}/a_n باید فاصله‌اش از ρ کمتر از ϵ باشد. پس

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \epsilon = r, \quad n > N$$

یعنی

$$a_{N+1} < r a_N$$

$$a_{N+2} < r a_{N+1} < r^2 a_N$$

$$a_{N+3} < r a_{N+2} < r^3 a_N$$

⋮

$$a_{N+m} < r a_{N+m-1} < r^m a_N.$$

این نابرابریها نشان می‌دهند که جملات سری ما، بعد از جمله a_N ، سریعتر از جملات یک سری هندسی با نسبت $r < 1$ به صفر میل می‌کنند. به زبان دقیقتر، سری $\sum c_n$ را با ضابطه $c_n = a_n$ به ازای $n = 1, 2, \dots, N$ و $c_{N+1} = r a_N$ ، $c_{N+2} = r^2 a_N$ ، \dots ، $c_{N+m} = r^m a_N$ در نظر بگیریم. حال به ازای هر n ،

نتیجه می‌شود

$$a_n \leq c_n$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

و $(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$ از این روابط درقسمتهای (الف) و (ب) مثال استفاده شده است. درقسمت (ب) همچنین از این مطلب که $\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ بهره‌گیری شده است. به کمک ویژگیهای مربوط به حذف فاکتوریلها و توانها، عبارات ساده‌ای برای نسبت a_{n+1}/a_n به دست می‌آید.

مثال ۲ همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را با استفاده از آزمون نسبت بیازمایید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n!}{(2n)!} \quad \text{(الف)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!n!}{(2n)!} \quad \text{(ب)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} \quad \text{(پ)}$$

حل:

(الف) اگر $a_n = n!n!/(2n)!$ ، آنگاه

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+1)!(2n)!}{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2n+2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

این سری همگراست زیرا $\rho = 1/2 < 1$ کوچکتر از ۱ است. (ب) اگر $a_n = 2^n n!n!/(2n)!$ ، آنگاه

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \times \frac{(2n)!}{2^n n!n!}$$

$$= \frac{2(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+2} \rightarrow 1$$

چون این حد عبارت است از $\rho = 1$ ، صرفاً براساس آزمون نسبت نمی‌توان نتیجه گرفت که این سری همگراست یا واگرا. ولی اگر توجه کنیم که $a_{n+1}/a_n = (2n+2)(2n+1)$ ، نتیجه می‌گیریم که a_{n+1} همیشه بزرگتر از a_n است زیرا $(2n+2)(2n+1) > 1$ همیشه بزرگتر از ۱ است. بنابراین، همه جملات ناکمتر از $a_1 = 2$ هستند، و وقتی n به بینهایت می‌گراید، جمله a_n به سمت صفر

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N$$

$$+ r a_N + r^2 a_N + \dots$$

$$= a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1}$$

$$+ a_N(1 + r + r^2 + \dots)$$

چون $|r| < 1$ ، سری هندسی $1 + r + r^2 + \dots$ همگراست، و از این رو $\sum c_n$ نیز همگراست. بنا به آزمون مقایسه، $\sum a_n$ نیز همگراست.

(ب) سپس فرض کنید که $\rho > 1$. در این صورت، از اندیس M به بعد داریم

$$a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \dots \quad \text{یا} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

از این رو، وقتی n بینهایت می‌شود، جملات سری به صفر میل نمی‌کنند، و سری بنا به آزمون جمله n ام واگراست. (پ) و بالاخره، دوسری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

نشان می‌دهند که وقتی $\rho = 1$ ، باید آزمون دیگری برای همگرایی به کار رود.

$$\text{برای } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} :$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

$$\text{برای } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} :$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \rightarrow 1^2 = 1$$

در هر دو مورد، $\rho = 1$ ولی سری اول واگراست در حالی که سری دوم همگراست.

در مواردی که جملات سری متضمن فاکتوریلهایی از عبارات شامل n و یا عباراتی به توان n یا ترکیبات آن هستند، آزمون نسبت غالباً مؤثر واقع می‌شود. چند تا از این موارد را در مثال زیر می‌بینید. به یاد بیاورید که از

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

پس همچنین سری به ازای $0 < x \leq 1$ همگرا و به ازای $x < -1$ واگراست. سری به ازای $x = 0$ همگرا به صفر است. پس تا اینجا دانستیم که سری

به ازای $|x| < 1$ همگرا و به ازای $|x| > 1$ واگراست ولی نمی دانیم که به ازای $|x| = 1$ چه اتفاقی می افتد. برای آزمودن سری در $x = 1$ ، آزمون انتگرال را در مورد سری

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

به کار می بریم که این سری با قرار دادن $x = 1$ در سری اصلی به دست می آید. انتگرال مربوطه این است

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x-1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln(2x-1) \right) \Big|_1^b = \infty.$$

پس وقتی $x = 1$ سری به $+\infty$ واگراست. و وقتی $x = -1$ سری به $-\infty$ واگراست. پس تنها مقادیری از x که به ازای آنها سری مفروض همگراست عبارت اند از $-1 < x < 1$. ■

آزمون ریشه n ام

به سوال «آیا $\sum a_n$ همگراست؟» برمی گردیم. وقتی فرمول ساده ای برای a_n وجود دارد، می توانیم یکی از آزمونهای بالا را به کار ببریم. ولی به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴ فرض کنید $a_n = f(n)/2^n$ که در آن،

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ يك عدد اول باشد} \\ 1 & \text{در غير اين صورت} \end{cases}$$

آیا سری $\sum a_n$ همگراست؟

حل: چند جمله از سری را می نویسیم

$$\sum a_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{64} + \frac{7}{128} + \dots + \frac{f(n)}{2^n} + \dots$$

واضح است که این سری، سری هندسی نیست. وقتی $n \rightarrow \infty$ جمله n ام به صفر میل می کند، لذا مطمئن نیستیم که سری واگرا باشد. آزمون انتگرال نتیجه بخش به نظر نمی رسد. از آزمون نسبت این نتیجه به دست می آید

نمی رود. از این رو، سری بنا به آزمون جمله n ام واگراست.

ب) در مورد سری $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 5)/3^n$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2^{n+1} + 5)/3^{n+1}}{(2^n + 5)/3^n} = \frac{1}{3} \times \frac{2^{n+1} + 5}{2^n + 5} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2 + 5 \times 2^{-n}}{1 + 5 \times 2^{-n}} \right) \rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

این سری همگراست چون $\rho = 2/3 < 1$ است. این بدان معنی نیست که $2/3$ مجموع سری است. در واقع،

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} \\ &= \frac{1}{1 - (2/3)} + \frac{5}{1 - (1/3)} = \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

نکته آزمون نسبت گرچه برای آن نوع سریهایی که اکنون دیدیم مفید است، ولی در مورد سریهایی از نوع p -سری چندان فایده ای ندارد.

در مثال زیر، سری بر حسب توانهای x بیان شده است. با کاربرد آزمون نسبت، خواهیم دید که این سری به ازای چه مقادیری از x همگراست. به ازای آن مقادیر، سری تابعی از x را تعریف می کند. (در فصل ۱۲، این گونه سریها را با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار خواهیم داد.)

مثال ۳ سری زیر به ازای چه مقادیری از x همگراست؟

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

حل: جمله n ام سری این است

$$a_n = \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

ابتدا حالتی را که x مثبت است در نظر می گیریم. در این حالت، سری یک سری مثبت است و

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1} \cdot \frac{2n-1}{x^{2n-1}} = \frac{(2n-1)x^2}{2n+1} \rightarrow x^2.$$

بنابراین، آزمون نسبت می گوید که این سری همگراست اگر x مثبت و کوچکتر از ۱ باشد و واگراست اگر x بزرگتر از ۱ باشد. چون فقط توانهای فرد x در سری ظاهر می شوند، می بینیم که اگر $x = -1$ به جای x قرار گیرد، فقط علامت سری تغییر می کند.

اندیسی چون $N \geq n_0$ هست به قسمی که

$$\sqrt[n]{a_n} < \rho + \epsilon, \quad n \geq N$$

پس این هم درست است که

$$a_n < (\rho + \epsilon)^n, \quad n \geq N$$

حال، $\sum_{n=N}^{\infty} (\rho + \epsilon)^n$ که يك سری هندسی با نسبت $(\rho + \epsilon) < 1$

است، همگراست. بنا به مقایسه، $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگراست که از آن نتیجه

می شود سری زیر نیز همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_{N-1} + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

ب) فرض می کنیم $\rho > 1$. در این صورت، به ازای همه

اندیسه‌های بزرگتر از اندیسی چون M داریم $\sqrt[n]{a_n} > 1$ ، بنابراین به ازای $n > M$ داریم $a_n > 1$ و جملات سری به صفر همگرا نیستند. پس سری بنا به آزمون جمله n ام واگراست.

پ) سریهای $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ نشان می دهند که

این آزمون به ازای $\rho = 1$ جواب قطعی نمی دهد. اولین سری واگرا و دومین سری همگراست، ولی در هر دو مورد، $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$

مثال ۵ در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^n)$ داریم

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

پس سری همگراست.

مثال ۶ در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n/n^2)$ داریم

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow \frac{2}{1^2} = 2.$$

پس سری واگراست.

مثال ۷ در مورد سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - 1/n)^n = 0 + (1/2) + (8/27) + \dots$$

داریم

$$\sqrt[n]{(1 - 1/n)^n} = (1 - 1/n) \rightarrow 1.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{اگر } n \text{ عدد اول باشد و } n+1 \text{ نه} \\ \frac{1}{2n} & \text{اگر } n \text{ يك عدد اول نا كمتراز ۳ باشد} \\ \frac{n+1}{2} & \text{اگر } n+1 \text{ يك عدد اول نا كمتراز ۵ باشد} \end{cases}$$

این نسبت گاهی به صفر نزدیک، گاهی بسیار بزرگ، و گاهی برابر با $1/2$ است. این نسبت، حدی ندارد زیرا تعداد اعداد اول، بینهایت است. آزمونی که به سوال مطرح شده در این مثال پاسخ (مثبت) می دهد، آزمون ریشه n ام است. برای استفاده از این آزمون توجه کنید که

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{f(n)}{2}} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} & \text{اگر } n \text{ يك عدد اول باشد} \\ \frac{1}{2} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پس در این مثال، همیشه درست است که

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

و $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1/2$ (بنا به قضیه ساندویچ در مورد حدها). چون این حد کوچکتر از ۱ است، آزمون ریشه n ام، همان طور که هم اکنون خواهیم دید، می گوید که سری مفروض همگراست.

آزمون ریشه n ام

فرض کنید $\sum a_n$ سری با ضابطه $a_n \geq 0$ به ازای $n \geq n_0$ باشد و نیز تصور کنید که

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \rho.$$

در این صورت

الف) سری همگراست اگر $\rho < 1$

ب) سری واگراست اگر $\rho > 1$

پ) آزمون جواب قطعی نمی دهد اگر $\rho = 1$.

اثبات

الف) فرض می کنیم $\rho < 1$ ، و $\epsilon > 0$ را چنان کوچک

انتخاب می کنیم که $\rho + \epsilon < 1$. چون $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \rho$ ، جملات

$\sqrt[n]{a_n}$ نهایتاً بیشتر از ϵ به ρ نزدیک می شوند. به عبارت دیگر،

مسئله‌ها

درمسئله‌های ۱-۲۶، معلوم کنید که سری مفروض همگراست یا واگرا. برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

$$۱. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$۲. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$$

$$۳. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$$

$$۴. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$$

$$۵. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$$

$$۶. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{125^n}$$

$$۷. \sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$$

$$۸. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$$

$$۹. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$$

$$۱۰. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$۱۱. \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$۱۲. \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2}{n^2}\right)$$

$$۱۳. \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$۱۴. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$۱۵. \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$۱۶. \sum_{n=1}^{\infty} \tan(2^{-n} \ln n)$$

چون $\rho = 1$ ، آزمون ریشه نتیجه بخش نیست. ولی به کمک آزمون جمله n ام برای واگرایی می بینیم که

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n \rightarrow e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

پس سری واگراست.

فهرست آزمونها

برای آزمون همگرایی یا واگرایی سریهای نامتناهی، نه آزمون داریم:

۱. آزمون سری هندسی.
۲. آزمون جمله n ام برای واگرایی (کسه درمورد همه سریها قابل کار برداست).
۳. آزمون «از بالا کراندار بودن» (که درمورد مجموعه‌های جزئی سریهای نامنفی به کار می رود).
۴. الف) آزمون مقایسه‌ای برای همگرایی (سریهای نامنفی به ازای $n \geq n_0$).
ب) آزمون مقایسه‌ای برای واگرایی (سریهای نامنفی به ازای $n \geq n_0$).
۵. الف) آزمون مقایسه‌ای حدی برای همگرایی (برای همان سریهای ۴ الف)).
ب) آزمون مقایسه‌ای حدی برای واگرایی (برای همان سریهای ۴ ب)).
۶. صورت ساده شده آزمون مقایسه‌ای حدی (سریهای مثبت).
۷. آزمون انتگرال (سریهای نزولی مثبت).
۸. آزمون نسبت (سریهای مثبت).
۹. آزمون ریشه n ام (سریهای نامنفی به ازای $n \geq n_0$).

توجه: این آزمونهارا برای مشخص کردن همگرایی یا واگرایی سریهای با جملات نامثبت یا منفی هم می توان به کار برد. کافی است در سری مورد نظر از ۱- فاکتور بگیریم و سری حاصل را که جملاتش نامنفی یا مثبت اند بیازماییم.

مثال ۸ سری زیر واگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} = -1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

مثال ۹

$$\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^n} = -1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 \times 2 = -2.$$

در هر يك از مسأله‌های ۳۳-۴۱، جملات يك‌سری با فرمولهای داده شده تعریف شده‌اند. آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست یا واگرا؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1 + \sin n}{n} a_n \quad .۳۳$$

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+5} a_n \quad .۳۴$$

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n \quad .۳۵$$

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{n} a_n \quad .۳۶$$

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + \ln n}{n} a_n \quad .۳۷$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n + \ln n}{n+10} a_n \quad .۳۸$$

$$a_n = \frac{2^n n! n!}{(2n)!} \quad .۳۹$$

$$a_n = \frac{(3n)!}{n! (n+1)! (n+2)!} \quad .۴۰$$

۴۱. $a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} a_n$, $a_1 = 1$ (دانهایی: چندتا از جملات سری را بنویسید، ببینید چه عاملهایی یکدیگر را حذف می‌کنند، و سپس تعمیم دهید.)

۲.۱۱ همگرایی مطلق

اکنون روشهایی را که برای پاسخ دادن به سؤالات راجع به همگرایی سریهای با جملات نامنفی عرضه کردیم، در مورد سریهایی که هم جملات مثبت و هم جملات منفی دارند، تعمیم می‌دهیم. این تعمیم بر اساس قضیه‌ای میسر می‌شود که می‌گویید اگر یک سری یک‌سری پس از تغییر علامت تمام جملات منفی‌اش همگرا باشد، آن سری همگراست.

قضیه ۱۱

قضیه همگرایی مطلق

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \quad .۱۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2+1}{n^2} \right) \quad .۱۸$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \sin \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad .۱۹$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan \left(\frac{2+n}{n^2+5} \right) \quad .۲۰$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} \quad .۲۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} (n^2) \quad .۲۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{2! n! 3^n} \quad .۲۳$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2}{2^n} \quad .۲۴$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \quad .۲۵$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad .۲۶$$

در مسأله‌های ۲۷-۳۲، همه مقادیری از x را که به ازای آنها سری مفروض همگراست، بیابید. پیشنهاد: ابتدا در جستجوی سری هندسی برآید، سپس آزمون نسبت یا آزمون ریشه n ام را به کار گیرید، و در صورت لزوم از آزمونهای دیگری استفاده کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|nx^n|}{2^n} \quad .۲۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{2n-1}}{2^n} \quad .۲۸$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{2} \right)^n \quad .۲۹$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|x|} \right)^n \quad .۳۰$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n^2} \quad .۳۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n! |2x|^n}{(2n)!} \quad .۳۲$$

اثبات قضیه

برای هر n ،

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

پس

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|.$$

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ همگراست و بنا به آزمون مقایسه‌ای، سری نامنفی

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$$

همگراست. حال، برای $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ به ما امکان می‌دهد که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را به صورت تفاضل دوسری همگرا بنویسیم

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \end{aligned}$$

پس، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

نتیجه واضحی از قضیه ۱۱ (که عکس نقیض این قضیه هم نامیده می‌شود) به صورت زیر است.

نتیجه

اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، $\sum |a_n|$ واگراست.
(مسئله ۱۹ را ببینید).

تعریف

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را مطلقاً همگرا گوئیم اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

اکنون قضیه ۱۱ را می‌توانیم به این صورت بیان کنیم که هر سری مطلقاً همگرا، همگراست. ولی در بخش بعد خواهیم دید که عکس این حکم درست نیست. بسیاری از سریهای همگرا، مطلقاً همگرا نیستند. یعنی، سریهای بسیاری هستند که همگرایی شان به داشتن بینهایت جمله مثبت و منفی که به ترتیب خاصی مرتب شده باشند، بستگی دارد.

در اینجا مثالهایی می‌آوریم که نشان می‌دهند این قضیه در چه مواردی می‌تواند برای تعیین همگرایی به کار رود و در چه مواردی نمی‌تواند.

مثال ۱ سری زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

سری متناظر قدرمطلقها این است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

که همگراست چون يك p -سری با ضابطه $p = 2 > 1$ است (بخش ۵.۱۱). بنا بر این

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

مطلقاً همگراست. پس

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

همگراست.

مثال ۲ سری زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{\sin 3}{9} + \dots$$

سری متناظر قدرمطلقها این است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \frac{|\sin 1|}{1} + \frac{|\sin 2|}{4} + \dots$$

که بر اساس مقایسه با $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ همگراست چون به ازای هر n ، $|\sin n| \leq 1$. سری اصلی مطلقاً همگراست، پس همگرا نیز هست.

مثال ۳ سری زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

سری متناظر قدرمطلقها این است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

که واگراست. از این مطلب هیچ نتیجه‌ای درمورد همگرایی یا واگرایی سری اصلی نمی‌توان گرفت. آزمون دیگری باید یافت. در واقع، سری اصلی همان طور که در بخش بعد خواهیم دید همگراست.

مثال ۴ سری

بیایید اولین ده جمله این سری به صورت زیرند

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512}$$

$$+ \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} - \frac{1}{8192} + \dots$$

قضیه تجدید آرایش می‌گوید که هر دوسری به مقدار واحدی همگرا هستند. در این مثال، اگر ابتدا با سری دوم روبرو می‌شدیم و می‌دانستیم که می‌توان آن را با سری اول معاوضه کرد، بسیار خوشحال می‌شدیم. در این مورد حتی چیزی بهتر از این هم می‌توان گفت مجموع هریک از دوسری با حاصل عبارت زیر نیز برابر است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

(مسأله ۲۳ را ببینید.)

ضرب سریها

تقریباً: غالباً ممکن و مفید است که دوسری را با استفاده از قانون توزیع پذیری درهم ضرب کنیم. برای سهولت نمادگذاری، سری اول را به صورت

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

و سری دوم را به صورت

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (2)$$

و حاصلضرب را به صورت

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots \\ & + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_k b_{n-k} + \dots \\ & + a_n b_0) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

می‌نویسیم. به این ترتیب، هر جمله سری اول به صورت ضربی همراه با هر جمله سری دوم، به شکل $a_k b_{n-k}$ ظاهر می‌شود.

مثال ۶ فرض کنید

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{2^n} \quad (4)$$

و

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{1}{3^n} \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n+1} = -\frac{1}{6} + \frac{2}{11} - \frac{3}{16} + \frac{4}{21} - \dots$$

بنا به آزمون جمله n ام همگرا نیست. پس، بنا به نتیجه قضیه ۱۱، این سری مطلقاً همگرا نیست.

نکته می‌دانیم که اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد، $\sum a_n$ همگراست، ولی در حالت کلی مجموعه‌های این دوسری یکسان نیست. مثلاً

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2^n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-(1/2)} = 2$$

در حالی که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{1}{1+(1/2)} = \frac{2}{3}$$

در واقع، وقتی یک سری $\sum a_n$ مطلقاً همگراست فقط در صورتی می‌توان انتظار داشت $\sum a_n$ با $\sum |a_n|$ برابر باشد که هیچ یک از اعداد a_n منفی نباشد.

مطلب مهم دیگری درباره سریهای مطلقاً همگرا در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۱۲

قضیه تجدید آرایش در مورد سریهای مطلقاً همگرا

اگر $\sum a_n$ مطلقاً همگرا باشد، و $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ آرایش دلخواهی از عناصر دنباله $\{a_n\}$ باشد، آنگاه $\sum b_n$ همگراست و

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(برای ملاحظه کلیات اثبات، مسأله ۲۲ را ببینید.)

مثال ۵ همان طور که در مثال ۱ دیدیم، سری

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2^n}\right) + \dots$$

مطلقاً همگراست. آرایش مجددی از جمله‌های سری می‌تواند به این صورت باشد که سری بایک جمله مثبت شروع شود، بعد ۲ جمله منفی بیاید، آنگاه ۳ جمله مثبت، سپس ۴ جمله منفی، و الی آخر؛ یعنی بعد از k جمله با یک علامت، $k+1$ جمله با علامت مخالف

حاصلضربهایی به شکل $3^n 7^b$ هستند (a و b مستقلاً همه مقادیر صحیح نامنفی را اختیار می کنند) این است

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots\right) \times \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \dots + \frac{1}{7^n} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{1 - (1/3)} \times \frac{1}{1 - (1/7)} = \frac{3}{2} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

در فصل ۱۲ به ضرب سریها بیشتر خواهیم پرداخت.

مسئله‌ها

در هر يك از مسأله‌های ۱-۱۸، معلوم کنید که سری مطلقاً همگراست یا نه. در هر مورد، برای همگرایی یا واگرایی سری متناظر قدرمطلقها دلیل بیاورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad ۱.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n)^3} \quad ۲.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n^2} \quad ۳.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n \quad ۴.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2 + 2n + 1} \quad ۵.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \quad ۶.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}} \quad ۷.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-10}{n} \quad ۸.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad ۹.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad ۱۰.$$

حاصلضربهای موجود در (۳) عبارت اند از

$$a_0 b_0 = 1, \quad a_0 b_1 = \frac{1}{3}, \quad a_1 b_0 = \frac{1}{7}$$

$$a_0 b_2 = \frac{1}{9}, \quad a_1 b_1 = \frac{1}{6}, \quad a_2 b_0 = \frac{1}{49}$$

و به طور کلی، همه جملات به شکل

$$a_k b_{n-k} = \frac{1}{3^k 7^{n-k}}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

قضیه زیر می گوید که مجموع همه این حاصلضربها برابر است با مجموع سری اول یعنی ۲، ضرب بسدر مجموع سری دوم یعنی $3/2$ (هر دوسری، هندسی اند: $r_1 = 1/3$ و $r_2 = 1/2$). از روی نحوه تشکیل جملات سری حاصلضرب می بینیم هر عددی که بر عدد اولی بزرگتر از ۳ تقسیم پذیر نیست دقیقاً يك بار به عنوان مخرج ظاهر می شود. با تجدید آرایش جملات (به کمک قضیه ۱۲) می توان مجموع را به صورت زیر نشان داد

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} \\ & + \frac{1}{24} + \frac{1}{27} + \dots \end{aligned} \quad (۶)$$

مجموع سری (۶)، ۳ است. حال قضیه ۱۳ را (بدون اثبات) بیان می کنیم.

قضیه ۱۳

قضیه ضرب سریها فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سریهایی مطلقاً همگرا باشند. $\sum c_n$ را با معادلات زیر تعریف می کنیم

$$c_0 = a_0 b_0, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (۷)$$

در این صورت، $\sum c_n$ مطلقاً همگراست و

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right). \quad (۸)$$

مثال ۷ مجموع عکسهای اعداد صحیحی که به صورت

اندیسی چون $N_3 \geq N_2$ هست به طوری که اگر $n \geq N_3$ ، آنگاه $\sum_{k=1}^n b_k - s_{N_2}$ حداکثر، مجموع جملاتی به شکل a_n با ضابطه $m \geq N_1$ است. پس، اگر $n \geq N_3$

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k - L \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n b_k - s_{N_2} \right| + |s_{N_2} - L|$$

$$\leq \sum_{k=N_1}^{\infty} |a_k| + |s_{N_2} - L| < \epsilon.$$

۲۳. مطلب زیر را ثابت کنید: اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد و وقتی $\sum b_n$ ، آنگاه $b_n = 0$ ، $a_n < 0$ و وقتی $b_n = a_n$ ، $a_n \geq 0$ همگراست. همین طور $\sum c_n$ ، که در آن $c_n = 0$ اگر $a_n \geq 0$ و $c_n = -a_n$ اگر $a_n < 0$ ، همگراست. به عبارت دیگر، وقتی سری اصلی مطلقاً همگرا باشد، جملات مثبت آن خودشان سری همگرایی تشکیل می‌دهند، و همین طور، جملات منفی آن. و داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

زیرا $b_n = (a_n + |a_n|)/2$ و $c_n = (-a_n + |a_n|)/2$

۲۴. در مثال ۶، که در آن $a_n = 1/2^n$ و $b_n = 1/2^n$ ، فرض کنید همچون رابطه (۳) داشته باشیم

$$c_n = a_n b_n + a_n b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

از آنجا که عدد $a_k b_{n-k}$ نابیشتر از $(1/2)^n$ است، نشان دهید که $c_n \leq (n+1)/2^n$ و ثابت کنید که $\sum c_n$ همگراست. آیا این سری مطلقاً همگراست؟



TOOLKIT PROGRAMS

Sequences and Series

۸.۱۱ سریهای متناوب و همگرایی مشروط

سری که جمله‌های آن به تناوب مثبت و منفی باشند، سری متناوب نامیده می‌شود. در اینجا سه نمونه از سری متناوب را می‌بینید

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots \quad (1)$$

$$-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n 2^n}{2^n} + \dots \quad (2)$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{n-1} n + \dots \quad (3)$$

آیا این سریها همگرا هستند یا واگرا؟

سری (۱)، موسوم به سری همساز متناوب، چنانکه به زودی

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \quad ۱۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2^n} \quad ۱۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (5)^{-n} \quad ۱۳$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - 1 \right) \quad ۱۴$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!} \quad ۱۵$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\ln n^2} \quad ۱۶$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n^2} \quad ۱۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) \quad ۱۸$$

۱۹. نشان دهید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ واگراست.

۲۰. نشان دهید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقاً همگرا باشد، آنگاه

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

۲۱. نشان دهید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ هر دو مطلقاً همگرا باشند،

سریهای زیر نیز چنین هستند

$$\sum (a_n + b_n) \quad \text{الف}$$

$$\sum (a_n - b_n) \quad \text{ب}$$

$$\sum k a_n \quad \text{پ (عدد دلخواه } k \text{)}$$

۲۲. قضیه ۱۲ را ثابت کنید. کلیات اثبات: فرض قضیه را در نظر بگیرید. تصور کنید $\epsilon > 0$. نشان دهید اندیسی چون N_1 وجود دارد به قسمی که

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

و اندیسی چون $N_2 \geq N_1$ موجود است به طوری که

$$|s_{N_2} - L| < \epsilon/2 \quad \text{که در آن } s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

چون همه جملات a_1, a_2, \dots, a_{N_2} درجهایی از دنباله $\{b_n\}$ ظاهر می‌شوند،

کراندار است، دارای يك حد است، مثلاً

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = L. \quad (۶)$$

اگر n عدد صحیح فردی باشد، مثلاً $n = 2m + 1$ ، آنگاه مجموع n جمله اول این است

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}.$$

چون $a_n \rightarrow 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = 0$$

و وقتی $m \rightarrow \infty$

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1} \rightarrow L + 0 = L. \quad (۷)$$

اگر نتایج (۶) و (۷) را باهم ترکیب کنیم خواهیم داشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L.$$

مثالهای زیر کاربرد قضیه ۱۴ را نشان می دهند.

مثال ۱ سری همساز متناوب

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

در سه شرط قضیه صدق می کند. بنابراین، همگراست. این سری به طور مشروط همگراست زیرا سری متناظر قدر مطلقها، سری همساز است که واگراست.

مثال ۲ سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{n} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \dots$$

بنابراین آزمون جمله n ام واگراست. این سری در شرطهای ۲ و ۳ قضیه لایب نیتس صدق نمی کند.

مثال ۳ قضیه ۱۴ اطلاعی درباره

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + \dots$$

بما نمی دهد. دنباله $2/1, 1/1, 2/2, 1/2, 2/3, 1/3, \dots$ يك دنباله یکنوا نیست. آزمون دیگری باید یافت. اگر جمله های سری را به صورت جفت هایی از عناصر متوالی دسته بندی کنیم

خواهیم دید همگراست؛ ولی همگرایی اش مطلق نیست زیرا سری متناظر قدر مطلقها عبارت است از سری همساز زیر

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

که می دانیم واگراست. يك چنین سری که همگراست ولی همگرایی اش مطلق نیست، به طور مشروط همگرا نامیده می شود. سری (۲) يك سری هندسی با نسبت $r = -1/2$ است. می دانیم که این سری همگراست و مجموعش، $-2/3$ است. این سری مطلقاً همگرا نیز هست زیرا سری متناظر قدر مطلقهايش این است

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

سری (۳) واگراست زیرا جمله n ام به صفر میل نمی کند.

همگرایی سری متناوب را می توان با استفاده از يك نتیجه کلیتر، معروف به قضیه لایب نیتس، ثابت کرد.

قضیه ۱۴

قضیه لایب نیتس

سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \quad (۴)$$

همگراست اگر هر سه شرط زیر برقرار باشند

۱. همه a_n ها مثبت باشند.

۲. به ازای همه n ها، $a_n \geq a_{n+1}$.

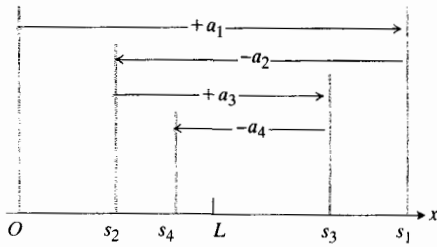
۳. $a_n \rightarrow 0$.

اثبات اگر n يك عدد صحیح زوج باشد، مثلاً $n = 2m$ ، آنگاه مجموع n جمله اول این است

$$\begin{aligned} S_{2m} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots \\ &\quad - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}. \end{aligned} \quad (۵)$$

اولین برابری نشان می دهد که S_{2m} مجموع m جمله نامنفی است زیرا عبارت داخل هر پرانتز مثبت یا صفر است. از این رو $S_{2m+2} \geq S_{2m}$ و دنباله $\{S_{2m}\}$ غیر نزولی است. برابری دوم نشان می دهد که $S_{2m} \leq a_1$. چون $\{S_{2m}\}$ غیر نزولی و از بالا

خواهیم داشت



۱۴۰۱ مجموعه‌های جزئی یک سری متناوب که در فرضهای قضیه لایب‌نیتس صدق می‌کند، حدشان را در میان می‌گیرند.

را مشخص می‌کنیم. چون $a_3 \leq a_2$ ، میزان پیش رفتن ما از طول گام قبلی بیشتر نیست؛ یعنی $s_3 \leq s_2$. به این رفت و برگشت ادامه می‌دهیم و با توجه به علامات جمله‌های سری عقب یا جلو می‌رویم. ولی در هر گام به پیش یا به پس، طول گام کوتاه‌تر از (یا حداکثر مساوی با) طول گام قبلی است چون $a_n \leq a_{n+1}$ و چون وقتی n افزایش می‌یابد جمله n ام به صفر میل می‌کند، طول گامی که به جلو یا به عقب برمی‌داریم کوچک و کوچک‌تر می‌شود. پس ما حول حد L نوسان می‌کنیم ولی دامنه نوسان دائماً کاهش می‌یابد و به حد صفر میل می‌کند. مجموعه‌های جزئی شماره زوج، s_2, s_4, s_6, \dots دائماً به سمت L افزایش می‌یابند درحالی‌که مجموعه‌های جزئی شماره فرد، s_1, s_3, s_5, \dots دائماً به سمت L کاهش می‌یابند. حد L بین هر دو مجموع متوالی s_n و s_{n+1} قرار دارد و از این رو اختلاف s_n با s_{n+1} مقداری است کمتر از a_{n+1} . به دلیل برقراری رابطه زیر

$$|L - s_n| < a_{n+1}, \quad \text{به ازای هر } n \quad (A)$$

می‌توانیم برآوردهای مفیدی از مجموعه‌های سریهای متناوب همگرا به دست آوریم.

قضیه ۱۵

قضیه برآورد مجموع سری متناوب

انگرسری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

سری متناوبی باشد که در سه شرط قضیه لایب‌نیتس صدق کند، آنگاه

$$s_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n$$

مجموع سری L را با خطایی که قدرش کمتر از a_{n+1}

$$\left(\frac{2}{1}-\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right) + \dots$$

می‌بینیم که $2n$ امین مجموع جزئی سری مفروض و n امین مجموع جزئی سری همساز، مقدار واحدی دارند. پس دنباله مجموعه‌های جزئی، در نتیجه سری، واگراست. ■

مثال ۴ آیا سری $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (\ln n)/(n+1)$ همگراست؟

گرچه واضح است که این سری متناوب است و $a_n = (\ln n)/(n+1)$ وقتی $n \rightarrow \infty$ به ۰ میل می‌کند، ولی در اولین نظر واضح نیست که $a_n \geq a_{n+1}$ تابع متناظر

$$f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$$

را در نظر می‌گیریم که مشتقش این است

$$f'(x) = \frac{(x+1)/x - \ln x}{(x+1)^2}.$$

این مشتق منفی است، و اگر $\ln x$ بزرگتر از $x/(x+1)$ باشد، تابع f نزولی است. به ازای $x = 1, 2, \dots$ داریم $1 + (1/x) \leq 2$ ، پس وقتی $\ln n > 2$ ، دنباله نزولی است. چون $e^2 \approx 7.4$ ، نتیجه می‌گیریم که دنباله اصلی به ازای $n \geq 8$ نزول می‌کند. یعنی، می‌توانیم با استفاده از قضیه لایب‌نیتس نتیجه بگیریم که $\sum_{n=8}^{\infty} (-1)^n (\ln n)/(n+1)$ همگراست. بنابراین،

سری اصلی نیز همگراست. ■

تعبیر نموداری زیر از مجموعه‌های جزئی را به کار می‌بریم تا در این باره بصیرت بیشتری به دست آوریم که یک سری متناوب، وقتی در سه شرط قضیه صدق می‌کند، چگونه به حلدی چون L همگراست. از مبدأ O روی محور اعداد حقیقی (شکل ۱۴۰۱) به اندازه فاصله مثبت

$$s_1 = a_1$$

پیش می‌رویم. برای یافتن نقطه متناظر با

$$s_2 = a_1 - a_2$$

بایستی به اندازه a_2 به عقب برگردیم. چون $a_2 \leq a_1$ ، در این برگشت از O دورتر نمی‌رویم. سپس مسافتی به اندازه a_3 پیش می‌رویم و نقطه متناظر با

$$s_3 = a_1 - a_2 + a_3$$

اول این سری چه تقریب خوبی از $\ln(1+x)$ می توان به دست آورد.

مثال ۶ $\ln(1.1)$ را با استفاده از تقریب

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} \quad (11)$$

حساب کنید و خطای محاسبه را برآورد کنید. آیا در این مورد، $x - (x^2/2)$ خیلی بزرگ است یا خیلی کوچک؟

حل:

$$\ln(1.1) \approx (0.1) - \frac{(0.1)^2}{2} = 0.095.$$

تفاوت این تقریب با مقدار دقیق $\ln 1.1$ کمتر از

$$\frac{(0.1)^3}{3} = 0.000333...$$

است. چون علامت این عدد، اولین جمله به کار نرفته، مثبت است، باقیمانده مثبت است یعنی $0.09533 < \ln 1.1 < 0.095$.

مثال ۷ چند جمله از سری (۱۰) را باید به کار ببریم تا مطمئن شویم که خطا در محاسبه $\ln(1.2)$ کمتر از 10^{-6} است؟

حل:

$$\ln(1.2) = (0.2) - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{3} - \dots$$

با آزمایش درمی یابیم که جمله هشتم

$$-\frac{(0.2)^8}{8} = -3.2 \times 10^{-7}$$

اولین جمله سری است که قدر مطلقش کوچکتر از 10^{-6} است. پس مجموع هفت جمله اول، مقدار $\ln(1.2)$ را با خطایی کمتر از 10^{-6} به دست می دهد. استفاده از جملات بیشتر، تقریب بهتری به دست خواهد داد، ولی هفت جمله اول برای تأمین دقتی که ما می خواهیم کافی است. به علاوه، توجه کنید که ما نشان نداده ایم که با استفاده از شش جمله، این دقت به دست نمی آید.

هشدار درباره تجدید آرایش: اگر آرایش تعدادی نامتناهی از جملات یک سری به طور مشروط همگرا را تغییر دهیم، ممکن است نتایجی به دست آوریم که بسیار متفاوت با مجموع سری اصلی باشند. مثال زیر، برخی از اتفاقات ممکن را نشان می دهد.

مقدار عددی اولین جمله به کار نرفته است تقریب می زند. به علاوه، علامت $s_n - s$ با علامت اولین جمله به کار نرفته یکی است.

تعیین علامت باقیمانده را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم (مسئله ۳۷ را ببینید).

مثال ۵ ابتدا قضیه برآورد را در مورد یک سری متناوب که مجموعش را می دانیم، یعنی سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \dots$$

می آزمایشیم. بنا به قضیه ۱۵ اگر این سری را از جمله هشتم به بعد ببریم، مجموعی را که مثبت و کوچکتر از $1/256$ است کنار گذاشته ایم. محاسبه سری نشان می دهد که مجموع هشت جمله اول این است

$$0.6640625.$$

مجموع سری این است

$$\frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}. \quad (9)$$

تفاضل

$$\frac{2}{3} - 0.6640625 = 0.0026041666...$$

مثبت است و کوچکتر از

$$\frac{1}{256} = 0.00390625.$$

سری مربوط به $\ln(1+x)$

در فصل ۱۲ نشان خواهیم داد که یک سری برای محاسبه $\ln(1+x)$ وقتی $|x| < 1$ به صورت زیر است

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \dots \quad (10)$$

این سری به ازای $0 < x < 1$ در هر سه شرط قضیه ۱۴ صدق می کند، و به کمک قضیه برآورد می توان دید که از روی پنج جمله

مثال ۸ سری همساز متناوب زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \dots$$

در اینجا، سری جملات $\sum 1/(2n-1)$ و اگر $+\infty$ و سری جملات $\sum -1/2n$ و اگر $-\infty$ است. همیشه می‌توانیم به تعداد کافی جمله مثبت اختیار کنیم (مهم نیست که در دنباله جمله‌های شماره فرد، از کجا شروع کنیم) تا مجموعی به دست آوریم که به قدر دلخواه بزرگ باشد. همین‌طور، در مورد جمله‌های منفی، صرف نظر از اینکه از کجا شروع کنیم، می‌توانیم به تعداد کافی جمله‌های شماره زوج متوالی را جمع کنیم تا مجموعی منفی به دست آوریم که قدر مطلقش به قدر دلخواه بزرگ باشد. اگر بخواهیم چنین کاری بکنیم، مثلاً می‌توانیم شروع به جمع کردن جمله‌های شماره فرد کنیم تا وقتی که مجموعی برابر با $3+$ به دست آوریم و سپس به تعداد کافی جملات منفی متوالی اضافه کنیم تا مجموع جدید، $4-$ شود و بعد می‌توانیم به تعداد کافی جمله مثبت بیفزاییم تا مجموع بزرگتر از $5+$ شود، و به دنبالش از جملات منفی به کار نرفته متوالی اضافه کنیم تا مجموع جدید $6-$ گردد، والی آخر. به این ترتیب، می‌توانیم نوسانات را در هر دو جهت مثبت و منفی به قدر دلخواه بزرگ کنیم.

امکان دیگری که در مورد همین سری وجود دارد، تمرکز روی یک حد خاص است. فرض کنید سعی می‌کنیم مجموعه‌هایی به دست آوریم که به 1 همگرا باشند. با جمله اول، $1/1$ ، شروع می‌کنیم، بعد $1/2$ را از آن کم می‌کنیم، سپس $1/3$ و $1/5$ را می‌افزاییم که باعث می‌شود مجموع دوباره 1 یا بیشتر شود. آنگاه جمله‌های منفی متوالی را اضافه می‌کنیم تا وقتی که مجموع کوچکتر از 1 شود. به همین نحو ادامه می‌دهیم: وقتی مجموع کمتر از 1 است، جمله‌های مثبت را اضافه می‌کنیم تا وقتی که مجموع 1 یا بیشتر شود. این فرایند را می‌توان به طور نامتناهی ادامه داد. چون هم جملات شماره فرد و هم جملات شماره زوج سری اصلی وقتی $n \rightarrow \infty$ به صفر میل می‌کنند. میزانی که مجموعه‌های جزئی مسا به آن میزان بیشتر یا کمتر از 1 اند، به صفر میل می‌کند. بنابراین سری جدید به 1 همگراست. سری با آرایش جدید به این صورت شروع می‌شود

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} \\ &+ \frac{1}{17} - \frac{1}{10} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{12} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{14} \\ &+ \frac{1}{27} - \frac{1}{16} + \dots \end{aligned}$$

وضعی که در این مثال دیدید، نمونه‌ای است از آنچه که در مورد

هر سری به طور مشروط همگرا می‌تواند پیش آید. نتیجه اخلاقی: جملات چنین سری را به همان ترتیب مفروض با هم جمع کنید.

مسئله‌ها

در مسئله‌های ۱-۱۰، معلوم کنید کدام سری متناوب همگرا و کدام واگراست.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n!}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{2/3}}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\ln n^2}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

در هر یک از مسئله‌های ۱۱-۲۸، معلوم کنید که سری داده شده مطلقاً همگراست یا به طور مشروط همگراست و یا اینکه واگراست.

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (0.1)^n$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} \quad ۰۱۴$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{10^n} \quad ۰۳۰$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+3} \quad ۰۱۵$$

$$\ln(1001) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0.001)^n}{n} \quad ۰۳۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n^2} \quad ۰۱۶$$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad 0 < t < 1 \quad ۰۳۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n} \quad ۰۱۷$$

در هر يك از مسأله‌های ۳۳ و ۳۴، مجموع را تا پنج رقم اعشار تقریب بزنید (بزرگی خطا کوچکتر از $10^{-6} \times 5$).

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n^n} \quad ۰۱۸$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \quad ۰۳۳$$

(این $\cos 1$ است، کسینوس يك راديان)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1+n}{n^2} \quad ۰۱۹$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \quad ۰۳۴$$

(این $1/e$ است.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n} \quad ۰۲۰$$

۰۳۵ الف سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (2/3)^n \quad ۰۲۱$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} + \dots$$

یکی از شرطهای قضیه ۱۴ را برآورده نمی‌سازد. کدام يك را؟
(ب) مجموع سری (الف) را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{10}) \quad ۰۲۲$$

۰۳۶ حد L يك سری متناوب که در شرطهای قضیه ۱۴ صدق می‌کند بین مقادیر هردو مجموع جزئی متوالی قرار دارد. این مطلب، الهامبخش استفاده از متوسط

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tan^{-1} n}{n^2 + 1} \quad ۰۲۳$$

$$\frac{s_n + s_{n+1}}{2} = s_n + \frac{1}{2} a_{n+1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n} \quad ۰۲۴$$

برای برآورد L است. مطلوب است محاسبه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right) \quad ۰۲۵$$

$$s_{20} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{21}$$

به‌عنوان تقریبی از مجموع سری همساز متناوب. مجموع دقیق عبارت است از $\ln 2 = 0.693100 \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0.1)^n}{n} \quad ۰۲۶$$

۰۳۷ نشان دهید که هر وقت يك سری متناوب با یکی از مجموعه‌های جزئی‌اش تقریب‌زده می‌شود، اگر سه شرط قضیه لایب‌نیتس صادق باشند، علامت باقیمانده (مجموع جمله‌های به‌کاررفته) با علامت اولین جمله به‌کاررفته یکی است. (دانه‌جایی: جمله‌های باقیمانده را در جفتهای متوالی دسته‌بندی کنید.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad ۰۲۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n!)^2}{(2n)!} \quad ۰۲۸$$

در هر يك از مسأله‌های ۲۹-۳۲، اگر چهارجمله برای تقریب‌زدن سری به‌کار رود، بزرگی خطا را برآورد کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad ۰۲۹$$

۰۳۸ نشان دهید که مجموع $2n$ جمله اول سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

۴۱. ماشین حساب فرض کنید در مثال ۸ هدف این باشد که جمله‌ها را به نحوی آرایش دهیم که سری جدیدی همگرا به $1/2$ — به دست آید. آرایش جدید جمله‌ها را با اولین جمله منفی شروع کنید. هر وقت مجموعی دارید که نایبتر از $1/2$ — است، شروع به وارد کردن جمله‌های مثبت، به ترتیب، کنید تا وقتی که مجموع جدید بزرگتر از $1/2$ — شود. آنگاه جمله‌های منفی را اضافه کنید تا وقتی که مجموع دوباره نایبتر از $1/2$ — شود. این فرایند را تا زمانی که مجموعه‌های جزئی شما دست کم سه بار بالاتر از هدف قرار گیرند ادامه دهید و در این مقدار یا کمتر از آن، فرایند را متوقف کنید. اگر s_n مجموع n جمله اول سری جدید شما باشد، نقاط (n, s_n) را مشخص کنید و رفتار مجموعه‌ها را نشان دهید.

برابر است با مجموع n جمله اول سری

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots$$

آیا این سریها همگرا هستند؟ مجموع $2n+1$ جمله اول سری اول چیست؟ اگر این سریها همگرا هستند، مجموعشان چیست؟

۳۹. با ذکر مثال نشان دهید که ممکن است $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ هر دو

همگرا باشند ولی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ واگرا باشد.

۴۰. نشان دهید که سری متناوب

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

واگراست. این سری در کدام يك از شرطهای قضیه لایب نیتس صدق نمی‌کند؟ (دانهمایی: ابتدا نشان دهید که

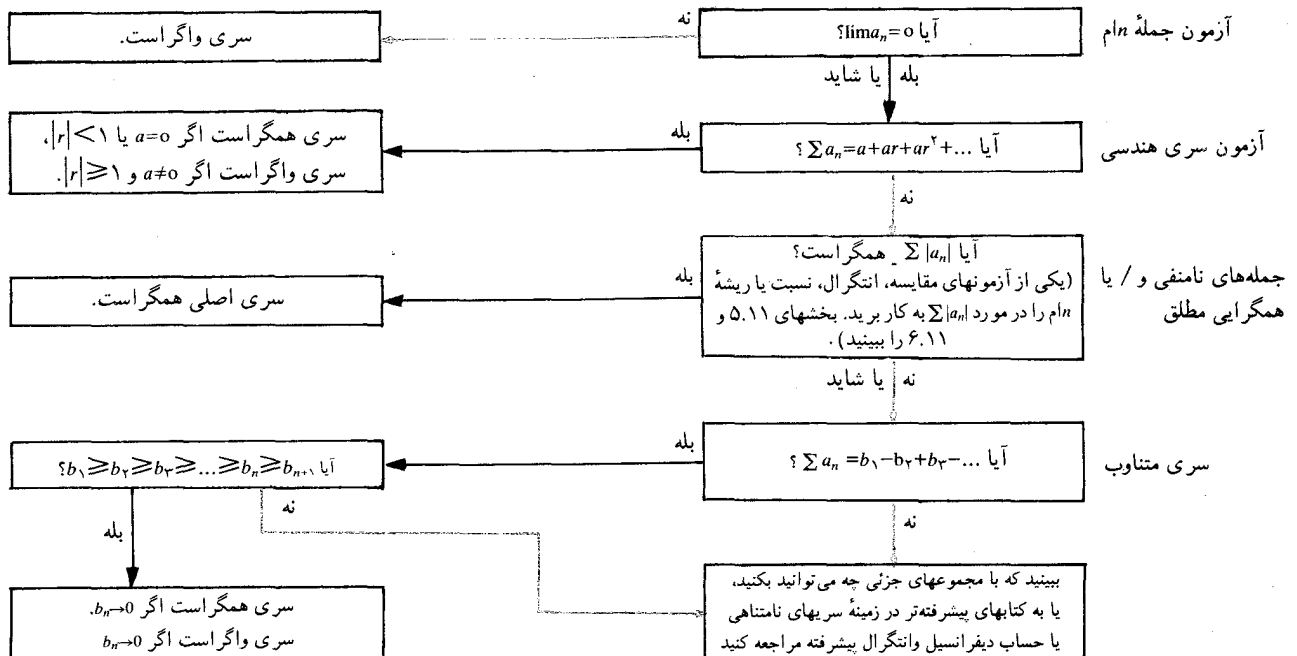
$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$$

و سری مفروض را به صورت تفاضل دوسری بنویسید که یکی از آنها همگرا و دیگری واگرا باشد. برای همگرایی یا واگرایی هر يك، دلیل بیاورید.)

TOOLKIT PROGRAMS
Sequences and Series

۹.۱۱ مرور

اکنون چندین آزمون برای همگرایی یا واگرایی يك سری در دست داریم، و يك نمودار عمل (شکل ۱۵.۱۱) عرضه می‌کنیم که نشان می‌دهد این آزمونها را چگونه می‌توان به کار برد. اما چنین نموداری نمی‌تواند جانشین قضاوت خوب شود. مثلاً، اگر سری متناوبی دارید که در شرطهای قضیه لایب نیتس صدق می‌کند، تکلیف مسأله معلوم است و نیازی نیست که از بالای نمودار شروع کنید و تا



ولی وقتی $n \rightarrow \infty$ به ۱ میل می کند، چند جمله سری را با استفاده از فرمول بازگشت $a_{n+1} = (n/(n+2))a_n$ می نویسیم

$$n=1: a_2 = \frac{1}{3} a_1 = \frac{4}{3}$$

$$n=2: a_3 = \frac{2}{4} a_2 = \frac{4 \times 2}{3 \times 4}$$

$$n=3: a_4 = \frac{3}{5} a_3 = \frac{4 \times 2 \times 3}{3 \times 4 \times 5} = \frac{4 \times 2}{2 \times 5}$$

$$n=4: a_5 = \frac{4}{6} a_4 = \frac{4 \times 2 \times 3 \times 4}{3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{4 \times 2}{5 \times 6}$$

ملاحظه می کنیم که به ازای $n=3, n=4, n=5$ و جمله ها در فرمول زیر صدق می کنند

$$a_n = \frac{4 \times 2}{n(n+1)}$$

در واقع این فرمول به ازای $n=1$ و $n=2$ هم برقرار است و با استقرای ریاضی می توانیم نشان دهیم که به ازای همه n ها برقرار است. پس سری مورد نظر ما به صورت $\sum (4 \times 2) / (n(n+1))$ است و این سری همگراست چون جمله های آن همگی کوچکتر از جمله های متناظر سری $\sum 1/n^2$ هستند که همگراست. (در حقیقت در یکی از مثالهای قبلی نشان دادیم که $\sum 1/(n(n+1)) = 1$ ؛ از این رو، سری ما به ۸ همگراست.) ■

مسئله ها

در مسئله های ۱-۲۰، معلوم کنید $\sum a_n$ همگراست یا نه.

$$1. a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$$

$$2. a_n = \frac{2^n n! n!}{(2n)!}$$

$$3. a_1 = 1, a_{n+1} = -\frac{n}{n+1} a_n$$

$$4. a_n = n! / n^n$$

$$5. a_n = n^n / n!$$

$$6. a_1 = 2, a_{n+1} = (a_n)^{1/n}$$

$$7. a_n = n^2 / 2^n$$

پایین بیایید. همین طور، اگر سری یک سری هندسی یا p -سری باشد، احتمالاً این موضوع را تشخیص می دهید و می دانید سری جدید همگراست یا واگرا.

کلمه شاید در جاهایی از نمودار آمده که پاسخ به سؤال مطرح شده ممکن است واضح نباشد. مثلاً، اگر $\lim a_n = 3^n n! n! (2n)!$ ، آیا می توانید به سرعت بگویید $\lim a_n$ برابر صفر است یا نه؟ اگر در عبارت مربوط به a_n نما یا فاکتوریل وجود داشته باشد، معمولاً بهتر است مستقیماً به سراغ آزمون نسبت بروید. در این مورد، با مختصری عملیات جبری معلوم می شود که $a_{n+1}/a_n = 3(n+1)/(2n+2)$ و حد این نسبت، $3/2$ است. بنابراین، سری $\sum a_n$ همگراست و حال می دانیم که $\lim a_n = 0$. وقتی آزمون نسبت را در مورد $\sum |a_n|$ به کار می بریم، اگر به ازای هر n داشته باشیم $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ ، آنگاه $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ و جمله ها وقتی $n \rightarrow \infty$ به صفر میل نمی کنند: سری واگراست.

آزمون نسبت و آزمون ریشه n ام گاهی از یک میزان کارایی برخوردار هستند. بد نیست گهگاه برای تمرین خط مشی خود را تغییر دهید و ببینید کدام یک از این دو آزمون را ترجیح می دهید. مثلاً، اگر $a_n = n/2^n$ ، آنگاه

$$\text{وقتی } n \rightarrow \infty, \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

و

$$\text{وقتی } n \rightarrow \infty, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

بنابراین هر دو آزمون، $\sum a_n$ همگراست. اگر پرسید «کدام آزمون را باید به کار ببرم؟» پاسخ می دهیم «هر کدام که اول به ذهنتان رسید، ولی به یکی چنان اتکا نکنید که دیگری نادیده گرفته شود.»

وقتی جمله های یک سری به وسیله یک فرمول بازگشت تعریف می شوند، ممکن است تعیین موضوع همگرایی مستقیماً و با استفاده از آزمون نسبت میسر باشد. مثلاً، اگر $a_1 = 1$ و به ازای هر $n \geq 1$ داشته باشیم $a_{n+1} = (3/4)a_n$ ، آنگاه $a_{n+1}/a_n = 3/4$ یک مقدار ثابت است. این سری یک سری هندسی با نسبت $|r| < 1$ است، پس همگراست. اگر نسبت a_{n+1}/a_n با n تغییر کند، همواره کمتر از ۱ است و وقتی $n \rightarrow \infty$ به حد ۱ میل می کند، پس بهترین کار این است که چند جمله از این سری را بنویسیم.

مثال فرض کنید که $a_1 = 4$ و $a_{n+1} = (n/(n+2))a_n$. آیا $\sum a_n$ همگراست؟

حل: چون نسبت $a_{n+1}/a_n = n/(n+2)$ کمتر از ۱ است

چون به ازای ثابتی مثل M داریم $|t_k| < M$ ، سری $\sum_{k=1}^{\infty} t_k/k(k+1)$ مطلقاً همگراست و s_{2n+1} وقتی $n \rightarrow \infty$ دارای حد است. بالاخره، اگر $s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} c_k/k$ ، آنگاه $s_{2n+1} - s_{2n} = c_{2n+1}/(2n+1)$ و وقتی $n \rightarrow \infty$ به صفر میل می‌کند زیرا $|c_{2n+1}| = |t_{2n+1} - t_{2n}| < 2M$. پس، دنباله مجموعهای جزئی سری $\sum c_k/k$ همگراست و حد، $(\sum_{k=1}^{\infty} t_k/(k(k+1)))$ است.

ب) نشان دهید که قضیه بالا چگونه در مورد سری همساز متناوب زیر به کار می‌رود

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

پ) نشان دهید که سری

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots$$

همگراست. (پس از جمله اول، علامتها دوتا منفی، دوتا مثبت، دوتا منفی، دوتا مثبت، و الی آخر، است.)

۱۰.۱۱ □ برآورد کردن مجموع سری با جمله‌های مثبت

حال باز می‌گردیم به سوالی که قبلاً مطرح شد: اگر یک سری همگرا باشد، مجموعش چیست؟ معمولاً، مجموع را تنها تا چند رقم اعشاری می‌توان تعیین کرد و تعداد ارقام اعشاری بستگی به ظرفیت ابزار محاسبه‌ای دارد که به کار می‌بریم. در هر برآوردی که به دست می‌آوریم، دو نوع خطا ممکن است وجود داشته باشد: (۱) خطای برش و (۲) خطای گرد کردن.

خطاهای برش اگر مجموع یک سری، S باشد، مجموعهای جزئی به حد S میل می‌کنند

$$\lim s_n = S$$

که در آن s_n مجموع n جمله اول سری است. از لحاظ نظری، این بدان معنی است که به ازای هر $\epsilon > 0$ ، شاخصی چون N وجود دارد به طوری که

$$|s_n - S| < \epsilon, \quad n > N$$

اگر خطای گرد کردن در کار نمی‌بود، درجه دقت مطلوب را می‌توانستیم به این طریق تعیین کنیم که ϵ را مشخص کرده سپس s_n را به عنوان تقریبی از S ، با انتخاب دلخواه $n > N$ ، به کار ببریم.

$$a_n = 2^n/n^2 \quad ۰.۸$$

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \quad ۰.۹$$

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n \quad ۰.۱۰$$

$$a_n = 2, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n \quad ۰.۱۱$$

$$a_n = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n \quad ۰.۱۲$$

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(1+a_n)} \quad ۰.۱۳$$

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = na_n \quad ۰.۱۴$$

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = na_n \quad ۰.۱۵$$

$$a_1 = 10, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n} \quad ۰.۱۶$$

$$a_n = 1 \text{ اگر } n \text{ فرد باشد, } a_n = -1 \text{ اگر } n \text{ زوج باشد.} \quad ۰.۱۷$$

$$a_n = 1/2^n \text{ اگر } n \text{ فرد باشد, } a_n = -n/2^n \text{ اگر } n \text{ زوج باشد.} \quad ۰.۱۸$$

$$a_n = \frac{\sin n}{n^2} \quad ۰.۱۹$$

$$a_n = \frac{2n+3}{n^2+2} \quad ۰.۲۰$$

$$۰.۲۱ \text{ الف) قضیه زیر را ثابت کنید: اگر } \{c_n\} \text{ دنباله‌ای از اعداد}$$

باشد به قسمی که هر مجموع $t_n = \sum_{k=1}^n c_k$ کراندار باشد،

آنگاه سری $\sum c_n/n$ همگرا و برابر $\sum t_n/(n(n+1))$ است.

(کلیات اثبات: t_1 را به جای c_1 و $t_n - t_{n-1}$ را با ضابطه

$$s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} c_k/k \text{ اگر قرار دهید. اگر } n \geq 2 \text{ به جای } c_n$$

نشان دهید که

$$s_{2n+1} = t_1 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + t_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$+ \dots + t_{2n} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{t_{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{t_k}{k(k+1)} + \frac{t_{2n+1}}{2n+1}$$

از $x=n$ تا $x=\infty$ برآورد کنیم. با توجه به شکل ۱۶.۱۱ آشکار است که

$$R_n < \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n}.$$

این رابطه حاکی است که اگر ۲۰۰ جمله سری را اختیار کنیم، می‌توانیم مطمئن باشیم که تفاضل بین مجموع کل سری، S ، و مجموع این ۲۰۰ جمله، S_{200} ، کمتر از $1/200 = 0.005$ خواهد بود.

با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای برای تقریب زدن مساحت زیرخم در شکل ۱۶.۱۱، برآورد دقیقتری از R_n به دست می‌آید. u_k را برای $1/k^2$ می‌نویسیم و تقریب ذوزنقه‌ای زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} (u_k + u_{k+1}) \\ &= \frac{1}{2} (u_n + u_{n+1}) + \frac{1}{2} (u_{n+1} + u_{n+2}) + \dots \\ &= \frac{1}{2} u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \frac{1}{2} u_n + R_n. \end{aligned}$$

حال، چون خم $y = 1/x^2$ تعقرش روبه بالاست،

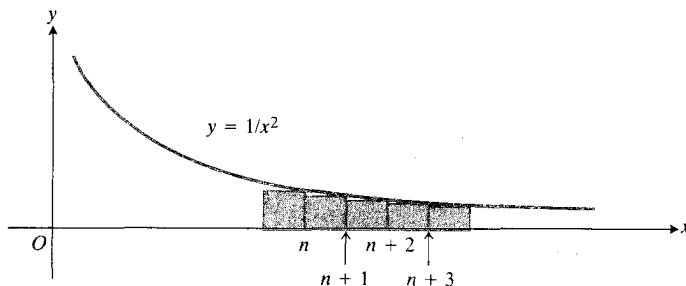
$$T_n > \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n}$$

و داریم

$$R_n = T_n - \frac{1}{2} u_n > \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}.$$

می‌دانیم که

$$\frac{1}{n} > R_n > \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$



۱۶.۱۱ مساحت R_n برابر است با

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \dots < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

اختلاف $R_n = S - S_n$ بین مجموع سری و مجموع جزئی n ام آن، باقیمانده یا خطای برش نامیده می‌شود.

خطاهای گرد کردن چون در محاسبه S_n بیشتر عملیات حسابی تنها تا تعداد محدودی رقم اعشاری (یا دودویی) انجام می‌شوند، امکان خطای گرد کردن در محاسبه هر جمله سری و بنابراین در مجموعهای جزئی وجود دارد. می‌توان انتظار داشت که تعادلی بین خطاهای گرد کردن مثبت و منفی برقرار باشد، و بنابراین، مجموع جزئی باید دقیقتر از آن باشد که «سناریوی بدترین حالت» پیش‌بینی می‌کند.

برآورد کردن باقیمانده به کمک انتگرال

همان‌طور که در بالا دیدیم، تفاضل $R_n = S - S_n$ بین مجموع یک سری همگرا و مجموع جزئی n ام آن، باقیمانده یا خطای برش نامیده می‌شود. چون R_n خودش به صورت یک سری نامتناهی داده می‌شود که، علی‌الاصول، محاسبه‌اش به اندازه محاسبه سری اصلی مشکل است، ممکن است فکر کنید که عطف توجه به R_n فایده‌ای ندارد. ولی گاه حتی برآورد ناپخته‌ای از R_n می‌تواند به برآوردی از S منجر شود که بیشتر از S_n به S نزدیک باشد.

مثلاً، فرض کنید که می‌خواهیم مقدار عددی سری زیر را بدانیم

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

این یک p -سری با ضابطه $p=2$ است و لذا همگراست. این مطلب بدان معنی است که دنباله مجموعهای جزئی

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

دارای حدی چون S است. اگر بخواهیم مقدار S را تا دورقم اعشار بدانیم، سعی می‌کنیم عدد صحیحی چون n پیدا کنیم به طوری که مجموع متناهی متناظر، S_n ، اختلافش با S کمتر از، مثلاً، ۰.۰۰۵ باشد. سپس این S_n را به جای S ، تا دورقم اعشار، به کار می‌بریم. اگر بنویسیم

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$$

می‌بینیم که

$$R_n = S - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$$

خطای R_n را می‌توانیم از طریق مقایسه آن با مساحت زیرخم

$$y = \frac{1}{x^2}$$

و $S = s_n + R_n$ را می‌توان به صورت زیر برآورد کرد

$$s_n + \frac{1}{n} > S > s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \quad (1)$$

پس اگر برای برآورد کردن S از $s_n + 1/n$ به جای s_n استفاده کنیم، خطایی مرتکب می‌شویم که مقدار عددی‌اش کمتر از $1/(2n^2)$ است. بنابراین، اگر n را نا کمتر از ۱۰ بگیریم، این خطا کمتر از ۰۰۰۵ است. تفاوت زمان لازم برای محاسبه ۱۰ جمله و محاسبه ۲۰۰ جمله ممکن است آن قدر زیاد باشد که باعث شود این نوع تحلیل دقیق‌تر از اهمیت عملی برخوردار باشد. کارهایی را که در مورد این مثال خاص انجام دادیم، می‌توان در هر موردی که نمودار تابع $y = f(x)$ مانند شکل ۱۶-۱۱ تقریبش رو به بالا باشد انجام داد. می‌بینیم که وقتی $\int_n^\infty f(x) dx$ موجود است،

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \int_n^\infty f(x) dx \quad (2)$$

گرایش به این دارد که برآوردی اضافی از سری بدست دهد، ولی مقدار اضافه برآورد کمتر از $u_n/2$ است.

به کار بردن آزمون نسبت برای برآورد کردن باقیمانده سری چون $\sum a_n$ مرکب از جمله‌های مثبت را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم نسبت a_{n+1}/a_n که نشان‌دهنده آهنگ رشد جمله‌هاست دارای حدی چون $p < 1$ است. و نیز، فرض می‌کنیم برای اندیسی چون N ،

$$r_1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r_2, \quad n \geq N$$

که در آن r_1 و r_2 ثابتایی هستند که هر دو کوچکتر از ۱ اند. پس، از نابرابریهای

$$r_1 a_n \leq a_{n+1} \leq r_2 a_n \quad (n = N, N+1, N+2, \dots)$$

استنتاج می‌کنیم که

$$a_N(r_1 + r_1^2 + r_1^3 + \dots) \leq \sum_{n=N+1}^\infty a_n \leq a_N(r_2 + r_2^2 + r_2^3 + \dots) \quad (3)$$

مجموعه‌های این دوسری هندسی اینها هستند

$$r_1 + r_1^2 + r_1^3 + \dots = \frac{r_1}{1-r_1}$$

$$r_2 + r_2^2 + r_2^3 + \dots = \frac{r_2}{1-r_2}$$

پس، خطای برش

$$R_N = \sum_{n=N+1}^\infty a_n$$

بین دو مقدار زیر واقع است

$$a_N \frac{r_2}{1-r_2} \quad \text{و} \quad a_N \frac{r_1}{1-r_1}$$

یعنی

$$a_N \frac{r_1}{1-r_1} \leq S - s_N \leq a_N \frac{r_2}{1-r_2} \quad (4)$$

اگر

$$0 \leq r_1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r_2 < 1, \quad n \geq N$$

مثال باقیمانده سری زیر را برآورد کنید

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 5} + \frac{1 \times 2 \times 3}{3 \times 5 \times 7} + \dots = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

که در آن

$$a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} a_n, \quad n \geq 1 \quad \text{و} \quad a_1 = 1$$

حل: می‌بینیم که نسبت

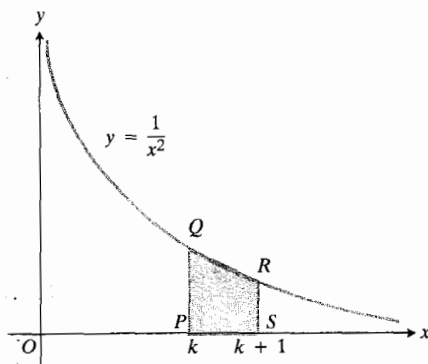
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{2n+1}$$

به ازای همه n ها کوچکتر از $1/2$ است. پس می‌توانیم در (۳) و (۴)، r_2 را برابر با $1/2$ بگیریم. همچنین ملاحظه می‌کنیم که دنباله $\{n/(2n+1)\}$ دنباله‌ای صعودی است، پس می‌توان قرارداد: $r_1 = N/(2N+1)$. اگر این مقادیر r_1 و r_2 را در (۴) قراردسیم، خواهیم داشت

$$a_N \frac{N}{2N+1} \leq S - s_N \leq a_N$$

مثلاً، به ازای $N=10$ ، تفاضل بین مجموع همه جملات سری و مجموع ده جمله اول بین $(10/11)a_{10}$ و a_{10} قرار دارد. به ازای $N=20$ ، تفاضل بین $(20/21)a_{20}$ و a_{20} است. مقادیر s_{20} و a_{20} را محاسبه کرده ایم که عبارت‌اند از

$$s_{20} = 1.570795962, \quad a_{20} = 3.80 \times 10^{-7}$$



۱۷۰۱۱ مساحت ذوزنقه PQRS برابر است با

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \right).$$

مساحت متناظر زیرخم برابر است با

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

مساحت بین خم و وتر QR برابر است با

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \right) - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2k^2(k+1)^2}.$$

۲. کامپیوتر یک فرمول برآورد نقطه وسط. فرض کنید $f(x) = 1/x^2$ و $u_k = 1/k^2$. تصور کنید یک مجموع جزئی $S_N = u_1 + u_2 + \dots + u_N$ را محاسبه کرده می‌خواهیم باقیمانده $R_N = u_{N+1} + u_{N+2} + \dots$ را برآورد کنیم. این بار، مساحت مستطیلی به ارتفاع u_k و به قاعده از $k - 1/2$ تا $k + 1/2$ را با مساحت متناظر زیرخم $y = 1/x^2$ مقایسه می‌کنیم. شکل ۱۸۰۱۱ را ببینید. مساحت اخیر را A_k می‌نامیم

$$A_k = \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{1}{x^2} dx = -1/x \Big|_{k-1/2}^{k+1/2} = 1/(k^2 - 1/4).$$

حال، $R_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k$ تقریباً برابر با مساحت زیر $y = 1/x^2$ از $x = N + 1/2$ تا $x = \infty$ است که عبارت است از $1/(N + 1/2)$. این برآورد را می‌توان با توجه به میزان افزونی مساحت زیرخم از $x = k$ تا $x = k + 1$ نسبت به مساحت مستطیل بهتر کرد. این افزونی برابر است با

$$\frac{1}{k^2 - 1/4} - \frac{1}{k^2} = \frac{1/4}{k^2(k^2 - 1/4)}.$$

برای تصحیح برآورد قبلی R_N ، کافی است مجموع این افزونیها، از $k = N + 1$ تا $k = \infty$ ، را کم کنیم. برای آسانی کار، به جای

بنا بر این، R_N بین 3.80×10^{-7} و $2.0/21$ است که برابر است با 3.62×10^{-7} . مجموع S را برای کل سری با استفاده از رابطه $S = S_N + R_N$ برآورد می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$1.570796322 \leq S \leq 1.570796322.$$

هشدار: این محاسبات با خطای گرد کردن همراه اند که به آسانی می‌تواند بر آخرین رقم اعشاری و یا چند رقم قبل از آن اثر بگذارد. به نظر می‌رسد که با اطمینان بتوان گفت شش رقم اعشاری نخستین درست اند. اهل علم و مهندسانی که به دقتی بیش از این نیاز دارند باید به کتابهایی در زمینه آنالیز عددی مراجعه کنند.

مسئله‌ها

۱. کامپیوتر فرض کنید

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

در یافتیم که تقریب بسیار خوبی از عبارت است از $x + x^2/2 + x^3/6$ با ضابطه $x = 1/(n+1)$. یک برنامه بیسیک برای محاسبه s_n و $s_n + x + x^2/2 + x^3/6$ به ازای $n = 1$ تا $n = 40$ بنویسید و اجرا کنید. درباره نتایج توضیح دهید. (سری $\sum 1/n^2$ به 1.644934067 تا نه رقم اعشاری همگراست). تقریب r_n را به این طریق یافتیم که تقریب ذوزنقه‌ای مساحت زیرخم $y = 1/x^2$ را از $x = n + 1$ تا $x = \infty$ در نظر گرفتیم و مجموع مساحت قطعات باریکی را که تفاضل بین مساحت زیرخم و ذوزنقه‌ها را نشان می‌دهند به دست آوردیم. شکل ۱۷۰۱۱ را ببینید. تفاضل از $x = k$ تا $x = k + 1$ برابر است با

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \right) - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2k^2(k+1)^2}$$

$$\int_{n+1/2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n+1/2}$$

را به عنوان تقریب سری زیر در نظر گرفتیم

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k^2(k+1)^2}.$$

۱ تا $N = 40$ بنویسید.

۳. فرض کنید $a_n = n/3^n$. اعداد r_1 و r_2 را که هر دو کوچکتر از ۱ باشند بیابید به طوری که $r_1 \leq a_{n+1}/a_n \leq r_2$ وقتی (الف) $n \geq 10$ ، (ب) $n \geq 100$. به کمک این نتایج، باقیمانده‌های $R_{100} = \sum_{n=101}^{\infty} a_n$ و $R_{10} = \sum_{n=11}^{\infty} a_n$ را برآورد کنید.

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. «دنباله»، «سری»، و «دنباله مجموعهای جزئی يك سری» را تعریف کنید.

۲. «همگرایی» (الف) يك دنباله، (ب) يك سری نامتناهی، را تعریف کنید.

۳. از گزاره‌های زیر، کدامها درست و کدامها نادرست‌اند؟
(الف) اگر دنباله‌ای همگرا نباشد، واگراست.
(ب) اگر دنباله‌ای چون $\{f(n)\}$ همگرا نباشد، آنگاه وقتی n به بینهایت می‌گراید $f(n)$ هم به بینهایت میل می‌کند.
(پ) اگر يك سری همگرا نباشد، آنگاه وقتی n به بینهایت می‌گراید، جمله n ام سری به صفر میل نمی‌کند.
(ت) اگر وقتی n به بینهایت می‌گراید جمله n ام يك سری به صفر میل نکند، آن سری واگراست.

(ث) اگر دنباله‌ای چون $\{f(n)\}$ همگرا باشد، آنگاه عددی مثل L هست به طوری که فاصله $f(n)$ از L (i) به ازای همه مقادیر n ، (ii) به ازای همه مقادیر n به استثنای تعدادی متناهی از آنها، بیشتر از ۱ نیست.

(ج) اگر همه مجموعهای جزئی يك سری کوچکتر از ثابتی چون L باشند، آن سری همگراست.

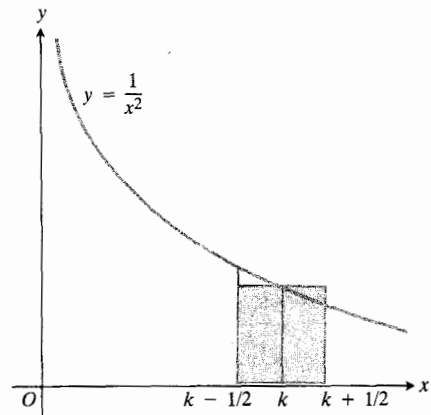
(چ) اگر يك سری همگرا نباشد، مجموعهای جزئی آن، s_n ها، کراندارند (یعنی به ازای ثابتهایی چون m و M داریم $m \leq s_n \leq M$).

۴. سه آزمون برای همگرایی (یا واگرایی) يك سری نامتناهی نام ببرید.

۵. تحت چه شرایطی يك دنباله کراندار، همگراست؟

۶. «همگرایی مطلق» و «همگرایی مشروط» را تعریف کنید. مثالهایی از سریهایی که (الف) مطلقاً همگرا، (ب) به طور مشروط همگرا هستند، بیاورید.

۷. برای قضاوت در این باره که يك سری متناوب مفروض همگراست یا نه، چه آزمونی را معمولاً به کار می‌برند؟ مثالهایی از سریهای متناوب همگرا و واگرا بیاورید.



۱۸۰۱۱. مستطیل دارای مساحت $n_k = 1/k^2$ است چون قاعده از $k - 1/2$ تا $k + 1/2$ طولش ۱ است. مساحت زیر قسمت متناظر خم $y = 1/x^2$ برابر است با $1/(k^2 - 1/4)$. مساحت زیر خم به اندازه

$$(1/4)/[k^2(k^2 - 1/4)]$$

بیشتر از مساحت مستطیل است. باقیمانده $R_N = n_{N+1} + n_{N+2} + \dots$ تقریباً برابر است با

$$\int_{N+1/2}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) dx - \frac{1}{4} \int_{N+1/2}^{\infty} \left(\frac{1}{x^4}\right) dx.$$

آن مجموع قرار می‌دهیم

$$\int_{N+1/2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{12} \frac{1}{(N+1/2)^3}$$

که به برآورد زیر منجر می‌شود

$$R_N \approx w - w^3/12 \quad \text{که در آن } w = 1/(N+1/2)$$

و $S = s_N + R_N \approx s_N + w - w^3/12$ مجموع صحیح عبارت است از ۱۶۶۴۹۳۳۴۰۶۷ $\approx \pi^6/6$. برآوردهایی که ما به کمک يك کامپیوتر به دست آورده‌ایم به ازای چند مقدار N عبارت‌اند از

| N | مجموع برآورد شده |
|-----------|------------------|
| ۱۰ | ۱۶۶۴۹۳۳۹۲۳ |
| ۳۴ | ۱۶۶۴۹۳۳۰۶۶ |
| ≥ 38 | ۱۶۶۴۹۳۳۰۶۷ |

يك برنامه یيسيك برای محاسبه s_N و $s_N + w - w^3/12$ به ازای

مسئله‌های گوناگون

۱. مجموع جزئی n ام سری $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 - 1/n^2)$ را به‌طور صریح پیدا کنید، و از آنجا معلوم کنید که این سری همگراست یا نه.

۲. $\sum_{k=2}^{\infty} 1/(k^2 - 1)$ را محاسبه کنید؛ به این منظور، مجموع جزئی n ام را بیابید و حد آن را وقتی n بینهایت می‌شود پیدا کنید.

۳. ثابت کنید که دنباله $\{x_n\}$ و سری $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)$ یا هردو همگرا هستند یا هردو واگرا.

۴. آیا سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

الف) همگراست؟

ب) مطلقاً همگراست؟

پ) به‌طور مشروط همگراست؟

ت) واگراست؟

۵. با فرض اینکه $|x| > 1$ نشان دهید که

$$\frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \dots$$

۶. آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$ همگراست؟ چرا؟

۷. آیا $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tanh n$ همگراست؟ چرا؟

همگرایی یا واگرایی سری‌هایی را که جمله‌های n ام آنها در مسائل ۸-۱۹ داده شده، ثابت کنید.

$$\frac{1}{\ln(n+1)} \quad ۸$$

$$\frac{n}{2(n+1)(n+2)} \quad ۹$$

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad ۱۰$$

$$\frac{1}{n(\ln n)^2}, \quad n \geq 2 \quad ۱۱$$

$$\frac{1 + (-2)^{n-1}}{2^n} \quad ۱۲$$

$$\frac{n}{1000n^2 + 1} \quad ۱۳$$

$$e^n/n! \quad ۱۴$$

$$\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} \quad ۱۵$$

$$\frac{1}{n^{1+1/n}} \quad ۱۶$$

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \dots (2n)} \quad ۱۷$$

$$\frac{n^2}{n^3+1} \quad ۱۸$$

$$\frac{n+1}{n!} \quad ۱۹$$

۲۰. اگر سری زیر همگراست، مجموعش را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

۲۱. الف) فرض کنید $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ اعداد مثبتی هستند که در شرطهای زیر صدق می‌کنند

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \quad (i)$$

(ii) سری $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots$ واگراست.

نشان دهید که سری زیر واگراست

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots$$

ب) با استفاده از نتیجه بالا نشان دهید که سری زیر واگراست

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

۲۲. فرض کنید سری $\sum a_n$ ، $a_n \neq 1$ ، $a_n > 0$ ، همگراست.

الف) نشان دهید که $\sum a_n^2$ همگراست.

ب) آیا $\sum a_n/(1-a_n)$ همگراست؟ توضیح دهید.

۲۳. اگر p عدد ثابتی باشد، نشان دهید که سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^p}$$

الف) همگراست اگر $p > 1$

ثابت‌نمایی چون M و h در شرط $|t_n| \leq Mn^h$ با ضابطه $h < 1$ صدق کنند. در این صورت، سری $\sum c_n/n$ همگرا و برابر با $\sum t_n/n(n+1)$ است. (مسأله ۲۱ در بخش ۹.۱۱ را ببینید.)
(ب) به کمک قضیه قسمت (الف) همگرایی سری زیر را ثابت کنید

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

در این سری، پس از k جمله مثبت، $k+1$ جمله منفی و سپس $k+2$ جمله مثبت می‌آید ($k=1, 3, 5, 7, \dots$).
(پ) کامپیوتر مجموع سری قسمت (ب) را برآورد کنید. (برآورد ما تا هفت رقم اعشاری، ۵۱۷۱۵۰۴۰۵ است.)

(ب) واگراست اگر $p \leq 1$.

(نکته اگر $f_1(x) = x$ ؛ $f_{n+1}(x) = \ln(f_n(x))$ ؛ و n مقادیر ۱، ۲، ۳، ... را اختیار کند داریم $f_2(x) = \ln x$ ، $f_3(x) = \ln(\ln x)$ و الی آخر. پس به شرط اینکه حد بالای انتگرال چنان باشد که $f_n(a) > 1$ ، آنگاه

$$\int_a^\infty \frac{dx}{f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)(f_{n+1}(x))^p}$$

(i) همگراست وقتی $p > 1$ و (ii) واگراست وقتی $(p \leq 1)$.

۲۴. الف) قضیه زیر را ثابت کنید: فرض کنید $\{c_n\}$ دنباله‌ای

از اعداد باشد به طوری که مجموعه‌های c_k به ازای $t_n = \sum_{k=1}^n c_k$

سریهای توانی

چشم انداز

در فصل ۱۱ بیشتر با دنباله‌ها و سریهای سروکار داشتیم که جملاتشان مقادیر ثابت بودند. همه آزمونهای همگرایی یا واگرایی که در آنجا به کار بردیم در این فصل نیز به کار می‌آیند ولی در اینجا دنباله‌ها و سریهای را بررسی می‌کنیم که جمله n ام آنها تابعی چون $u_n(x)$ است. به خصوص، سری توانی کلی

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

را مطالعه می‌کنیم.

سریهای توانی از کجا می‌آیند و چه فایده‌ای دارند؟ سریهای توانی و سایر انواع سریهای نامتناهی در حل معادلات دیفرانسیل در فیزیک ریاضی، از جمله در توصیف ریاضی تارهای مرتعش، جریان گرما، انتقال جریان الکتریکی، حرکت آونگ ساده و بسیاری از پدیده‌های دیگر به کار می‌آیند. در شاخه‌ای از ریاضیات که آنالیز عددی نام دارد، به کمک سریهای توانی می‌توان تعیین کرد که برای تضمین دقت مطلوب در محاسبه، چند رقم اعشاری لازم است. همچنین می‌توان سریهای توانی را برای گسترش دامنه تعریف e^x ، $\sin x$ ، $\cos x$ ، و سایر تابعهای مقدماتی از مجموعه اعداد حقیقی به مجموعه اعداد مختلط به کار گرفت. (چنین تابعی، مثلاً، در فیزیک و مهندسی بسرق مفید واقع می‌شوند.) بیشتر این کاربردها در چارچوب موضوعهای خاص مربوطه بررسی می‌شوند (نظریه توابع متغیرهای مختلط، در ریاضیات موضوع پیشرفته‌ای محسوب می‌شود) و در این کتاب به آنها نخواهیم پرداخت.

۱.۱۲ مقدمه

در این فصل، به دنباله‌ها و سریهای می‌پردازیم که جمله n ام آنها تابعی چون $u_n(x)$ است. در بیشتر موارد، $u_n(x)$ حاصل ضرب مقدار ثابتی در x^n یا $(x-a)^n$ خواهد بود. مثلاً اگر

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \quad u_1(x) = x \\ u_2(x) &= x^2, \quad \dots, \quad u_n(x) = x^n \end{aligned} \quad (1)$$

آنگاه دنباله $\{u_n(x)\} = \{x^n\}$ به صفر همگراست اگر $-1 < x < 1$ ؛ به ۱ همگراست اگر $x = 1$ ؛ و در جاهای دیگر واگراست.

اگر جمله‌های دنباله $\{x^n\}$ را با علامتهای به علاوه به هم مربوط کنیم، سری هندسی زیر را به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (2)$$

که می‌دانیم به $1/(1-x)$ همگراست اگر $|x| < 1$ و در غیر این صورت، واگراست. خواه فرمول جمع و جوری برای $\sum x^n$ داشته باشیم و خواه نداشته باشیم، می‌گوییم که $\sum x^n$ تابعی بر $(-1, 1)$ تعریف می‌کند.

چگونه به دست می آوریم؟ در کجا همگرا هستند؟ آیا وقتی همگرا هستند مقادیر واقعی توابع مولد خود را به دست می دهند؟

۲.۱۲ چندجمله ای تیلر

چنین نیست که هر تابعی یک سری توانی با بینهایت جمله تولید کند (یا چنین سری به آن وابسته باشد). ولی هر تابعی چون f که در یک همسایگی $x=0$ تعریف شود و در 0 دارای مشتقات متناهی $f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots$ باشد، چندجمله ایایی مثل $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ تولید می کند که تابع مفروض $f(x)$ را به ازای x های نزدیک 0 تقریب می زنند. معمولاً وقتی که درجه چندجمله ای افزایش می یابد، تقریبها بهتر می شوند.

منظور ما از «چندجمله ایایی که تابع f تولید می کند» چیست؟ به ازای هر عدد صحیح k از 0 تا n ، فرض کنید چندجمله ای p_k عبارت باشد از

$$p_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k. \quad (1)$$

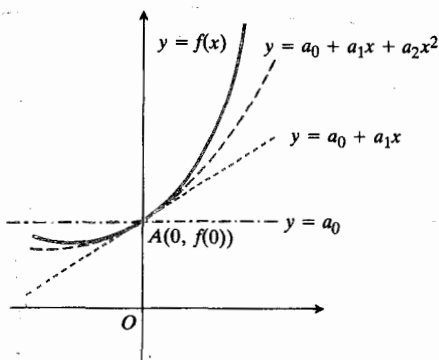
ضرایب $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ باید معین شوند. توجه خویش را بر قسمتی از خم $y=f(x)$ نزدیک نقطه $A(0, f(0))$ ، که در شکل ۱۰۱۲ نشان داده شده، متمرکز می کنیم.

۱. نمودار چندجمله ای $p_0(x) = a_0$ از درجه صفر از $(0, f(0))$ می گذرد اگر فرض کنیم

$$a_0 = f(0).$$

۲. نمودار چندجمله ای $p_1(x) = a_0 + a_1x$ از $(0, f(0))$ می گذرد و شیب آن با شیب خم مفروض در آن نقطه یکی است اگر در نظر بگیریم

$$a_1 = f'(0) \quad \text{و} \quad a_0 = f(0)$$



۱۰۱۲ تابع $f(x)$ در نزدیکی $x=0$ به وسیله چندجمله ایایی که مشتقاتشان در $x=0$ با مشتقات f تطبیق می کنند، تقریب زده می شود.

سری توانی صوری

اگر دنباله ای از جمله های کلیتر به صورت زیر داشته باشیم

$$\begin{aligned} u_0 &= a_0, \quad u_1 = a_1x, \quad u_2 = a_2x^2, \\ u_3 &= a_3x^3, \quad \dots, \quad u_n = a_nx^n, \quad \dots \end{aligned} \quad (3)$$

و جمله های این دنباله را با علامتهای به علاوه به هم مربوط کنیم، سری توانی صوری را به دست می آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2)$$

در عبارت های (۳) و (۴)، a_n ها ثابت (مستقل از x) اند و x متغیری است که دامنه اش فعلاً می تواند هر مجموعه ای از اعداد حقیقی باشد. اغلب می توان با به کار بردن آزمونهایی از قبیل آزمون نسبت یا آزمون ریشه n ام در مورد سری (۴)، تعیین کرد که به ازای چه مقادیری از x سری مفروض همگراست. به ازای چنین مقداری از x ، سری نشان دهنده تابعی از x است. مثلاً می توان نوشت

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad -1 < x < 1 \quad (5)$$

چون سری سمت راست رابطه (۵) به ازای هر x بین -1 و $+1$ به همان عددی میل می کند که مقدار تابع سمت چپ. سری که جمله های آن به صورت $u_n = n!x^n$ هستند نسبتاً عجیب و غریب است

$$0! + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n + \dots \quad (6)$$

اگر $x=0$ ، این سری به اولین جمله اش، $0!$ ، تقلیل می یابد و دارای مقدار 1 است. به ازای همه مقادیر دیگر x ، جمله n ام $u_n = n!x^n$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به صفر نمی رود پس این سری واگراست. این سری هیچ کاربرد عملی ندارد مگر به عنوان مثالی از یک سری که تنها در یک نقطه همگراست. بیشتر سریهای توانی که ما مطالعه خواهیم کرد، روی بازه ای از مقادیر x همگرا خواهند بود. اغلب سریهای توانی مورد بحث ما، آنهایی هستند که در جریان جستجوی تقریبهای چندجمله ای برای تابعهای مقدماتی متداول نظیر e^x ، $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\ln(1+x)$ و $\tan^{-1}x$ به دست می آیند. تقریبهای درجه اول و درجه دوم چنین تسوابعی، برای مقادیر کوچک x ، در فصلهای قبلی عرضه شده اند. در برخی کاربردها این تقریبها به اندازه کافی مناسب اند و در برخی دیگر، چنین نیستند. از این رو، توجه خود را به بررسی سری مکلاورن و سری تیلر معطوف می کنیم: این دو نوع سری چیستند؟ آنها را

چندجمله‌ای تیلر $p_n(x)$ که به وسیله f تولید شده، وجود دارد.

مثال ۱ مطلوب است چندجمله‌ای‌های تیلر $p_n(x)$ تولید شده به وسیله $f(x) = e^x$ در $x = 0$.

حل: تابع مفروض و مشتقات آن بر حسب x به صورت زیرند

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = e^x$$

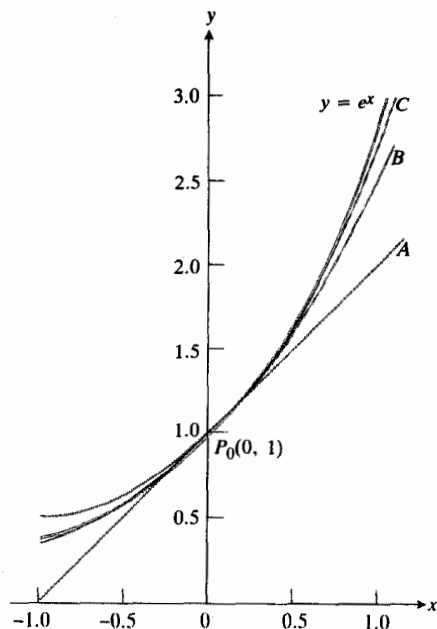
پس

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = 1, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = 1$$

و

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (3)$$

شکل ۲.۱۲ را ببینید.



۲.۱۲ نمودار تابع $y = e^x$ و نمودارهای سه چندجمله‌ای تقریب‌زننده، (A) یک خط راست، (B) یک سهمی، و (C) یک خم درجه سوم.

۳. نمودار چندجمله‌ای $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ از $(0, f(0))$ می‌گذرد و مشتقات اول و دوم آن با مشتقات اول و دوم تابع مفروض در آن نقطه یکی است اگر

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0)$$

و

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}.$$

۴. به طور کلی، چندجمله‌ای

$$p_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$$

که آن را برای تقریب زدن نمودار $y = f(x)$ در نزدیک $x = 0$ انتخاب می‌کنیم، چندجمله‌ای است که نمودارش از $(0, f(0))$ می‌گذرد و k مشتق اولش با مشتقات متناظر f در $x = 0$ یکی است. داریم

$$p_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_kx^k$$

$$p_k'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + ka_kx^{k-1}$$

$$p_k''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + k(k-1)a_kx^{k-2}$$

⋮

$$p_k^{(k)}(x) = (k!)a_k.$$

اگر قرار دهیم $x = 0$ ، $p_k(0) = f(0)$ ، $p_k'(0) = f'(0)$ ، $p_k''(0) = f''(0)$ ، \dots ، $p_k^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ ، و معادلات را نسبت به $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ حل کنیم، به دست می‌آوریم

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad \dots, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

پس

$$p_k(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \quad (2)$$

چندجمله‌ای است که با f و k مشتق اول آن در $x = 0$ تطابق دارد. این چندجمله‌ای، چندجمله‌ای تیلر مرتبه k نام تولید شده به وسیله f در $x = 0$ نامیده می‌شود. به ازای هر k از 0 تا n چنین چندجمله‌ای تیلری وجود دارد.

وقتی تابع f در $x = 0$ دارای مشتقات تمام مراتب است، چنانکه در مثال زیر هست، به ازای هر عدد صحیح نامنفی n یک

بعد از جمله x^n جملات دیگری اضافه می‌شود، ضرایب جمله‌ها تا x^n و خود x^n تغییری نمی‌کنند. همه این چندجمله‌ایها، مجموعه‌ای جزئی یک‌سری توانی صوری معروف به سری مک‌لورن تولید شده به وسیله تابع f هستند.

سری مک‌لورن تولید شده به وسیله f

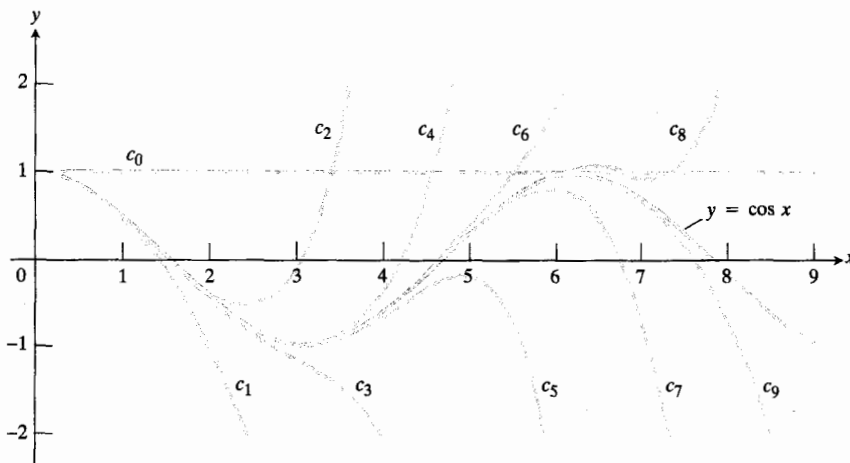
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (5)$$

گرچه سری مک‌لورنی که f تولید می‌کند دارای مجموعه‌ای جزئی است که مقادیر و مشتقاتشان با مقادیر و مشتقات f در $x=0$ تطبیق می‌کنند، ولی نمی‌دانیم که این سری به ازای هر x دیگری (به غیر از $x=0$) واقعاً همگراست یا نه. بنابراین، در (5) معادله‌ای نداریم و فقط عبارتی داریم که مقادیر x را می‌توان در آن قرارداد. قسمت اعظم این فصل با سؤالاتی درباره همگرایی سری مک‌لورن (و سری تیلر مشابه که به زودی به آن خواهیم پرداخت) سروکار دارد.

سؤال ۱: آیا سری توانی صوری (5) به ازای مقادیری از x به غیر از $x=0$ همگراست؟

سؤال ۲: وقتی که سری همگراست، آیا به مقدار مطلوب یعنی $f(x)$ همگراست؟

در مورد برخی از تابعها، پاسخ هر دو سؤال مثبت است.



۳.۱۲ چندجمله‌ایهای

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^n [(-1)^k x^{2k} / (2k)!]$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به $\cos x$ میل می‌کنند.

سری مک‌لورن و سری تیلر

اگر f در $x=0$ دارای مشتقاتی تمام مراتب باشد، چندجمله‌ایهای تیلری تولید می‌کند که تابع را در نزدیکی $x=0$ تقریب می‌زنند و درجه‌های این چندجمله‌ایها هیچ کرانی ندارند. همچنین، وقتی

مثال ۲: مطلوب است چندجمله‌ایهای $p_n(x)$ تولید شده به وسیله $f(x) = \cos x$ در $x=0$.

حل: کسینوس و مشتقاتی آن عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, f'(x) = -\sin x, \\ f''(x) &= -\cos x, f^{(3)}(x) = \sin x, \\ &\vdots \\ f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \cos x, f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x. \end{aligned}$$

وقتی $x=0$ ، کسینوسها ۱ و سینوسها ۰ هستند، پس

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k, f^{(2k+1)}(0) = 0.$$

در این مورد، چندجمله‌ایهای تیلر مرتبه $2k$ و مرتبه $2k+1$ یکی هستند

$$\begin{aligned} p_{2k}(x) &= p_{2k+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ &\quad + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned} \quad (2)$$

شکل ۳.۱۲ نشان می‌دهد که می‌توان انتظار داشت این چندجمله‌ایها $y = \cos x$ را در نزدیکی $x=0$ به خوبی تقریب بزنند. تنها قسمتهای سمت راست نمودارها نشان داده شده‌اند زیرا نمودارها نسبت به محور y متقارن‌اند.

نمودارهایی که در شکل‌های ۳.۱۲ و ۲.۱۲ دیده می‌شوند دلگرم‌کننده هستند و مطالب بخشهای بعدی مؤید این مطلب هستند که معمولاً می‌توانیم انتظار داشته باشیم که سری مک‌لورن در بازه‌ای حول مبدأ به تابع مولدش همگرا باشد. برای بسیاری از توابع،

این بازه، سراسر محور x است.

اگر به جای تقریب زدن مقادیر f در نزدیکی صفر، توجهمان به مقادیر x در نزدیکی نقطه دیگری چون a معطوف باشد، چند جمله ایهای تقریب زننده را بر حسب توانهایی از $(x-a)$ می نویسیم

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n. \quad (۶)$$

حال اگر ضرایب a_0, a_1, \dots, a_n را چنان معین کنیم که چند جمله ای n مشتق اولش با تابع مفروض و مشتقات آن در $x=a$ تطابق داشته باشند، به یک سری دست می یابیم که سری تیلر تولید شده به وسیله f در $x=a$ نامیده می شود.

سری تیلر تولید شده به وسیله f در $x=a$

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (۷)$$

در اینجا باید به دو نکته توجه کرد. اول اینکه سریهای مکلورن همان سریهای تیلر با ضابطه $a=0$ هستند. دوم اینکه، نمی توان یک تابع را حول $x=a$ به سری تیلر بسط داد مگر اینکه در $x=a$ دارای مشتقات متناهی از تمام مراتب باشد. مثلاً، $f(x) = \ln x$ سری مکلورنی تولید نمی کند چون خود تابع در $x=0$ مقدار متناهی ندارد چه برسد به مشتقاتش. از طرف دیگر، بسط این تابع به سری تیلر بر حسب توانهای $(x-1)$ امکان پذیر است چون $\ln x$ و همه مشتقاتش در $x=1$ متناهی اند.

در اینجا چند مثال از سریهای تیلر می آوریم.

مثال ۳ از فرمولی که در مثال ۲ برای چند جمله ایهای تیلر $\cos x$ به دست آوردیم بلافاصله نتیجه می شود که

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

سری مکلورن تولید شده به وسیله $\cos x$ است.

مثال ۴ سری تیلری را بیابید که $\cos x$ در نقطه $a=2\pi$ تولید می کند.

حل: مقادیر $\cos x$ و مشتقات آن در $a=2\pi$ با مقادیر

درباره نام سریهای تیلر و مکلورن

کسی که اولین بار سری تیلر را توصیف کرد، تیلر نبود و توصیف سری مکلورن هم مروهون مکلورن نیست. در ۱۶۸۸، وقتی تیلر سه ساله بسود و ده سال قبل از تولد مکلورن، جیمز گرگوری ریاضیدان انگلیسی سریهای تیلر توابع را معرفی کرد و انتشار داد. او از سریهای مکلورن مربوط به $\tan x$ ، $\sec x$ ، $\tan^{-1}x$ ، و $\sec^{-1}x$ نیز اطلاع داشت. تقریباً در همین زمان، ریاضیدانی بنام نیکولاس مرکاتور سری مکلورن $\ln(1+x)$ را کشف کرد.

بروک تیلر (۱۶۸۵-۱۷۳۱) ظاهراً وقتی که در سال ۱۷۱۵ کتاب دوشهای مستقیم و معکوس نمو خود را منتشر کرد، از کار گرگوری بی خبر بود. در این کتاب، آنچه که اکنون به سریهای تیلر موسوم است، آمده است. کالین مکلورن اسکاتلندی (۱۶۹۸-۱۷۴۶) در رساله در باب فلوکسیونها که در سال ۱۷۴۲ انتشار یافت، از کار تیلر یاد کرد. این رساله تأثیر گذار، نمایش توابع به وسیله سریها را به همگان شناساند، و گرچه مکلورن هیچ ادعایی در زمینه اکتشاف این نتایج نداشت، بسط تابع به سری تیلر حول مقدار $a=0$ به نام سری مکلورن شناخته شد. شاید این نامگذاری چندان دور از عدالت نباشد: مکلورن که ریاضیدان درخشانی بود، اولین کاشف روشی برای حل دستگاههای معادلات است که امروز این روش به نام قاعده کرامر معروف است.

اولین پنج جمله سری تیلر اینها هستند

$$\frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \frac{(x-2)^3}{2^4} + \frac{(x-2)^4}{2^5}.$$

به نظرمی رسد اینها جمله‌های یک سری هندسی با این مشخصات اند: اولین جمله $1/2$ و نسبت، $r = -(x-2)/2$. اگر بقیه سری هم از همین الگو پیروی کند، سری همگراست به

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{1-r} &= \frac{1/2}{1+(x-2)/2} \\ &= \frac{1}{2+(x-2)} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

به شرطی که

$$|x-2| < 2 \quad \text{یا} \quad \left| \frac{x-2}{2} \right| < 1 \quad \text{یا} \quad 0 < x < 4$$

پس در این مثال به ازای $0 < x < 4$ می توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \frac{(x-2)^3}{2^4} + \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^{n-1}}{2^n} + \dots \end{aligned}$$

چون می دانیم سری هندسی سمت راست به ازای $0 < x < 4$ به $1/x$ همگراست.

مثال ۶ سری مکلوورنی که $f(x) = (1+x)^3$ تولید می کند چیست؟

حل: عبارت (۵) را به کار می بریم و مشتقها و مقادیر آنها در $x=0$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^3, & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= 3(1+x)^2, & f'(0) &= 3 \\ f''(x) &= 6(1+x), & f''(0) &= 6 \\ f'''(x) &= 6, & f'''(0) &= 6. \end{aligned}$$

همه مشتقات مراتب بالاتر متحد با صفرند؛ بنابراین، سری مکلوورنی

آنها در $a=0$ یکی هستند. پس مانند مثال ۲

$$f^{(2k)}(2\pi) = f^{(2k)}(0) = (-1)^k$$

و

$$f^{(2k+1)}(2\pi) = f^{(2k+1)}(0) = 0.$$

سری مطلوب، این است

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-2\pi)^{2k}}{(2k)!} &= 1 - \frac{(x-2\pi)^2}{2!} \\ &\quad + \frac{(x-2\pi)^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

نکته در محاسبه عباراتی نظیر

$$\frac{(x-2\pi)^{2k}}{(2k)!} \quad \text{و} \quad \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

که در سربهای توانی مثالهای ۳ و ۴ مطرح شدند، وقتی $k=0$ قراردادی را رعایت می کنیم. علاوه بر این توافق معمولی که $0! = 1$ ، فرض می کنیم

$$\frac{(x-2\pi)^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{x^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

حتی اگر $x=0$ یا $x=2\pi$.

مثال ۵ اولین پنج جمله سری تیلری که $f(x) = 1/x$ در $x=2$ تولید می کند چیست؟

حل: باید $f(2)$ ، $f'(2)$ ، $f''(2)$ ، $f'''(2)$ و $f^{(4)}(2)$ را محاسبه کنیم. با مشتگیری به دست می آوریم

$$f(x) = x^{-1}, \quad f(2) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -x^{-2}, \quad f'(2) = -\frac{1}{2^2}$$

$$f''(x) = 2x^{-3}, \quad f''(2) = \frac{2!}{2^3}$$

$$f'''(x) = -6x^{-4}, \quad f'''(2) = -\frac{(3!)}{2^4}$$

$$f^{(4)}(x) = 24x^{-5}, \quad f^{(4)}(2) = \frac{4!}{2^5}.$$

۱. e^{-x}

۲. $\sin x$

۳. $\cos x$

۴. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

۵. $\sinh x$

۶. $\cosh x$

۷. $x^4 - 2x + 1$

۸. $x^3 - 2x + 1$

۹. $x^2 - 2x + 1$

در مسأله‌های ۱۰-۱۳، سری مک‌لورن تولید شده به وسیله هر تابع را بیابید.

۱۰. $\frac{1}{1+x}$

۱۱. x^2

۱۲. $(1+x)^2$

۱۳. $(1+x)^{3/2}$

۱۴. سری مک‌لورن تابع $f(x) = 1/(1-x)$ را بیابید. نشان دهید که این سری واگراست وقتی $|x| \geq 1$ و همگراست وقتی $|x| < 1$.

در مسأله‌های ۱۵-۲۰، فرمول (۷) را به کار بگیرید و سری تیلر تولید شده به وسیله تابع مفروض حول نقطه مفروض را بنویسید.

۱۵. $f(x) = e^x, a = 10$

۱۶. $f(x) = x^2, a = \frac{1}{2}$

۱۷. $f(x) = \ln x, a = 1$

۱۸. $f(x) = \sqrt{x}, a = 2$

۱۹. $f(x) = \frac{1}{x}, a = -1$

۲۰. $f(x) = \cos x, a = -\frac{\pi}{4}$

در مسأله‌های ۲۱ و ۲۲، مجموع اولین سه جمله سری تیلر را برای

که f تولید می‌کند، عبارت است از

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$= 1 + 3x + \frac{6}{2}x^2 + \frac{6}{6}x^3 + \frac{0}{24}x^4 + \dots$$

$$+ \frac{0}{n!}x^n + \dots$$

$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

در این مورد، سری مک‌لورن نامتناهی فقط چهار جمله ناصفر دارد و لذا به ازای همه مقادیر x همگراست. ملاحظه می‌کنیم که $1 + 3x + 3x^2 + x^3$ عبارت است از بسط دو جمله‌ای زیر

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

پاسخ دو سؤال را جمع به همگرایی مثبت است:

۱. سری به ازای همه مقادیر x همگراست.

۲. وقتی سری همگراست، به مقدار مطلوب، یعنی $f(x) = (1+x)^3$ همگراست. ■

پرسش سروری ۲ را در انتهای این فصل ببینید. در آنجا تابعی مثال زده شده که سری مک‌لورنی تولید می‌کند که به ازای همه مقادیر x همگراست ولی به مقدار تابع مولدش همگرا نیست (مگر در $x=0$).

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱-۹، با استفاده از رابطه (۲) چند جمله‌ایهای تیلر $p_1(x)$ و $p_2(x)$ را برای هر یک از تابعهای $f(x)$ ذیل در $x=0$ بنویسید. در هر مورد، اولین گام شما باید پر کردن جدولی نظیر جدول زیر باشد

| n | $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(0)$ |
|-----|--------------|--------------|
| ۰ | | |
| ۱ | | |
| ۲ | | |
| ۳ | | |
| ۴ | | |

تابع مفروض حول نقطه مفروض a بنویسید.

$$f(x) = \tan x, \quad a = \frac{\pi}{4} \quad ۰۲۱$$

$$f(x) = \ln \cos x, \quad a = \frac{\pi}{3} \quad ۰۲۲$$

می‌شود خم $y = \phi_n(x)$ با خم اصلی $y = f(x)$ در $x = b$ تطابق داشته باشد. این کار را می‌توان انجام داد: کافی است باشیم

$$f(b) = p_n(b) + K(b-a)^{n+1} \quad (۳ \text{ الف})$$

یا

$$K = \frac{f(b) - p_n(b)}{(b-a)^{n+1}} \quad (۳ \text{ ب})$$

با در نظر داشتن این تعریف K ، فرض می‌کنیم $F(x) = f(x) - \phi_n(x)$ ؛ بنا بر این $F(x)$ اندازه اختلاف تابع اصلی f و تسابع تقریب‌زننده ϕ_n را به ازای هر x متعلق به $[a, b]$ یا متعلق به $[b, a]$ (اگر $a < b$) به دست می‌دهد. برای ساده کردن سیستم نماد گذاری فرض می‌کنیم $a < b$ ، پس a نقطه انتهایی چپ همه بازه‌های مذکور است. اگر a به جای اینکه نقطه انتهایی چپ باشد، نقطه انتهایی راست باشد (مثلاً $[b, a]$ ، (b, a) ، (c_1, a) ، \dots ، (c_n, a)) باز هم همین اثبات معتبر است.

در بقیه این اثبات، مکرراً از قضیه رول استفاده می‌کنیم. ابتدا، چون $F(a) = F(b) = 0$ و هر دوی F و F' بر $[a, b]$ پیوسته‌اند، می‌دانیم که

$$F'(c_1) = 0, \quad (a, b) \text{ در } c_1 \text{ به ازای عددی چون}$$

حال، چون $F'(a) = F'(c) = 0$ و هر دوی F' و F'' بر $[a, c_1]$ پیوسته‌اند، می‌دانیم که

$$F''(c_2) = 0, \quad (a, c_1) \text{ در } c_2 \text{ به ازای عددی چون}$$

با کاربرد متوالی قضیه رول در مورد F'' ، F''' ، \dots ، $F^{(n-1)}$ وجود

$$F'''(c_3) = 0 \quad \text{به قسمی که} \quad (a, c_2) \text{ در } c_3$$

$$F^{(4)}(c_4) = 0 \quad \text{به قسمی که} \quad (a, c_3) \text{ در } c_4$$

$$\vdots$$

$$F^{(n)}(c_n) = 0 \quad \text{به قسمی که} \quad (a, c_{n-1}) \text{ در } c_n$$

نتیجه می‌شود. و بالاخره، چون $F^{(n)}$ بر $[a, c_n]$ پیوسته و بر (a, c_n) مشتق‌پذیر است و $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(c_n) = 0$ ، از قضیه رول نتیجه می‌شود که عددی چون c_{n+1} در (a, c_n) وجود دارد به قسمی که

$$F^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0. \quad (۴)$$

اگر از

$$F(x) = f(x) - p_n(x) - K(x-a)^{n+1}$$

۳.۱۲ قضیه تیلر با باقیمانده: سینوسها، کسینوسها، و e^x

در بخش قبل این پرسش را مطرح کردیم که چه موقع می‌توان انتظار داشت سری تیلری که یک تابع تولید می‌کند، به تابع همگرا باشد. در این بخش، این پرسش را با قضیه‌ای که منسوب به ریاضیدان انگلیسی بروک تیلر (۱۶۸۵-۱۷۳۱) است، پاسخ می‌دهیم.

قضیه ۱

قضیه تیلر

اگر f و n مشتق اولش f' ، f'' ، \dots ، $f^{(n)}$ بر $[a, b]$ یا بر $[b, a]$ پیوسته باشند، و $f^{(n)}$ بر (a, b) یا بر (b, a) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه عددی چون c بین a و b وجود دارد به قسمی که

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

اثبات فرض می‌کنیم f در فرضهای قضیه صدق کند و چند جمله‌ای تیلر حول a از مرتبه n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (۱)$$

این چند جمله‌ای و n مشتق اولش با تابع f و n مشتق اولش در $x = a$ تطابق دارند. اما این تطابق با افزودن جمله دیگری به شکل $K(x-a)^{n+1}$ که در آن K ثابت دلخواهی باشد، مخدوش نمی‌شود زیرا چنین تابعی و n مشتق اولش همگی در $x = a$ صفر برابرند. پس تابع جدید

$$\phi_n(x) = p_n(x) + K(x-a)^{n+1} \quad (۲)$$

و n مشتق اولش نیز با f و n مشتق اولش در $x = a$ تطابق دارند. اکنون مقدار خاصی از K را انتخاب می‌کنیم که باعث

$f(x)$ به سری تیلر، روی آن بازه به $f(x)$ میل می کند و می نویسیم

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \quad (۸)$$

مثال ۱ سری مربوط به e^x . نشان دهید که سری تیلر تولید شده به وسیله $f(x) = e^x$ در $a=0$ به ازای هر مقدار حقیقی x به $f(x)$ همگراست.

حل: فرض کنیم $f(x) = e^x$. این تابع و همه مشتقاتش در هر نقطه ای پیوسته اند، پس قضیه تیلر را می توان با هر مقدار مناسبی از a به کار برد. فرض می کنیم $a=0$ ، زیرا محاسبه مقادیر f و مشتقاتش در این نقطه آسان است. قضیه تیلر به سری زیر می انجامد

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \quad (۹ \text{ الف})$$

که در آن

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \text{به ازای } c \text{ بین } 0 \text{ و } x, \quad (۹ \text{ ب})$$

چون e^x تابعی صعودی از x و c بین 0 و x است، مقدار e^c بین 1 و e^x است. پس اگر x منفی باشد، c هم منفی است و $e^c < 1$ ؛ اگر x مثبت باشد، c نیز مثبت است و $e^c < e^x$. از این رو می توان نوشت

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{وقتی } x < 0 \quad (۹ \text{ پ})$$

و

$$R_n(x) < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{وقتی } x > 0 \quad (۹ \text{ ت})$$

وقتی $x=0$ ، جمله اول سری مذکور در (۹ الف) عبارت است از $e^0 = 1$ ؛ پس «خطا» صفر است. و بالاخره، چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad \text{به ازای هر } x$$

این گزاره درست است که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad \text{به ازای هر مقدار } x$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \quad (۱۰)$$

$n+1$ بار مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) = 0 = -(n+1)! K. \quad (۵)$$

روابط (۲) و (۵) همراه باهم نتیجه زیر را به دست می دهند

$$(۶) \quad \text{به ازای عددی چون } c = c_{n+1} \text{ در } (a, b), \quad K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

روابط (۳ ب) و (۶) را باهم ترکیب می کنیم و به دست می آوریم

$$\frac{f(b) - p_n(b)}{(b-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

یا

$$f(b) = p_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

به ازای عددی چون c بین a و b .

نتیجه

اگر f در بازه I بازی چون I که شامل a است دارای مشتقات تمام مراتب باشد، آنگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت n و به ازای هر x در I ،

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n(x) \quad (۷ \text{ الف})$$

که در آن

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad \text{به ازای } c \text{ بین } a \text{ و } x, \quad (۷ \text{ ب})$$

(۷ ب)

این نتیجه بلافاصله از قضیه تیلر به دست می آید چون وجود مشتقات تمام مراتب در بازه ای مثل I ، پیوستگی آن مشتقات را ایجاب می کند و ما فقط در فرمول آخر، x را به جای b گذاشته ایم.

تابع $R_n(x)$ باقیمانده مرتبه n نامیده می شود و عبارت است از تفاضل $f(x) - p_n(x)$ که در آن، $p_n(x)$ چند جمله ای تیلر مرتبه n است که برای تقریب زدن $f(x)$ در نزدیکی $x=a$ به کار رفته است. این تفاضل را که «خطا»ی تقریب $p_n(x)$ هم نامیده می شود، اغلب می توان به کمک رابطه (۷ ب) برآورد کرد. در مثال بعد این را ملاحظه خواهید کرد.

اگر به ازای همه x های واقع در بازه ای حول $x=a$ ، وقتی $n \rightarrow \infty$ داشته باشیم $R_n(x) \rightarrow 0$ ، می گوییم که بسط

پس

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \quad \text{و} \quad f^{(2k)}(0) = 0$$

این سری تنها جمله‌های توان فرد دارد و، به ازای $n = 2k + 1$ از قضیه تیلر نتیجه می‌شود

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x).$$

حال، چون قدرمطلق همه مشتقات $\sin x$ نایبتر از ۱ است، می‌توانیم قضیه برآورد باقیمانده را با ضوابط $r = 1$ و $M = 1$ به کار ببریم و به دست آوریم

$$|R_{2k+1}(x)| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

چون وقتی $k \rightarrow \infty$ ، $|x|^{2k+2}/(2k+2)! \rightarrow 0$ ، مقدار x هر چه باشد،

$$R_{2k+1}(x) \rightarrow 0$$

و سری مکلاورن $\sin x$ به ازای هر x به $\sin x$ همگراست.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (11)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

مثال ۳ سری مربوط به $\cos x$. نشان دهید که سری مکلاورن $\cos x$ به ازای هر مقدار x به $\cos x$ همگراست.

حل: در آغاز کار، جمله باقیمانده را به چند جمله‌ای تیلر $\cos x$ در رابطه (۴) بخش قبل می‌افزاییم تا فرمول تیلر $\cos x$ را به ازای $n = 2k$ به دست آوریم

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(x).$$

چون قدرمطلق مشتقات کسینوس نایبتر از ۱ است، قضیه برآورد باقیمانده را با ضوابط $r = 1$ و $M = 1$ به کار می‌بریم و به دست

برآورد کردن باقیمانده

اغلب می‌توان $R_n(x)$ را به همان صورتی که در مثال ۱ دیدید برآورد کرد. این روش برآورد بسیار راحت و مناسب است و برای مراجعات بعدی آن را به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه ۲

قضیه برآورد باقیمانده

اگر ثابتهای مثبتی چون r و M وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر t در $[a, x]$ داشته باشیم $|f^{(n+1)}(t)| \leq M r^{n+1}$ ، آنگاه جمله باقیمانده در قضیه تیلر، $R_n(x)$ ، در نابرابری زیر صدق می‌کند

$$|R_n(x)| \leq M \frac{r^{n+1} |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

به علاوه، اگر این شرطها به ازای هر n برقرار باشند و $f(x)$ در همه شرطهای دیگر قضیه تیلر صدق کند، آنگاه این سری به $f(x)$ همگراست.

در مثالهای ساده می‌توانیم r را برابر با ۱ بگیریم به شرط اینکه ثابتی چون M باشد که کران f و همه مشتقاتش باشد. ولی اگر $f(x) = 2 \cos(3x)$ ، هر بار که مشتق می‌گیریم یک ضریب ۳ به دست می‌آوریم. پس می‌توانیم r را برابر ۳ و M را برابر ۲ اختیار کنیم.

برای اینکه ببینیم قضیه برآورد باقیمانده و قضیه تیلر را چگونه می‌توان همراه با هم برای حل و فصل مسائل همگرایی به کار برد، نظری به چند مثال می‌افکنیم. همچنانکه خواهید دید، این دو قضیه را همچنین می‌توان برای تعیین دقت تقریب‌زدن یک تابع به وسیله یکی از چند جمله‌ایهای تیلرش به کار برد.

مثال ۲ سری مربوط به $\sin x$. نشان دهید که سری مکلاورن $\sin x$ به ازای همه x ها به $\sin x$ همگراست.

حل: تابع و مشتقاتش بر حسب x عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x, & f'''(x) &= -\cos x \\ &\vdots & & \\ f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x, & f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x \end{aligned}$$

می آوریم

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{اتحاد}$$

تا اینجا در بررسی خود از سریها اعداد موهومی را به کار نگرفته ایم. به یاد می آوریم که اعداد مختلط در حل معادلات درجه دوم مطرح می شوند. فرمول ریشه های معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

این است

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

که در آن، a, b, c اعدادی حقیقی اند و $a \neq 0$. وقتی مبین $D = b^2 - 4ac$ منفی است، دویزه عبارت اند از اعداد مختلط

$$u + iv \quad \text{و} \quad u - iv$$

که در آن

$$u = -\frac{b}{2a}$$

$$v = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

منظور ما از مرور این مطالب، عمدتاً یادآوری علامت i ،

$$i = \sqrt{-1}$$

و نیز یادآوری این است که

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i$$

$$i^4 = i^2 i^2 = 1, \quad i^5 = i^4 i = i$$

والی آخر.

با در نظر داشتن این مطالب، $i\theta$ را به جای x در سری مکلورن e^x قرار می دهیم و حاصل را ساده می کنیم تا به دست

$$|R_{2k}(x)| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

به ازای هر مقدار x ، وقتی $k \rightarrow \infty$ ، $R_{2k} \rightarrow 0$. بنابراین، این سری به ازای هر مقدار x به $\cos x$ همگراست

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (12)$$

مثال ۴ سری مکلورن $\cos 2x$ را بیابید و نشان دهید که این سری به ازای هر مقدار x به $\cos 2x$ همگراست.

حل: سری مکلورن $\cos x$ به ازای هر مقدار x به $\cos x$ همگراست و بنابراین، به ازای هر مقدار $2x$ نیز به آن همگراست

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

سریهای تیلر را می توان مانند سریهای دیگر برهم افزود، از هم کم کرد، در ثابتهای ضرب کرد، و نتایج حاصل با هم سری تیلر خواهند بود. سری تیلر مربوط به $f(x) + g(x)$ مجموع سریهای تیلر مربوط به $f(x)$ و $g(x)$ است زیرا مشتق n ام $f(x) + g(x)$ عبارت است از $f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$ ، و در مورد بقیه اعمال هم شبیه همین حالت برقرار است. در مثال زیر، سریهای e^x و e^{-x} را با هم جمع می کنیم و بر ۲ تقسیم می کنیم تا سری تیلر $\cosh x$ به دست آید.

مثال ۵ سری مربوط به $\cosh x$. سری مکلورن $\cosh x$ را بیابید.

حل:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

آوریم

رابطه (۱۴) نتیجه زیر را به دست می دهد

$$e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^0 = 1$$

پس

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}. \quad (15)$$

بنابراین، قوانین معمولی حاکم بر تابع نمایی در مورد تسایع $e^{i\theta}$ که به وسیله رابطه (۱۳) تعریف شده هم به کار می روند.

خطای برش

در اینجا مثالهایی می آوریم که نشان می دهند چگونه از قضیه برآورد باقیمانده برای برآورد کردن خطای بریدن استفاده می شود.

مثال ۶ مطلوب است محاسبه e با خطایی کوچکتر از 10^{-6} .

حل: با استفاده از نتیجه مثال ۱، رابطه (۹ الف)، به ازای $x=1$ می نویسیم

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(1)$$

که در آن

$$R_n(1) = e^c \frac{1}{(n+1)!}, \quad c \text{ بی بین } 0 \text{ و } 1$$

به خاطر مقاصدی که در این مثال داریم، فرض می کنیم که نمی دانیم $e = 2.71828\dots$ ، ولی قبلاً نشان داده ایم $e < 3$. پس، مطمئن هستیم که

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

$$چون \quad 0.1 < e^c < 3$$

با آزمایش پی می بریم $10^{-6} > 1/9! > 1/9!$ در حالی که $10^{-6} < 3/10!$ پس باید $(n+1)$ را حداقل برابر ۱۰ یا n را حداقل برابر ۹ بگیریم. با خطایی کوچکتر از 10^{-6} خواهیم داشت

$$\blacksquare \quad e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{9!} \approx 2.718282.$$

مثال ۷ به ازای چه مقدارهایی از x می توان $x - (x^3/3!)$ را به جای $\sin x$ قرار داد به طوری که بزرگی خطا بیشتر از 3×10^{-4} نباشد؟

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right)$$

$$+ i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta.$$

درست نیست که بگوییم با این محاسبات، اتحاد

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (13)$$

ثابت می شود بلکه این نظر را می پذیریم که رابطه (۱۳) تعریف $e^{i\theta}$ است. این تعریف، که تعریف متداولی است، از ملاحظه سریهای $\cos \theta$ ، $\sin \theta$ ، و e^x با ضابطه $x = i\theta$ ناشی می شود. به محض اینکه تعریف (۱۳) را به عنوان تعریف $e^{i\theta}$ بپذیریم، درستی قانون زیر را به سرعت می توان تحقیق کرد.

قانون جمع نماهای موهومی

اگر θ_1 و θ_2 اعداد حقیقی دلخواهی باشند، آنگاه

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (14)$$

اثبات بنا به تعریف

$$e^{i\theta_1} = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1, \quad e^{i\theta_2} = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2.$$

با ضرب کردن و ساده کردن خواهیم داشت

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$+ i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$= e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

همچنین توجه کنید که وقتی $\theta = 0$ ، $i\theta = 0$ و از رابطه

(۱۳) نتیجه می شود

$$e^0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

که وقتی $x = 0$ ، $e^x = 1$ سازگار است.

اگر $\theta_1 = \theta$ و $\theta_2 = -\theta$ ، آنگاه $\theta_1 + \theta_2 = 0$ ، و

آنگاه از قضیه برآورد باقیمانده به دست می آوریم

$$|R_3| \leq 1 \cdot \frac{|x|^4}{4!} = \frac{|x|^4}{24}$$

که چندان خوب نیست. ولی اگر دقت کنیم که $x - x^3/3! = 0 + x + 0x^2 - x^3/3! + 0x^4$ چند جمله ای تیلر مرتبه ۴ و نیز مرتبه ۳ است، خواهیم داشت

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0 + R_4$$

و از قضیه برآورد باقیمانده به ازای $M=r=1$ نتیجه می شود

$$|R_4| \leq 1 \cdot \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}$$

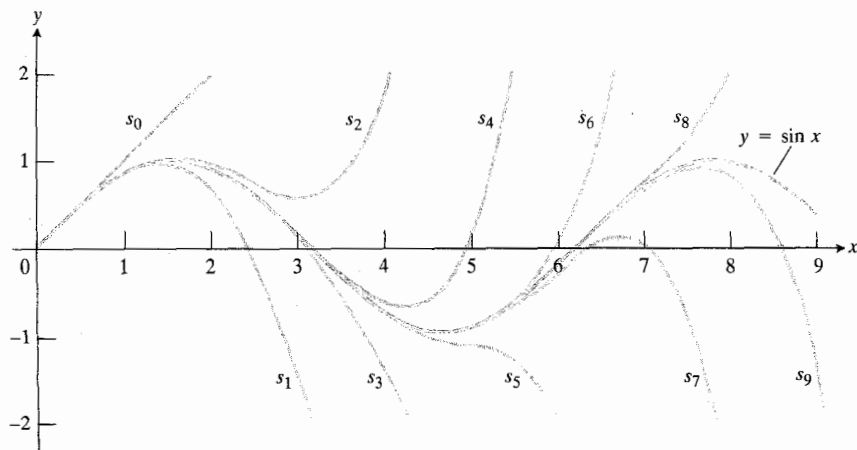
و این چیزی است که از قضیه برآورد سری متناوب حاصل شد. ■

در مثالهایی که تاکنون از کاربرد قضیه باقیمانده آورده ایم، توانسته ایم r را برابر با ۱ بگیریم. در مثال بعد، $f(x) = \sin 2x$ و هربار که مشتق می گیریم یک ضریب ۲ به دست می آوریم، پس داریم $r=2$.

مثال ۸ فرض کنید $f(x) = \sin 2x$. تقریب $\sin 2x \approx (2x) - (2x)^3/3! + (2x)^5/5!$ از x خطایش بیش از 5×10^{-6} نیست؟

حل: چون چند جمله ایهای تیلر مرتبه ۵ و مرتبه ۶ برای $\sin 2x$ یکی هستند، یعنی تنها تفاوتشان در جمله ای است که دارای ضریب صفر است، مطمئن هستیم که خطا بزرگتر از $2^7|x|^7/7!$ نیست (بر اساس مقایسه با مثال ۷). پس نامعادله زیر را حل می کنیم

$$\frac{|2x|^7}{7!} < 5 \times 10^{-6}.$$



حل: در اینجا از این مطلب می توان بهره گرفت که سری مکلاورن $\sin x$ به ازای هر مقدار ناصفر x یک سری متناوب است. بنابراین قضیه برآورد سری متناوب در بخش ۸.۱۱، خطای برش

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

پس از جمله $(x^3/3!)$ بزرگتر از

$$\left| \frac{x^5}{5!} \right| = \frac{|x|^5}{120}$$

نیست. بنابراین، خطا نا بیشتر از 3×10^{-4} است اگر

$$\frac{|x|^5}{120} < 3 \times 10^{-4}$$

یا

$$|x| < \sqrt[5]{360 \times 10^{-4}} \approx 0.514.$$

قضیه برآورد سری متناوب گویای مطلبی است که قضیه برآورد باقیمانده نیست: یعنی اینکه برآورد $(x^3/3!)$ برای $\sin x$ وقتی x مثبت است، برآوردی نقصانی است زیرا $x^5/120$ در این صورت مثبت است.

در شکل ۴.۱۲ نمودار $\sin x$ و نمودارهای تعدادی از چند جمله ایهای تیلر تقریب زننده آن دیده می شود. توجه کنید که نمودار $s_1 = x - (x^3/3!)$ وقتی $-1 \leq x \leq 1$ تقریباً بر خم سینوس منطبق است، ولی محور x را در $\pm \sqrt{6} \approx \pm 2.45$ قطع می کند در حالی که خم سینوس این محور را در $\pm \pi \approx \pm 3.14$ قطع می کند.

ممکن است از خودتان پرسید که برآورد حاصل از قضیه برآورد باقیمانده در مقایسه با برآوردی که هم اکنون از قضیه برآورد سری متناوب به دست آمد چگونه است. اگر بنویسیم

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_2$$

۴.۱۲ چند جمله ایهای

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n [(-1)^k x^{2k+1} / (2k+1)!]$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ به $\sin x$ همگرا آیند.

نتیجه این است

$$|2x| < \sqrt[7]{7! \times 5 \times 10^{-6}} = \sqrt[7]{0.025200} \approx 0.59106$$

$$|x| < 0.29553 \text{ rad یا}$$

مسئله‌ها

درمسئله‌های ۱-۶، سری مکلاورن هر تابع را بنویسید.

$$e^{x/2} \quad ۰.۱$$

$$\sin 3x \quad ۰.۲$$

$$5 \cos \frac{x}{\pi} \quad ۰.۳$$

$$\sinh x \quad ۰.۴$$

$$\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x \quad ۰.۵$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad ۰.۶$$

۰.۷ با استفاده از سری ثابت کنید که

$$\cos(-x) = \cos x \quad (\text{الف})$$

$$\sin(-x) = -\sin x \quad (\text{ب})$$

۰.۸ نشان دهید که

$$e^x = e^a \left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \right]$$

درمسئله‌های ۹-۱۱، برای تابع مفروض، فرمول تیلر (رابطه ۷ الف) را به ازای $n=2$ و $a=0$ بنویسید.

$$\frac{1}{1+x} \quad ۰.۹$$

$$\ln(1+x) \quad ۰.۱۰$$

$$\sqrt{1+x} \quad ۰.۱۱$$

۰.۱۲ سری تیلر e^x را در $a=1$ بیابید. سری خود را با نتیجه‌ای که درمسئله ۸ به دست آمد مقایسه کنید.۰.۱۳ به ازای چه مقادیر تقریبی x می‌توان $\sin x$ را با $x - (x^3/6)$ تعویض کرد به طوری که مقدار خطا بزرگتر از 5×10^{-4} نباشد؟۰.۱۴ اگر $\cos x$ با $1 - (x^2/2)$ ، $|x| < 0.5$ تعویض شود، چه برآوردی از خطا می‌توان کرد؟ آیا $1 - (x^2/2)$ گرایش به این دارد که خیلی بزرگ باشد یا خیلی کوچک؟۰.۱۵ تقریب $\sin x = x$ وقتی $|x| < 10^{-3}$ تا چه حد دقیق است؟ از میان این مقدارهای x ، به ازای چه مقادیری $x < \sin x$ ؟۰.۱۶ برآورد $\sqrt{1+x} = 1 + (x/2)$ وقتی به کار می‌رود که $|x|$ کوچک باشد. خطا را وقتی $|x| < 0.01$ ، برآورد کنید.۰.۱۷ تقریب $e^x = 1 + x + (x^2/2)$ وقتی به کار می‌رود که x کوچک باشد. به کمک قضیه برآورد باقیمانده، خطا را وقتی $|x| < 0.1$ برآورد کنید.۰.۱۸ وقتی $x < 0$ ، سری مربوط به e^x یک سری متناوب است. به کمک قضیه برآورد سری متناوب، خطای ناشی از تعویض e^x با $1 + x + (x^2/2)$ را به ازای $0 < x < 0.1$ برآورد کنید. نتیجه را با نتیجه مسئله ۱۷ مقایسه کنید.۰.۱۹ خطای تقریب $\sinh x = x + (x^3/3!)$ را وقتی $|x| < 0.5$ برآورد کنید. (دانهمایی: از R_4 استفاده کنید نه از R_3).۰.۲۰ اگر $0 \leq h \leq 0.01$ ، نشان دهید که e^h را می‌توان با $1 + h$ تعویض کرد و مقدار خطای این کار بیشتر از 0.06% مقدار h نیست. از رابطه $e^{0.01} = 1.0105$ استفاده کنید.۰.۲۱ فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ در $a=0$ دارای مشتقاتی از تمام مراتب باشد. نشان دهید که سری مکلاورن $f+g$ این است

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) + g^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

۰.۲۲ هر يك از مجموعه‌های زیر، مقدار يك تابع مقدماتی در يك نقطه است. تابع و نقطه را پیدا کنید.

$$(0.1) - \frac{(0.1)^3}{3!} + \frac{(0.1)^5}{5!} - \dots \quad (\text{الف})$$

$$+ \frac{(-1)^k (0.1)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$

(ب)

$$1 - \frac{\pi^2}{4^2 \times 2!} + \frac{\pi^4}{4^4 \times 4!} - \dots + \frac{(-1)^k (\pi)^{2k}}{4^{2k} \cdot (2k)!} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(2k)!} + \dots \quad (\text{ب})$$

۰.۲۳ هر يك از عبارات زیر را به شکل $u+iv$ ، که u و v حقیقی

۲.۱۲ نقطه‌های بسط، قضیه دوجمله‌ای، آرکتانژانتها،

 π و

در این بخش، بررسی بسط تابعهای مقدماتی معمولی به سریها را ادامه می‌دهیم و از این بسطها برای تقریب زدن مقادیر تابعها استفاده می‌کنیم. پیش از انجام دادن این کار، این موضوع را بررسی می‌کنیم که انتخاب نقطه بسط، a ، چه تأثیری بر کارایی محاسبات ما روی سریها دارد.

انتخاب نقطه بسط

بسط تیلر

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \quad (1)$$

مقدار تابع در x را بر حسب مقدارش و مقدارهای مشتقاتش در a به اضافه يك جمله باقیمانده بیان می‌کند که امیدواریم این جمله آن قدر کوچک باشد که بتوانیم آن را با اطمینان حذف کنیم. پس در کاربرد سریها در محاسبات عددی لازم است a طوری انتخاب شود که $f(a)$ ، $f'(a)$ ، $f''(a)$ ، ...، معلوم باشند. مثلاً وقتی با تابعهای مثلثاتی سروکار داریم می‌توانیم a را برابر با 0 ، $\pm \pi/6$ ، $\pm \pi/4$ ، $\pm \pi/3$ ، $\pm \pi/2$ ، و نظایر اینها، بگیریم. همچنین، مطلوب آن است که مقدار a در نزدیکی مقداری از x که تابع به ازای آن محاسبه می‌شود انتخاب گردد تا $(x-a)$ آن قدر کوچک باشد که با افزایش n ، جمله‌های سری به سرعت کاهش یابند.

مثال ۱ برای محاسبه $\sin 35^\circ$ ، در سری تیلر (۱) چه مقداری برای a در نظر بگیریم؟ همچنین خطاهای برش و گرد کردن را مورد بحث قرار دهید.

حل: 35° بر حسب رادیان برابر است با $35\pi/180$. می‌توانیم a را برابر 0 بگیریم و سری

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0 \cdot x^{2n+2} + R_{2n+2}(x)$$

را به کار ببریم. و نیز می‌توانیم a را برابر $\pi/6$ (که معادل با

باشند، بنویسیم.

الف) $e^{i\pi}$ ب) $e^{i\pi/2}$ پ) $e^{-i\pi/2}$ ت) $e^{i\pi} \cdot e^{-i\pi/2}$

۲۴. با استفاده از (۱۳) نشان دهید که

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

این اتحادها را گاهی اتحادهای اولر می‌نامند.

۲۵. با به کارگیری نتایج مسأله ۲۴ نشان دهید که

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

و

$$\sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta.$$

۲۶. وقتی a و b حقیقی اند، $e^{(a+ib)x}$ را به صورت $e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ تعریف می‌کنیم. با توجه به این تعریف نشان دهید که

$$\frac{d}{dx} e^{(a+ib)x} = (a+ib)e^{(a+ib)x}.$$

۲۷. دو عدد مختلط، $a+ib$ و $c+id$ ، با هم برابرند اگر و تنها اگر $a=c$ و $b=d$. با استفاده از این مطلب، انتگرالهای

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx \quad \text{و} \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

را از

$$\int e^{(a+ib)x} dx = \frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{(a+ib)x} + C$$

محاسبه کنید که در آن

$$C = C_1 + iC_2$$

يك ثابت مختلط انتگرالگیری است.



TOOLKIT PROGRAMS

Taylor Series

۳۰° است) بگیریم و سری

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin \frac{\pi}{6} \frac{(x - \pi/6)^2}{2!}$$

$$- \cos \frac{\pi}{6} \frac{(x - \pi/6)^3}{3!} + \dots$$

$$+ \sin \left(\frac{\pi}{6} + n \frac{\pi}{2}\right) \frac{(x - \pi/6)^n}{n!} + R_n(x)$$

را به کار ببریم. جمله باقیمانده سری (۲) در نابرابری

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

صدق می کند که، هر قدر $|x|$ بزرگ باشد، این باقیمانده وقتی $n \rightarrow \infty$ به صفر می گراید. پس می توانیم $\sin 35^\circ$ را به این طریق محاسبه کنیم که

$$x = \frac{35\pi}{180} \approx 0.6108652$$

را در تقریب زیر قرار دهیم

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}.$$

در اینجا بزرگی خطای برش بیشتر از 3.3×10^{-8} نیست زیرا

$$\left| R_8 \left(\frac{35\pi}{180} \right) \right| < \frac{(0.611)^9}{9!} < 3.3 \times 10^{-8}.$$

با استفاده از سری که از قرارداد $a = \pi/6$ حاصل می شود، با نمای n کوچکتر به همین میزان دقت می توان دست یافت ولی به این قیمت که $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$ را به عنوان یکی از ضرایب وارد کار کنیم. در این سری، با ضابطه $a = \pi/6$ داریم

$$x = \frac{35\pi}{180}$$

و کمیتی که به توانهای مختلف می رسد این است

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{180} \approx 0.0872665$$

که وقتی به توانهای بزرگ می رسد، به سرعت کاهش می یابد.

خطای گرد کردن اگر در چند جمله ای

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

به جای $35\pi/180$ عدد 0.6108652 را برای x به کار ببریم، چه خطای اضافی ایجاد می شود؟
دوره برای پاسخگویی به این پرسش وجود دارد:

۱. با استفاده از کامپیوتر، و

۲. با استفاده از دیفرانسیلها.

ما با استفاده از کامپیوتر و با در نظر گرفتن تقریب کامپیوتری $35\pi/180$ تا 14 رقم اعشاری، یعنی 0.61086523819833 مقدار $f(x)$ را محاسبه کردیم

$$f(x) = 0.5735764038 \quad (\text{تا } 10 \text{ رقم اعشاری})$$

و از روی جدول سینوسها مقدار زیر را یافتیم

$$\sin 35^\circ = 0.573576436351046 \quad (\text{تا } 15 \text{ رقم اعشاری})$$

این نتایج نشان می دهند که خطای برش برای $x - f(x)$ تقریباً برابر است با 3.26×10^{-8} .

در ادامه استفاده از کامپیوتر، $f(x_0)$ را به ازای $x_0 = 0.6108652$ (که اختلافش با $35\pi/180$ تقریباً 3.26×10^{-8} است) محاسبه کردیم و مقدار زیر را به دست آوردیم

$$f(x_0) = 0.5735763725 \quad (\text{تا } 10 \text{ رقم اعشاری})$$

خطای نشان داده شده (خطای برش به اضافه خطای گرد کردن) برابر بود با

$$\sin x - f(x_0) \approx 6.38 \times 10^{-8}.$$

پس خطای گرد کردن نیز تقریباً این است

$$(6.38 - 3.26) \times 10^{-8} = 3.12 \times 10^{-8}.$$

در استفاده از دیفرانسیلها، فرض می کنیم

$$dx = \frac{35\pi}{180} - x_0 \approx 3.82 \times 10^{-8}.$$

تفاضل متناظر،

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) \approx f'(x_0) dx$$

تقریباً برابر است با

$$\cos x_0 dx \approx 0.82 dx \approx 3.13 \times 10^{-8}.$$

هر دو روش برآورد خطای گرد کردن، به نتایج تقریباً یکسانی

حاصل: در (۳) قرار می‌دهیم $x = 1/4$ و $m = 1/2$ و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{(1/2)(-1/2)}{2!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &\quad + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{128} + \frac{1}{1024} - \frac{5}{32768} + \dots \end{aligned}$$

سری پس از اولین جمله متناوب است، پس تقریب

$$\sqrt{1.25} \approx 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{128} = 1.1171875$$

فاصله‌اش از مقدار دقیق، بیشتر از $1/1024$ نیست و بنا بر این، از دقت لازم برخوردار است؛ اگر آن را تا سه رقم اعشاری گرد کنیم، خواهیم داشت: $\sqrt{1.25} \approx 1.117$

محاسبه لگاریتمها

لگاریتمهای طبیعی را می‌توان از روی سریها محاسبه کرد. نقطه شروع کار، سری مربوط به $\ln(1+x)$ بر حسب توانهای x است

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

برای استنتاج مستقیم این سری مکلاورن (یا سری تیلر به‌ازای $a=0$)، می‌توان قضیه تیلر با باقیمانده را به‌کار برد و نشان داد که اگر $-1 < x \leq 1$ ، باقیمانده وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به‌صفر میل می‌کند.

در حالت خاص، وقتی $x=1$ ، سری سمت راست به‌سری همساز متناوب تبدیل می‌شود که می‌دانیم همگراست، و حال می‌دانیم که به $\ln 2$ همگراست.

محاسبه π

اعداد π ، $\sqrt{2}$ ، و e احتمالاً معروفترین اعداد گنگ هستند. بی‌شک در بین این سه، π از دیگران معروفتر است. در طول قرن‌ها، افراد بسیاری، تقریبهای گویایی از آن را محاسبه کرده‌اند خواه به‌صورت کسرهایی نظیر $22/7$ ، و $355/113$ یا به‌صورت اعدادی اعشاری نظیر 3.14159265358979323846

می‌انجامند و نشان می‌دهند که خطای گرد کردن در این مثال تقریباً برابر با خطای برش است.

اگر سری تیلر را با ضابطه $a = \pi/6$ به‌کار ببریم نتایج مشابهی به دست می‌آید که ما از ذکر جزئیات آن خودداری می‌کنیم.

سری دو جمله‌ای

سری دو جمله‌ای، یکی از مفیدترین سریها در تمام اعصار، سری مکلاورن تابع $f(x) = (1+x)^m$ است. نیوتن از این سری برای برآورد کردن انتگرالها استفاده کرد (ما هم در بخش ۵.۱۲ این کار را خواهیم کرد)، و آن را می‌توان برای به دست آوردن برآوردهای دقیقی از ریشه‌ها به‌کار برد. برای به دست آوردن این سری، ابتدا تابع و مشتقهایش را می‌نویسیم

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^m \\ f'(x) &= m(1+x)^{m-1} \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)(1+x)^{m-k} \end{aligned}$$

سپس مقدار آنها را در $x=0$ محاسبه می‌کنیم و در فرمول سری مکلاورن قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!} x^k + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

اگر m عدد صحیحی نا کمتر از صفر باشد، سری پس از $(m+1)$ جمله پایان می‌یابد زیرا ضرایب از $k = m+1$ به بعد صفرند. ولی وقتی m يك عدد صحیح نباشد، سری نامتناهی است. سری مکلاورن، قضیه دو جمله‌ای را به‌نماهایی که صحیح و یا مثبت نیستند، بسط می‌دهد.

مثال ۲ به کمک سری دو جمله‌ای، $\sqrt{1.25}$ را با خطایی کمتر از ۰.۰۰۱ برآورد کنید.

يك رياضيدان فرانسوی به نام ویتا^۱ (۱۵۲۰-۱۶۰۳) فرمول زیر را به دست آورد

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \times \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \times \dots \quad (5)$$

که ترنبال^۲ آن را «اولین فرمول واقعی برای عدد کهنسال π » می نامد. از جمله سایر فرمولها،

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times \dots}{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times \dots} \quad (6)$$

است که والیس، ریاضیدان انگلیسی آن را کشف کرد، و

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

که به فرمول لایب نیتس معروف است. جان مشین فرمول زیر را کشف کرد

$$\frac{\pi}{4} = 2 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

و آن را همراه با سری زیر به کار برد

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

این سری را جیمز گسرگوری در ۱۶۷۱ کشف کرده بود. نتیجه محاسبه π به وسیله مشین، که تا ۱۰۰ رقم اعشاری درست است، در ۱۷۰۶ انتشار یافت. اولین تقریبهای π با بیش از ۱۰۰۰ رقم اعشاری را رنج^۳ و اسمیت^۴ در ژوئن ۱۹۴۹ تا «حدود ۱۱۲۰۵ رقم اعشاری» به دست آوردند. در سپتامبر ۱۹۴۹، جورج رایت و سنر^۵ و همکارانش در آزمایشگاههای تحقیقات بالستیک آمریکا عدد π را تا «حدود ۲۰۳۷ رقم» حساب کردند. در این محاسبه از کامپیوتر انیاک^۶، که یکی از کامپیوترهای اولیه است، استفاده شد. فرمولی که به کار رفت، فرمول مشین بود و کل زمانی که انیاک برای محاسبه صرف کرد (با احتساب زمان کارت خوانی) ۷۰ ساعت بود.

جدیدترین اطلاعاتی که در این باره داریم این است که مقدار π را با استفاده از یک نوع جدید سوپر کامپیوتر کری ۲-۷ تا ۱۲۸ ۳۶۰ ۲۹ رقم حساب کرده اند^۸. برنامه این محاسبه را یکی از

دانشمندان مرکز تحقیقات فضایی آمریکا (دراوقسات فراغتش) بر اساس الگوریتمی که در دانشگاه دالهوسی^۹ کانادا تهیه شده، نوشته است. این برنامه ۲۸ ساعت از وقت کامپیوتر را گرفته و ۱۳۸ میلیون کلمه از حافظه اصلی آن را اشغال کرده و انجام ۱۲ تریلیون عمل حسابی را ایجاب کرده است. برای آزمودن نتیجه، برنامه دیگری بر اساس الگوریتم قدیمیتری نوشته و اجرا شده که در عدد حاصل، فقط ۱۷ رقم آخر با نتیجه اولی متفاوت بوده است. چرا کار محاسبه π را تا این حد ادامه می دهند؟ از لحاظ نظری، π همچنان مسائلی در ریاضیات مطرح می کند، از قبیل مسأله آماری تصادفی بودن ارقام π . از لحاظ عملی، محاسبه π به منزله شیوه ای برای آزمودن قابلیت اعتماد، دقت، و کارایی کامپیوتر همچنان مورد توجه قرار دارد.

اکنون توجه خود را به سری مربوط به $\tan^{-1} x$ معطوف می کنیم زیرا، همان طور که در بالا اشاره شد، این سری به فرمول لایب نیتس و فرمولهای دیگری که π را از روی آنها تا تعداد زیادی رقم اعشاری حساب کرده اند، می انجامد. چون

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

از سری هندسی زیر، با باقیمانده، انتگرال می گیریم

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots \quad (7)$$

$$+ (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

پس

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R$$

که در آن

$$R = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

مخرج انتگرال دهه تا کمتر از ۱ است؛ از این رو

$$|R| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

1. Viéta 2. Turnbull 3. Wrench 4. L. B. Smith 5. George W. Reitwiesner

6. ENIAC (electronic numerical integrator and computer) 7. Cray

9. Dalhousie

۸. اطلاع جدیدترین این است که π تا یک بیلیون رقم محاسبه شده است [۴-].

سریهای مکثورنی که بسیار به کار می‌روند

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-x)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x| \leq 1$$

سری دو جمله‌ای

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)x^k}{k!} + \dots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

که در آن

$$\binom{m}{1} = m, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} \quad (k \geq 3)$$

توجه: معمولاً $\binom{m}{0}$ را برابر با ۱ تعریف می‌کنند و فرض می‌کنند $x^0 = 1$ (حتی در حالت $x=0$ که معمولاً این حالت را کنار می‌گذارند) تا بتوان سری دو جمله‌ای را به شکل فشرده زیر نوشت

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \quad |x| < 1.$$

اگر m یک عدد صحیح مثبت باشد، سری در x^m ختم می‌شود و نتیجه به‌ازای همه x ها همگراست.

تا سه رقم اعشار محاسبه کنید. در هر مورد، نشان دهید که جمله باقیمانده از 5×10^{-4} تجاوز نمی کند.

$$\cos 31^\circ \quad ۰۱$$

$$\tan 46^\circ \quad ۰۲$$

$$\sin 63^\circ \quad ۰۳$$

$$\cos 69^\circ \quad ۰۴$$

$$\ln 1.25 \quad ۰۵$$

$$\tan^{-1} 1.02 \quad ۰۶$$

۷. سری مکلاورن $\ln(1+2x)$ را بیابید. این سری به ازای چه مقدارهایی از x همگراست؟

۸. به ازای چه مقدارهایی از x می توان $\ln(1+x)$ را با x تعویض کرد به طوری که مقدار خطا بیشتر از یک صدم قدرمطلق x نباشد؟

در مسأله های ۹ و ۱۰، انتگرالها را به کمک سریها تا سه رقم اعشاری محاسبه کنید.

$$\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx \quad ۰۹$$

$$\int_0^{0.1} e^{-x^2} dx \quad ۰۱۰$$

۱۱. نشان دهید که اختلاف ارتفاع خم زنجیری $y = a \cosh x/a$ با سهمی $x^2 = 2a(y-a)$ در محدوده $|x/a| \leq 1/3$ کمتر از $|a|/5000$ است.

۱۲. الف) در سری $\ln(1+x)$ به جای x قرار دهید $-x$ تا سری $\ln(1-x)$ به دست آید. این سری را با سری $\ln(1+x)$ ترکیب کنید و نشان دهید که

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right), \quad |x| < 1$$

ب) به ازای چه مقداری از x داریم $(1+x)/(1-x) = 2$ این مقدار x را در سری قسمت الف) به کار ببرید و $\ln 2$ را تا سه رقم اعشاری برآورد کنید.

۱۳. مجموع سری زیر را بیابید

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots$$

۱۴. چند جمله از سری مربوط به \tan^{-1} را باید به هم بیفزاییم

اگر $|x| \leq 1$ ، سمت راست این نابرابری وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به صفر میل می کند. بنابراین، R نیز به صفر میل می کند و داریم

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1. \quad (۸)$$

اگر در رابطه (۸) قرار دهیم $x=1$ و $\tan^{-1} 1 = \pi/4$ ، فرمول لایب نیتس به دست می آید

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots$$

چون همگرایی این سری خیلی کند است، آن را برای تقریب زدن π تا تعداد زیادی رقم اعشاری به کار نمی برند. سری $\tan^{-1} x$ وقتی x نزدیک صفر است همگرایی بسیار سریعی دارد. به این دلیل، کسانی که سری $\tan^{-1} x$ را برای محاسبه π به کار می گیرند، از اتحادهای مثلثاتی متعددی استفاده می کنند. مثلاً، اگر

$$\beta = \tan^{-1} \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \alpha = \tan^{-1} \frac{1}{4}$$

آنگاه

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{(1/2) + (1/3)}{1 - (1/6)} \\ &= 1 \\ &= \tan \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

و

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta = \tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{1}{3}. \quad (۹)$$

اکنون می توان رابطه (۸) را به ازای $x=1/2$ برای محاسبه $\tan^{-1} 1/3$ و به ازای $x=1/4$ برای محاسبه $\tan^{-1} 1/4$ به کار برد. مجموع این نتایج ضربدر ۴، π را به دست می دهد.

مسأله ها

در مسأله های ۱-۶، به کمک سری مناسبی، کمیت نشان داده شده را

که در آن

$$R = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} dt.$$

۲۰. نشان دهید که در مسأله ۱۹، R بزرگتر از

$$\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \quad (x^2 < 1)$$

نیست.

۲۱. الف) از اتحاد

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

مشتق بگیرید و بسط زیر را به دست آورید

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + R.$$

ب) ثابت کنید که اگر $|x| < 1$ ، آنگاه وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $R \rightarrow 0$.

پ) در یک بار ریختن دو تاس، احتمال اینکه مجموع خالهای رو شده ۷ باشد برابر است با $p = 1/6$. اگر تاسها مکرراً ریخته شوند، احتمال اینکه در بار n ام مجموع خالها برای اولین بار ۷ باشد، $q^{n-1}p$ است که در آن $q = 1 - p = 5/6$. تعداد مورد انتظار دفعاتی که تاسها باید ریخته شوند تا برای اولین بار مجموع ۷ ظاهر شود، $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p$ است. این سری را به طور عددی محاسبه کنید.

ت) مهندسی برای اعمال کنترل کیفیت آماری بزرگ فرایند تولید صنعتی، چند عدد از کالا را که به تصادف از خط تولید برداشته می‌شوند بازرسی می‌کند. هر عدد کالا که نمونه‌گیری می‌شود تحت عنوان «بد» یا «خوب» طبقه‌بندی می‌شود. اگر احتمال خوب بودن کالا p و احتمال بد بودنش $q = 1 - p$ باشد، احتمال اینکه اولین کالای بد در n امین بازرسی پیدا شود $p^{n-1}q$ است. تعداد متوسط بازرسیهایی که باید انجام شود تا اولین کالای بد به دست آید، $\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}q$ است. این سری را با فرض $0 < p < 1$ محاسبه کنید.

۲۲. در نظریه احتمال، متغیری تصادفی چون X می‌تواند مقادیر $1, 2, 3, \dots$ را با احتمالات p_1, p_2, p_3, \dots اختیار کند که p_k احتمال برابر بودن X با k ($k = 1, 2, \dots$) است. معمولاً

تا بتوان براساس قضیه برآورد سری متناوب، $\pi/4$ را تا دورقم اعشاری به دست آورد؟

۱۵. ماشین حساب رابطه (۸) و رابطه زیر

$$\pi = 48 \tan^{-1} \frac{1}{18} + 32 \tan^{-1} \frac{1}{57} - 20 \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

سری به دست می‌دهند که به طور نسبتاً سریع به $\pi/4$ همگراست. π را با این سری تا سه رقم اعشاری برآورد کنید. در مقابل، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ به $\pi^2/6$ آن قدر آهسته است که حتی ۵۰ جمله هم نتیجه‌ای که تا دورقم صحیح باشد به دست نمی‌دهند.

۱۶. ماشین حساب

الف) π را با فرمول والیس تا دورقم اعشاری حساب کنید. ب) اگر ماشین حساب شما برنامہ‌پذیر است، با استفاده از فرمول وینا عدد π را تا پنج رقم اعشاری حساب کنید.

۱۷. ماشین حساب حالت خاصی از الگوریتم سالامین^۱ برای برآورد کردن π ، با تعریف دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به وسیله قاعده‌های زیر

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_{n+1} = \frac{(a_n + b_n)}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

آغاز می‌شود. سپس، دنباله $\{c_n\}$ که به ازای $n \geq 1$ به صورت

$$c_n = \frac{2a_n b_n}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)}$$

تعریف می‌شود، به π همگراست. c_p را محاسبه کنید.

۱۸. نشان دهید که سری مذکور در رابطه (۸) برای $\tan^{-1}x$ ، به ازای $|x| > 1$ واگراست.

۱۹. نشان دهید

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^x (1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{2n} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}) dt$$

یا، به عبارت دیگر، نشان دهید

$$\tan h^{-1}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R$$

نظیر سریهای مربوط به $\ln(1+x)$ و $\tan^{-1}x$ ، فقط روی بازه‌های متناهی همگرا آیند. ولی همه این اطلاعات را از تحلیل فرمولهای باقیمانده به دست آوردیم و هنوز با این پرسش روبرویم که وقتی فرمولی برای باقیمانده وجود ندارد، همگرایی یک سری توانی را چگونه تحقیق کنیم. به علاوه، همه سریهای توانی که با آنها سروکار داشته‌ایم سریهای تیلری بوده‌اند که توابع مولد آنها را از قبل می‌شناخته‌ایم. دربارۀ سایر سریهای توانی چه می‌توان گفت؟ آیا آنها نیز سریهای تیلر توابعی هستند که ما آنها را نمی‌شناسیم؟

اولین گام در پاسخگویی به این پرسشها توجه به این نکته است که یک سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ هرگاه همگرا باشد تابعی تعریف می‌کند، یعنی تابع f را که مقدارش در هر x عدد زیر است

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (1)$$

پس می‌توانیم درباره نوع دامنه f ، نحوه مشتگیری و انتگرالگیری از f (در صورتی که این اعمال ممکن باشد)، اینکه f سری تیلری دارد یا نه، و اگر دارد، سری تیلرش چگونه به سری تعریف‌کننده $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ مربوط می‌شود، سؤالاتی مطرح کنیم.

پرسشهای مربوط به دامنه f و مقادیری که می‌توان انتظار داشت سری (۱) به ازای آنها همگرا باشد، به وسیله قضیه ۳ و بحثی که به دنبال آن می‌آید پاسخ داده می‌شود. مسأله ۳ را ثابت خواهیم کرد و سپس، پس از افکندن نگاهی به چند مثال، به قضایای ۴ و ۵ خواهیم رسید که پاسخگوی این پرسشها هستند که آیا می‌توان از f مشتق و انتگرال گرفت و اگر می‌توان، چگونه. علاوه بر این، در قضیه ۵ مسأله‌ای حل می‌شود که در چندین فصل پیش مطرح شد ولی تا اینجا حل نشده است: مسأله یافتن عبارتهای مناسبی برای محاسبه انتگرالهایی نظیر

$$\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^4} dx \quad \text{و} \quad \int_0^1 \sin x^x dx$$

که در کاربردها بسیار پیش می‌آیند. (مثالهای ۸، ۹، و ۱۰ را در این بخش ببینید.) سرانجام، خواهیم دید که در داخل دامنه تعریف، تابع f سری مکلوونی دارد و این سری چیزی نیست مگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ که تعریف‌کننده تابع است.

قضیه ۳

قضیه همگرایی برای سریهای توانی

اگر یک سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (2)$$

فرض می‌کنند $p_k \geq 0$ و $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. مقدار مودد انتظار [امید

ریاضی] X که با $E(X)$ نشان داده می‌شود به صورت $\sum_{k=1}^{\infty} k p_k$ تعریف می‌گردد به شرط اینکه این سری همگرا باشد. در هر یک از موارد زیر، نشان دهید که $\sum p_k = 1$ و $E(X)$ را، در صورت وجود، پیدا کنید. (ادهمایی: مسأله ۲۱ را ببینید.)

$$p_k = 2^{-k} \quad (\text{الف})$$

$$p_k = \frac{\delta^{k-1}}{\epsilon^k} \quad (\text{ب})$$

$$p_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad (\text{پ})$$



TOOLKIT PROGRAMS

Sequences and Series Taylor Series

۵.۱۲ همگرایی سریهای توانی: مشتگیری، انتگرالگیری، ضرب، و تقسیم

حال که سریهای توانی مربوط به توابع مقدماتی معمولی را بررسی کرده‌ایم، می‌پردازیم به مسائل مربوط به سریهای توانی که از راههای دیگری-مثلاً در حل معادله دیفرانسیل-پدید می‌آیند. (نمونه‌هایی از این گونه سریها در فیزیک ریاضی مطرح می‌شوند، و نمونه‌های ساده‌تری را ما در فصل ۲۰ خواهیم آورد.) همچنین عملهایی از قبیل ضرب، تقسیم، مشتگیری، و انتگرالگیری از سریهای توانی را مورد بحث قرار می‌دهیم. در اینجا، لازم است هشدار بدهیم: انواع دیگری از سریها، از جمله سریهای (فوری) مثلثاتی نیز در مهندسی و فیزیک اهمیت دارند، و برخی از عملهایی که برای سریهای توانی قابل اجرا هستند در مورد بعضی از آن سریها نمی‌توانند اجرا شوند. مثلاً، قضیه‌ای که برای سریهای توانی صادق است در واقع می‌گوید که مشتق یک سری توانی چون $\sum a_n x^n$ عبارت است از $\sum n a_n x^{n-1}$. ولی این مطلب درست نیست که مشتق سری مثلثاتی $\sum (1/n) \sin nx$ عبارت است از $\sum \cos nx$. به علاوه، اثبات برخی از مهمترین قضیه‌ها را نمی‌آوریم زیرا این اثباتها دشوارتر از حدی هستند که در یک درس مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال بیایند. (آنها را در کتابهای درسی پیشرفته‌تر می‌توان یافت.) ولی نتایج سودمند و کاربرشان ساده است.

همگرایی سریهای توانی

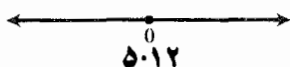
اکنون می‌دانیم که برخی از سریها، نظیر سریهای مربوط به $\sin x$ ، $\cos x$ ، و e^x ، به ازای همه مقادیر x همگرا هستند و برخی دیگر،

شعاع و بازه همگرایی

مضمون قضیه ۳ این است که یک سری توانی همیشه دقیقاً به یکی از سه صورت زیر رفتار می کند. (شکل ۵-۱۲)

انواع رفتاری که یک سری توانی ممکن است داشته باشد

۱. در $x = 0$ همگراست و در هر جای دیگر واگرا.
۲. عدد مثبتی چون c موجود است به قسمی که سری به ازای $|x| > c$ واگراست ولی به ازای $|x| < c$ مطلقاً همگراست. سری در هر یک از نقاط انتهایی $x = c$ و $x = -c$ ممکن است همگرا باشد یا نباشد.
۳. به ازای هر x مطلقاً همگراست.



در حالت ۲، مجموعه همه نقاطی که سری به ازای آنها همگراست یک بازه متناهی است. با توجه به مثالهای قبل می دانیم که این بازه، بسته به سری مورد نظر، ممکن است باز، نیم باز، یا بسته باشد. ولی صرف نظر از اینکه بازه از چه نوع است، c را شعاع همگرایی سری می نامند، و همگرایی در هر نقطه داخلی بازه، مطابق است. این بازه، بازه همگرایی نام دارد. اگر یک سری توانی به ازای همه مقادیر x مطلقاً همگرا باشد، می گوئیم شعاع همگرایی بینهایت است. اگر سری تنها در $x = 0$ همگرا باشد، می گوئیم شعاع همگرایی صفر است.

سریهای تیلر $\sin x$ ، $\cos x$ ، و e^x نمونه هایی از سریهای توانی هستند که شعاعهای همگرایی آنها بینهایت اند. این سریها به ازای هر مقدار x همگرا هستند.

سریهای زیر هم نمونه هایی از سریهای هستند که شعاعهای همگرایی آنها متناهی اند:

بازه همگرایی

سری

$$-1 < x < 1 \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$-1 < x \leq 1 \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

به ازای $x = c$ ($c \neq 0$) همگرا باشد، آنگاه به ازای هر x که در $|x| < |c|$ صدق کند مطلقاً همگراست. اگر این سری به ازای $x = d$ واگرا باشد، آنگاه به ازای هر x که در $|x| > |d|$ صدق کند واگراست.

اثبات فرض کنیم که سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n \quad (3)$$

همگراست. در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c^n = 0.$$

از این رو، اندیسی چون N وجود دارد به قسمی که

$$|a_n c^n| < 1, \quad n \geq N$$

یعنی

$$|a_n| < \frac{1}{|c|^n}, \quad n \geq N \quad (4)$$

حال x دلخواهی می گیریم به طوری که $|x| < |c|$ و عبارت زیر را در نظر می گیریم

$$|a_0| + |a_1 x| + \dots + |a_{N-1} x^{N-1}| + |a_N x^N| + |a_{N+1} x^{N+1}| + \dots$$

قبل از $|a_N x^N|$ فقط تعدادی متناهی جمله وجود دارد، و مجموع این جمله ها متناهی است. اگر از $|a_N x^N|$ شروع کنیم و پیش برویم، جمله ها بنا به ویژگی نابرابری (۴) کوچکتر از

$$\left| \frac{x}{c} \right|^N + \left| \frac{x}{c} \right|^{N+1} + \left| \frac{x}{c} \right|^{N+2} + \dots \quad (5)$$

هستند. ولی سری مذکور در (۵) یک سری هندسی با نسبت $r = |x/c|$ است که کوچکتر از ۱ است زیرا $|x| < |c|$. پس سری (۵) همگراست و بنا بر این، سری اصلی (۳) مطلقاً همگراست. بدین ترتیب، نیمه اول قضیه ثابت می شود.

نیمه دوم قضیه چیز جدیدی در بر ندارد. اگر سری در $x = d$ واگرا و در مقداری چون x_0 با ضابطه $|x_0| > |d|$ همگرا باشد، می توانیم در نیمه اول قضیه فرض کنیم $c = x_0$ و نتیجه بگیریم که سری در d مطلقاً همگراست. اما این سری نمی تواند در یک زمان هم مطلقاً همگرا و هم واگرا باشد، پس اگر در d واگرا باشد به ازای همه x هایی که $|x| > |d|$ ، واگراست.

یافتن بازه همگرایی

بازه همگرایی یک سری توانی چون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را اغلب می‌توان با به کار بردن آزمون نسبت یا آزمون ریشه در مورد سری قدرمطلقها

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

پیدا کرد. مثلاً اگر

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} \quad \text{یا اگر} \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right|$$

آنگاه

الف) $|a_n x^n|$ در همه مقادیری از x که به ازای آنها $\rho < 1$ ، همگراست.

ب) $|a_n x^n|$ در همه مقادیری از x که به ازای آنها $\rho > 1$ ، واگراست.

پ) $|a_n x^n|$ در مقداری از x که به ازای آن $\rho = 1$ ، ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

چگونه می‌توان این سه گزاره را به صورت احکامی درباره سری $\sum a_n x^n$ بیان کرد؟ گزاره (الف) می‌گوید که $\sum a_n x^n$ در همه مقادیری از x که به ازای آنها $\rho < 1$ ، مطلقاً همگراست. اطلاعی که گزاره (ب) درباره سری $\sum a_n x^n$ می‌دهد بیشتر از آنچه در مورد $|a_n x^n|$ می‌گوید، نیست. سری در مقداری از x که به ازای آن $\rho = 1$ ، ممکن است همگرا یا واگرا باشد. در حالت (ب) عملاً می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\sum a_n x^n$ در همه مقادیری از x که به ازای آنها $\rho > 1$ ، واگراست. استدلال به این صورت است: همان طور که از بحثهای بخش ۶.۱۱ به یاد می‌آوردید، اینکه ρ بزرگتر از ۱ است بدین معنی است که یا

$$0 < |a_n x^n| < |a_{n+1} x^{n+1}| < |a_{n+2} x^{n+2}| < \dots$$

یا، به ازای n به قدر کافی بزرگ

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1.$$

بنابراین، جمله‌های این سری وقتی $n \rightarrow \infty$ به صفر میل نمی‌کنند، و سری بنا بر آزمون جمله n ام، با یا بدون قدرمطلقها واگراست. بنابراین، آزمونهای نسبت و ریشه، وقتی با موفقیت در مورد $\sum a_n x^n$ به کار روند، به سه نتیجه گیری زیر در مورد $\sum a_n x^n$ می‌انجامند:

الف) $\sum a_n x^n$ در همه مقادیری از x که به ازای آنها $\rho < 1$ ، مطلقاً همگراست.

ب) $\sum a_n x^n$ در همه مقادیری از x که به ازای آنها $\rho > 1$ ، واگراست.

پ) $\sum a_n x^n$ در مقداری از x که به ازای آن $\rho = 1$ ، ممکن است همگرا یا واگرا باشد.
در حالت (ب) به آزمون دیگری نیاز داریم. آزمون مقایسه‌ای، آزمون مقایسه‌ای حدی یا آزمون سری متناوب اغلب کارساز واقع می‌شوند. (مسئله ۴۶ را که در آن آزمون راب توصیف می‌شود ببینید.)

مثال ۱ بازه همگرایی سری زیر را بیابید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (۶)$$

حل: آزمون نسبت را در مورد سری قدرمطلقها به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x|.$$

پس سری اصلی مطلقاً همگراست اگر $|x| < 1$ و واگراست اگر $|x| > 1$. وقتی $x = +1$ ، سری به صورت زیر درمی‌آید

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

که واگراست. وقتی $x = -1$ ، سری به این صورت درمی‌آید

$$-(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots)$$

که بنا به قضیه لایب‌نیتس همگراست. بنابراین، سری (۶) به ازای $-1 \leq x < 1$ همگراست و به ازای تمام مقادیر دیگر x واگراست.

مثال ۲ سری زیر به ازای چه مقادیری از x همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{n^2}.$$

حل: این سری را به صورت یک سری توانی بر حسب متغیر $2x-5$ در نظر می‌گیریم. با کاربرد آزمون ریشه در مورد سری قدرمطلقها به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(2x-5)^n}{n^2} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2x-5|}{\sqrt[n]{n^2}} \\ &= \frac{|2x-5|}{1} = |2x-5|. \end{aligned}$$

قضیه ۴

قضیه مشتگیری جمله به جمله

اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی c باشد، آنگاه

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ نیز دارای شعاع همگرایی } c \text{ است،}$$

$$2. f(x) \text{ بر } (-c, c) \text{ مشتقپذیر است، و}$$

$$3. f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \text{ روی } (-c, c) \text{،}$$

در قضیه ۲ ظاهراً فقط از f و f' سخن به میان آمده است. ولی چون شعاع همگرایی f' با شعاع همگرایی f یکی است، این قضیه در مورد f' هم به همان اندازه صادق است یعنی f' مشتقی چون f'' بر $(-c, c)$ دارد. این نیز به نوبه خود نتیجه می‌دهد که f'' بر $(-c, c)$ مشتقپذیر است، و الی آخر. پس، اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ روی $(-c, c)$ همگرا باشد، در هر نقطه از $(-c, c)$ دارای مشتقات تمام مراتب است.

مثال ۴ درستی رابطه $(d/dx)(\sin x) = \cos x$ با مشتگیری جمله به جمله از سری مربوط به $\sin x$ به دست می‌آید

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$= \cos x.$$

همگرایی در يك یا هر دو نقطه انتهایی بازه همگرایی يك سری توانی ممکن است در فرایند مشتگیری از میان برود. به این دلیل است که در قضیه ۴ فقط از بازه $(-c, c)$ سخن به میان می‌آید.

مثال ۵ سری $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n/n)$ مثال ۱ به ازای $-1 \leq x < 1$ همگراست. سری مشتقات

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

يك سری هندسی است که فقط به ازای $-1 < x < 1$ همگراست. این سری در نقطه انتهایی $x = -1$ و نیز در نقطه انتهایی $x = 1$ واگراست.

(استفاده از آزمون نسبت هم به همین نتیجه می‌انجامسد.) سری در بازه‌های زیر مطلقاً همگراست

$$|2x-5| < 1 \quad \text{یا} \quad -1 < 2x-5 < 1$$

یا

$$2 < 2x < 6 \quad \text{یا} \quad 2 < x < 3$$

وقتی $x=2$ ، سری عبارت است از $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n/n^2]$ که همگراست.

وقتی $x=3$ ، سری عبارت است از $\sum_{n=1}^{\infty} [(1)^n/n^2]$ که همگراست. بنابراین، بازه همگرایی عبارت است از $2 \leq x \leq 3$.

گاهی آزمون مقایسه‌ای به خوبی هر آزمون دیگری عمل می‌کند.

مثال ۳ سری زیر به ازای چه مقدارهایی از x همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n!}.$$

حل: به ازای هر مقدار x ،

$$\left| \frac{\cos^n x}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}.$$

این سری به ازای هر مقدار x همگراست.

مشتگیری از سربهای توانی

قضیه بعدی می‌گوید که تابعی که به وسیله يك سری توانی تعریف می‌شود، در هر نقطه داخلی بازه همگرایی اش دارای مشتقاتی از تمام مراتب است. مشتقها را می‌توان با مشتگیری از جمله‌های سربهای اصلی به صورت سربهای توانی به دست آورد. اولین مشتق با يك بار مشتگیری از جمله‌های سری اصلی به دست می‌آید

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

برای به دست آوردن مشتق دوم، از جمله‌ها دوباره مشتق می‌گیریم، و همین طور الی آخر. قضیه را بدون اثبات بیان می‌کنیم و مستقیماً به سراغ چند مثال می‌رویم.

این نتیجه به اندازه نتیجه‌ای که در بخش ۴.۱۲ به دست آوردیم شسته‌رفته نیست چون در آنجا توانستیم با تحلیل يك باقیمانده نشان دهیم که بازه همگرایی، $1 \leq x \leq -1$ است. ولی در اینجا نتیجه سریعتر به دست آمد.

مثال ۸ انتگرال زیر را به صورت يك سری توانی بیان کنید

$$\int \sin x^x dx.$$

حل: از سری $\sin x$ به دست می‌آوریم

$$\sin x^x = x^x - \frac{x^{x^3}}{3!} + \frac{x^{x^5}}{5!} - \frac{x^{x^7}}{7!} + \dots,$$

$$-\infty < x < \infty.$$

بنابراین،

$$\int \sin x^x dx = C + \frac{x^x}{x} - \frac{x^{x^3}}{7 \times 3!} + \frac{x^{x^5}}{11 \times 5!} - \frac{x^{x^7}}{15 \times 7!} + \dots,$$

$$-\infty < x < \infty.$$

مثال ۹ مطلوب است برآورد $\int_0^1 \sin x^x dx$ با خطایی کوچکتر از ۰.۰۰۰۱.

حل: با توجه به انتگرال نامعین در مثال ۸ داریم

$$\int_0^1 \sin x^x dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{7 \times 3!} + \frac{1}{11 \times 5!} - \frac{1}{15 \times 7!} + \frac{1}{19 \times 9!} - \dots$$

این سری، متناوب است و با آزمایش درمی‌یابیم که

$$\frac{1}{11 \times 5!} \approx 0.000076$$

نخستین جمله‌ای است که از لحاظ عددی کوچکتر از ۰.۰۰۰۱ است. با توجه به مجموع دوجمله قبل داریم

$$\int_0^1 \sin x^x dx \approx \frac{1}{x} - \frac{1}{7 \times 3!} \approx 0.310.$$

با دوجمله بیشتر، برآورد زیر را با خطایی کوچکتر از 10^{-6}

انتگرالگیری از سربهای توانی

از يك سری توانی همان‌طور که می‌توان جمله به جمله مشتق گرفت، انتگرال جمله به جمله هم می‌توان گرفت. سری جدید مسلماً در بازه بازی که سری اصلی همگراست، همگرا می‌باشد و ممکن است در يك یا هر دو نقطه انتهایی نیز همگرا باشد. توجیه انتگرالگیری جمله به جمله از يك سری، قضیه زیر است که این قضیه را نیز بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۵

قضیه انتگرالگیری جمله به جمله

اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی c باشد، آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad ۱.$$

نیز دارای شعاع همگرایی c است،

۲. $\int f(x) dx$ به ازای x های متعلق به $(-c, c)$ وجود دارد،

۳. بر $(-c, c)$ $\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C$

مثال ۶ سری

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

روی بازه باز $-1 < t < 1$ همگراست. بنابراین

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

$$= \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \right]_0^x$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

همان‌طور که می‌دانید، سری اخیر در $x=1$ نیز همگراست ولی این نتیجه از قضیه بالا به دست نمی‌آید.

مثال ۷ با قرار دادن t^2 به جای t در سری مثال ۶، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots, \quad -1 < t < 1.$$

بنابراین

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \right]_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

ملاحظه این مطلب، از

به دست می آوریم

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

جمله به جمله مشتق می گیریم و در هر مشتق $f^{(n)}(x)$ قرار می دهیم $x=0$. به این ترتیب به ازای هر n خواهیم داشت

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{یا} \quad f^{(n)}(0) = n! a_n$$

پس

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad -c < x < c. \quad (7)$$

یک پیامد فوری این، آن است که سریهای نظیر

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \dots$$

و

$$x^2 e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \dots$$

که از ضرب سری مکلورن در توانهای x به دست می آیند و نیز سریهایی که از انتگرالگیری و مشتقگیری از سریهای توانی حاصل می شوند، خودشان سریهای مکلورن تولید شده به وسیله توانی هستند که این سریها معرف آنها می باشند.

برابری سریهای توانی

پیامد دیگری از (7) این است که اگر دوسری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ به ازای همه مقادیر x در یک بازه باز شامل مبدأ $x=0$ باهم برابر باشند، آنگاه به ازای هر n ، $a_n = b_n$ زیرا اگر

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad -c < x < c$$

آنگاه a_n و b_n هر دو برابرند با $f^{(n)}(0)/n!$

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx 0.310268$$

و فقط با یک جمله دیگر، برآورد زیر با خطایی کوچکتر از 10^{-9} به دست می آید

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600}$$

$$+ \frac{1}{6894720} \approx 0.310268303$$

برای تضمین این میزان دقت با فرمول خطای قاعده ذوزنقه ای، باید بازه را به 13000 زیر بازه تقسیم کنیم.

مثال ۱۰. مطلوب است برآورد $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^4} dx$ با خطایی کوچکتر از 10^{-4} .

حل: بسط دوجمله ای $(1+x^4)^{1/2}$ این است

$$(1+x^4)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8 + \dots$$

جملات این سری، پس از جمله دوم، به تناوب مثبت و منفی است. پس با خطایی کوچکتر از 0.000003 داریم

$$\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^4} dx = \left[x + \frac{1}{2 \times 5} x^5 - \frac{1}{8 \times 9} x^9 + \dots \right]_0^{0.5}$$

$$= 0.5 + 0.0031 - 0.000003 + \dots$$

$$\approx 0.5031.$$

سری مکلورن تولید شده به وسیله $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

در آغاز بخش حاضر این پرسش را مطرح کردیم که آیا تابع

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

که به وسیله یک سری توانی همگرا تعریف می شود دارای سری تیلری هست یا نه. اکنون می توانیم پاسخ دهیم که تابعی که به وسیله یک سری توانی با شعاع همگرایی $c > 0$ تعریف می شود دارای سری مکلورنی است که در هر نقطه از $(-c, c)$ به تابع همگراست. چرا؟ زیرا سری مکلورن تولید شده به وسیله تابع

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ عبارت است از خود سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برای

ضرب سریهای توانی

موضوع را با ذکر مثالی روشن می‌کنیم.

مثال ۱۱ با ضرب سری مربوط به e^x و سری مربوط به $\cos x$ در یکدیگر، جملات بسط $e^x \cos x$ به سری مکلاورن را تا x^4 به دست آورید.

حل: با توجه به بخش ۳۰۱۲،

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

واضح است که اگر فقط به جملات شامل x^n به ازای $n \leq 4$ نیاز داشته باشیم می‌توانیم هر دوسری را در جمله x^4 ببریم و چندجمله‌ایهای حاصل را در هم ضرب کرده و همه جملاتی را که شامل توانهای بالاتر نظیر x^5, x^6, \dots هستند کنار بگذاریم. نتیجه این است

$$e^x \cos x = 1 + x + x^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{2!} \right) + x^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!} \right)$$

$$+ x^4 \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!2!} + \frac{1}{4!} \right) + \dots$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \dots \quad (۸)$$

با استفاده از $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ می‌توانیم نتیجه زیر را به دست آوریم (این نتیجه را در اینجا ثابت نمی‌کنیم)

$$e^x \cos x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{n!} x^n \quad (۹)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4)}{n!} x^n$$

چون

$$1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}, \quad 1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}.$$

به کمک رابطه (۹) به آسانی نشان داده می‌شود که سری $e^x \cos x$ به ازای همه مقادیر حقیقی x مطلقاً همگراست. این امر را قضیه زیر نیز، که آن را ثابت نخواهیم کرد، تضمین می‌کند.

قضیه ۶

قضیه ضرب سریها در مورد سریهای توانی

اگر هر دوی $\sum a_n x^n$ و $\sum b_n x^n$ به ازای $|x| < R$ مطلقاً همگرا باشند و

$$c_n = a_n b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (۱۰ \text{ الف})$$

آنگاه سری $\sum c_n x^n$ نیز به ازای $|x| < R$ مطلقاً همگراست، و

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)$$

$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \quad (۱۰ \text{ ب})$$

□ تقسیم سریهای توانی

باز هم موضوع را با آوردن مثالی توضیح می‌دهیم.

مثال ۱۲ تعدادی از جملات سری مکلاورن $\tan x$ را با تقسیم سری $\sin x$ بر سری $\cos x$ به دست آورید.

حل: تقسیم را به همان صورتی که تقسیم معمولی چندجمله‌ایها را در جبر انجام می‌دهند، انجام می‌دهیم، جمله‌ها را تا x^5 تعقیب می‌کنیم و همه توانهای بالاتر x را کنار می‌گذاریم

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{15} x^5 + \dots = \tan x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sin x \\ x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} \dots \\ \hline x^3 - \frac{x^5}{2} \dots \\ \hline \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{4} \dots \\ \hline \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} \dots \\ \hline \frac{1}{15} x^5 \dots \\ \hline \frac{1}{15} x^5 \end{array} \right\}$$

مثال ۱۳ فرض کنید

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

بنابراین

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{3!}, a_4 = 0, \dots$$

و نیز فرض کنید

$$g(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

بنابراین

$$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = -\frac{1}{2!}, b_3 = 0, b_4 = \frac{1}{4!}, \dots \text{ و غیره.}$$

در این صورت

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

که در آن

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0} = 0$$

$$c_1 = \frac{a_1 - b_1 c_0}{b_0} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

و الی آخر. اگر مقادیر c_0, c_1, \dots, c_{n-1} را بدانیم، مقدار c_n از رابطه (۱۲) ب) بر حسب ضرایب معلوم به دست می آید. ■

مسئله‌ها

در مسئله‌های ۱-۲، بازه همگرایی مطلق را بیابید. اگر این بازه متناهی است، معلوم کنید که سری در هر نقطه انتهایی همگراست یا نه.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad ۱.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n \quad ۲.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{2^n} \quad ۳.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \quad ۴.$$

پس تا جمله x^5 داریم

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \dots \quad (۱۱)$$

ما این چند جمله اول سری $\tan x$ را در مثال ۲ی بخش ۶.۱۲ به کار خواهیم برد. ■

فکته چون $\cos(\pi/2) = 0$ ، مسلماً نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که سری مکلاورن $\tan x$ در خارج از بازه $|x| < \pi/2$ همگرا باشد.

برای محاسبه ضرایب سری مکلاورن $f(x)/g(x)$ روش دیگری هست که به آسانی می‌توان آن را قابل استفاده در کامپیوتر کرد. این روش مبتنی بر واقعیات زیر است.

۱. اگر به ازای $f(x) = \sum a_n x^n$ ، $|x| < R_1$ و به ازای $g(x) = \sum b_n x^n$ ، $|x| < R_2$ داشته باشیم $g(x) \neq 0$ و $b_0 = g(0) \neq 0$ ، آنگاه $f(x)/g(x)$ روی بازه‌ای چون $(-h, h)$ دارای نمایشی به شکل سری توانی $\sum c_n x^n$ است. ۲. در آن بازه،

$$\begin{aligned} \sum a_n x^n = f(x) &= g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \sum b_n x^n \cdot \sum c_n x^n \\ &= \sum_n \left(\sum_{k=0}^n b_k c_{n-k} \right) x^n \end{aligned}$$

و از این رو

$$a_n = \sum_{k=0}^n b_k c_{n-k}.$$

به عبارت دیگر

$$a_0 = b_0 c_0, \quad a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0, \quad \text{و غیره.}$$

بنابراین، ضرایب c_n را می‌توان یکی پس از دیگری به صورت زیر به دست آورد

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}, \quad c_1 = \frac{a_1 - b_1 c_0}{b_0} \quad (۱۲ \text{ الف})$$

و، به ازای هر $n \geq 1$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - (b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + \dots + b_n c_0)}{b_0} \\ &= \frac{a_n - \sum_{k=1}^n b_k c_{n-k}}{b_0}. \end{aligned} \quad (۱۲ \text{ ب})$$

۰۲۳. به کمک سریها تحقیق کنید که

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^x \cos t \, dt = \sin x \quad (\text{ب})$$

پ) $y = e^x$ يك جواب معادله $y' = y$ است.۰۲۴. سری مکلورن $1/(1+x)^2$ را از روی سری $1/(1+x)$ بیابید.۰۲۵. به کمک سری مکلورن $1/(1-x^2)$ يك سری برای $2x/(1-x^2)^2$ بیابید.۰۲۶. به کمک اتحاد $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ يك سری برای $\sin^2 x$ پیدا کنید. سپس، بامشتگیری از این سری يك سری برای $2 \sin x \cos x$ به دست آورید. تحقیق کنید که این، سری مربوط به $\sin 2x$ است.

ماشین حساب درمسأله‌های ۲۷-۳۴، با استفاده از سری و يك ماشین حساب، هرانتگرال را با خطایی کوچکتر از ۰۰۰۱ ده برآورده کنید.

$$\int_0^{0.2} \sin x^2 \, dx \quad ۰۲۷$$

$$\int_0^{0.1} \tan^{-1} x \, dx \quad ۰۲۸$$

$$\int_0^{0.1} x^2 e^{-x^2} \, dx \quad ۰۲۹$$

$$\int_0^{0.1} \frac{\tan^{-1} x}{x} \, dx \quad ۰۳۰$$

$$\int_0^{0.2} \frac{1 - e^{-x}}{x} \, dx \quad ۰۳۱$$

$$\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx \quad ۰۳۲$$

$$\int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \quad ۰۳۳$$

$$\int_0^{0.25} \sqrt[3]{1+x^2} \, dx \quad ۰۳۴$$

۰۳۵. ماشین حساب الف) مطلوب است يك سری توانی برای

$$\sinh^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ۰۵$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad ۰۶$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (x+2)^n \quad ۰۷$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad ۰۸$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad ۰۹$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2} \quad ۰۱۰$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} \quad ۰۱۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^5} \quad ۰۱۲$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n e^n}{n+1} \quad ۰۱۳$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos x)^n}{n^n} \quad ۰۱۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n \quad ۰۱۵$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+6)^n}{n!} \quad ۰۱۶$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n (n+1)(x-1)^n \quad ۰۱۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-2)^n}{n \times 2^n} \quad ۰۱۸$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2} \right)^n \quad ۰۱۹$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n-1}}{n} \quad ۰۲۰$$

۰۲۱. مجموع سری مذکور درمسأله ۱۶ را بیابید.

۰۲۲. در بازه‌ای که سری مسأله ۱۹ همگراست، مجموع سری چیست؟

به رابطه زیر می‌انجامد

$$\ln \sec x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \dots$$

۴۵. دایره‌ای به شعاع $r_1 = 1$ در مثلث متساوی‌الاضلاع محاط شده‌است. دایره‌ای به شعاع r_2 از رئوس این مثلث می‌گذرد و در مربعی محاط‌است. دایره‌ای به شعاع r_3 از رئوس این مربع می‌گذرد و در یک پنج ضلعی منتظم محاط‌است. به همین ترتیب ادامه دهید: دایره‌ای به شعاع r_{n-1} از رئوس یک n ضلعی منتظم می‌گذرد و در یک $(n+1)$ ضلعی منتظم محاط‌است.

الف) نشان دهید که $r_2 = r_1 \sec(\pi/3)$ ، $r_3 = r_2 \sec(\pi/4)$ ، و به طور کلی

$$r_n = r_{n-1} \sec \frac{\pi}{n+1}$$

(ب) نشان دهید که

$$\ln r_n = \ln r_1 + \ln \sec \frac{\pi}{3} + \ln \sec \frac{\pi}{4} + \dots$$

$$+ \ln \sec \frac{\pi}{n+1}$$

(پ) آیا وقتی n به بینهایت می‌گراید، r_n حدی متناهی دارد؟(پیشنهاد: سری $\sum_{n=3}^{\infty} \ln \sec(\pi/n)$ را با استفاده از آزمونمقایسه‌ای حدی با سری $\sum_{n=3}^{\infty} 1/n^2$ مقایسه کنید.) می‌توانید از پاسخ مسئله ۴۴ استفاده کنید.

۴۶. آزمون داب (یا گادس). این آزمون را می‌توان تعمیمی از آزمون نسبت در نظر گرفت. در واقع، آزمون راب آهنگ رشد سری u_n ، را با آهنگ رشد متناظر p -سری $\sum 1/n^p$ مقایسه می‌کند. (اگر سری u_n سریعتر از یک p -سری همگرا رشد نکند، آنگاه سری u_n همگراست. اگر سری دست کم به همان سرعت یک p -سری واگرا رشد کند، آنگاه سری u_n واگراست.) این آزمون را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

آزمون داب. اگر $\sum u_n$ سری باشد که جملاتش ثابتهای مثبت باشند و ثابتهای C ، K ، و N وجود داشته باشند به قسمی که

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{C}{n} + \frac{f(n)}{n^2} \quad (i)$$

که در آن به ازای $n \geq N$ داشته باشیم $|f(n)| < K$ ، آنگاه $\sum u_n$

(ii الف) همگراست اگر $C > 1$

(ب) با استفاده از نتیجه الف)، $\sinh^{-1} 0.25$ را تا سه رقم اعشاری برآورد کنید.

۳۶. ماشین حساب مطلوب است برآورد $\int_0^1 \cos x^2 dx$ با خطایی کوچکتر از یک میلیونیم.

۳۷. با آوردن مثال نشان دهید سریهای توانی وجود دارند که فقط در $x=0$ همگرايند.

۳۸. با آوردن مثالهایی نشان دهید که همگرایی یک سری در یک نقطه انتهایی بازه همگرایی اش ممکن است مشروط یا مطلق باشد.

۳۹. فرض کنید r عدد مثبت دلخواهی باشد. با استفاده از قضیه ۳ نشان دهید که اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به ازای $-r < x < r$ همگرا باشد، آنگاه به ازای $-r < x < r$ مطلقاً همگراست.

۴۰. با استفاده از آزمون نسبت نشان دهید که سری دوجمله‌ای به ازای $|x| < 1$ همگراست. (با وجود این، از اینجا معلوم نمی‌شود که این سری به $(1+x)^n$ همگراست.)

۴۱. با انجام عمل ضرب مناسبی، جمله‌های سری مک‌لورن مربوط به $e^x \sin x$ را تا x^5 بیابید. این سری قسمت موهومی سری مربوط به

$$e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x}$$

است. با توجه به این مطلب، پاسخ خود را تحقیق کنید. سری مربوط به $e^x \sin x$ به ازای چه مقادیری از x باید همگرا باشد؟ چرا؟

۴۲. عدد ۱ را بر تعداد کافی از جملات سری مک‌لورن $\cos x$ تقسیم کنید تا جملات سری مک‌لورن $\sec x$ تا x^4 به دست آید. فکرمی کنید صورت کامل سری مک‌لورن حاصل در چه جاهایی باید همگرا باشد؟

۴۳. از اولین سه جمله ناصفر سری مک‌لورن مربوط به $\tan x$ از ۰ تا x انتگرال بگیرید تا اولین سه جمله ناصفر سری مک‌لورن مربوط به $\ln \sec x$ به دست آید.

۴۴. ادامه مسئله ۴۳. راه دیگری برای به دست آوردن تعدادی از جملات سری مک‌لورن مربوط به $\ln \sec x$ به صورت زیر است: فرض کنید $\sec x = 1 + y$ و بنابراین

$$y = x^2/2 + 5x^4/24 + \dots$$

(از مسئله ۴۲). در این صورت، به ازای $|y| < 1$ داریم

$$\ln \sec x = \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \dots$$

با صرف نظر کردن از توانهای x بالاتر از x^4 ، نشان دهید که این نیز

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 - \frac{1}{2}(x-1) + \dots \right] = 1.$$

مثال ۲. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} [(\sin x - \tan x)/x^3]$.

حل: سریهای مکاورن $\sin x$ و $\tan x$ تا جمله x^5 عبارت اند از

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

از این دو

$$\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} - \dots$$

$$= x^3 \left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \dots \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \dots \right)$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

وقتی از سریها برای محاسبه حد $\lim_{x \rightarrow 0} (1/\sin x - 1/x)$

مذکور در مثال ۷ بخش ۸.۳ کمک می گیریم، نه تنها حد را به طرز موفقیت آمیزی محاسبه می کنیم بلکه همچنین، فرمول تقریبی خوبی برای $\csc x$ کشف می کنیم.

مثال ۳. مطلوب است

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

حل:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}{x \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}$$

$$= \frac{x^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots \right)}{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \dots \right)} = x \frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \dots}.$$

(ii ب) و اگر است اگر $C \leq 1$.

الف) نشان دهید که نتایج آزمون راب با آنچه از قبل درباره همگرایی و واگرایی سریهای $\sum 1/n$ و $\sum 1/n^2$ می دانستید تطبیق می کند.

ب) جملات سری $\sum u_n$ به طور بازگشتی با فرمولهای $u_1 = 1$

$$u_{n+1} = \frac{(2n-1)(2n-1)}{2n(2n+1)} u_n$$

تعریف می شوند. با استفاده از آزمون راب معلوم کنید که سری همگراست یا واگرا.



TOOLKIT PROGRAMS

Taylor Series

۶.۱۲ صورت های مهم

وقتی نسبت دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در همسایگی نقطه ای چون a که در آنجا $f(a)$ و $f(b)$ صفرند در نظر می گیریم، می توانیم به سرعت حد

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (1)$$

را تعیین کنیم اگر سریهای تیلری که به این توابع در یک همسایگی $x=a$ همگرا هستند، بر ما معلوم باشند. مثالهای زیر نشان می دهند که این کار چگونه انجام می شود.

مثال ۱. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 1} [(\ln x)/(x-1)]$.

حل: فرض کنید $f(x) = \ln x$ ، $g(x) = x-1$. سری تیلر مربوط به $f(x)$ به ازای $a=1$ به این صورت به دست می آید

$$f(x) = \ln x, \quad f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = 1/x, \quad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -1/x^2, \quad f''(1) = -1$$

پس

$$\ln x = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \dots$$

$$\frac{\ln x}{x-1} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \quad .12$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3} \quad .13$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3 \cos x} \quad .14$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (e^{-1/x^2} - 1) \quad .15$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1 - \cos x} \quad .16$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 x}{x} \quad .17$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{x-1} \quad .18$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{e^x} \quad .19$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 - 2\cos x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad .20$$

۲۱. الف) ثابت کنید که وقتی $x \rightarrow +\infty$

$$\int_0^x e^{t^2} dt \rightarrow +\infty$$

ب) مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow \infty} x \int_0^x e^{t^2 - x^2} dt$

۲۲. مقادیر r و s را چنان بیابید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-2} \sin^3 x + rx^{-2} + s) = 0.$$

۲۳. ماشین حساب تقریب $\frac{1}{x} + x/6$ در $\csc x$ در مثال ۳

به تقریب $\sin x \approx \frac{6x}{6+x^2}$ منجر می شود. هر دو طرف این تقریب اخیر را به ازای (رادیان) $\pm 1.0, \pm 0.1, \pm 0.01$ $x =$ محاسبه کنید. این مقادیر x را در تقریب $\sin x \approx x$ آزمایش کنید. چه تقریبی از $\sin x$ به نظر می رسد نتایج بهتری به دست دهد؟

بنا بر این

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{x^3} - \frac{x^2}{6!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \dots} \right) = 0.$$

درواقع، از روی سریهای فوق می توان دید که اگر $|x|$ کوچک باشد، آنگاه

$$\blacksquare \quad \csc x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{6} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \approx x \cdot \frac{1}{6} = \frac{x}{6}$$

مسأله ها

حدهای مذکور در مسائل ۱-۲۰ را به کمک سریها محاسبه کنید.

$$1. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2}$$

$$3. \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t - \frac{1}{2}t^2}{t^4}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cosh x}$$

$$6. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin h)/h - \cos h}{h^2}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}$$

$$9. \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z^2) - \sinh(z^2)}{z^6}$$

$$10. \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - \cosh t}{t^2}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$



TOOLKIT PROGRAMS

Taylor Series

□ ۲.۱۲ يك معمای کامپیوتری

ممکن است در عمل هیچگاه مجبور نشوید که از سریها برای محاسبه مقدار $\sin 35^\circ$ ، e ، $\ln 2$ ، π یا نظایر اینها استفاده کنید زیرا اگر به هر يك از این اعداد نیاز داشته باشید می توانید به جدول مربوطه نگاه کنید و یا (با احتمال بیشتر) x را به کامپیوتر بدهید و از کامپیوتر، $\ln x$ یا چیز دیگری را بخواهید. ولی تا مدتی قبل، يك ایده جدید و هیجان انگیز در ریاضیات، تشخیص این نکته بود که می توان همه اطلاعات مربوط به e را از این واقعیت که $e^0 = 1$ و مشتق e^x خود e^x است، به دست آورد (این ایده هنوز هم می تواند هیجان انگیز باشد). کافی است سری مربوط به e^x را به دست آوریم که به ازای همه x ها به e^x همگراست. همچنین می توانیم با ضرب کردن سری مربوط به e^x در سری مربوط به e^y نشان دهیم که $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ ؛ با مشتگیری می توانیم نشان دهیم که مشتق سری مربوط به e^x خود همین سری است، والی آخر. (چند سال پیش يك ریاضیدان برجسته آمریکایی به نام تاملینسن فورت، کتابی در زمینه حساب دیفرانسیل و انتگرال نوشت که با بحث سریها شروع شده و بقیه موضوع بر اساس این بحث شرح و بسط داده شده بود.)

خوانندگان که به علوم کامپیوتر علاقه دارند، «چیستان» زیر به نظرشان جالب خواهد آمد. ما خواستیم به منظور روشن شدن موضوع، سدهوش متفاوت محاسبه e را با هم مقایسه کنیم.

۱. e ریشه معادله $\ln x = 1$ است. (روش نیوتن با نقطه شروع $x_1 = 3$ عدد 2.718281828 را در سومین تکرار به دست داد.)

۲. e مجموع سری زیر است

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

(وقتی ۱۴ جمله و یا تعداد بیشتری از جملات این سری را به کار بردیم، همین درجه از دقت حاصل شد.)

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad ۳.$$

این را اغلب به عنوان تعریف e در نظری می گیرند. اگر کامپیوتری در دسترس باشد، می توان هر عدد بزرگ n را انتخاب کرد و از کامپیوتر خواست که مقدار $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = s_n$ را چاپ کند. البته، این هم آموزنده است که ببینیم در جریان کار به ازای مقادیر مختلف n چه اتفاقی می افتد. وقتی ما این کار را کردیم با وضع شگفت انگیزی روبرو شدیم. در اینجا قسمتی از جدول مقادیر را که ما به دست آوردیم، و از $n = 10^5$ شروع می شود، می بینید.

| n | $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ |
|-----------------|---|
| ۱۰۵ | ۲۷۱۸۲۶ ۸۲۳۷ |
| 2×10^5 | ۲۷۱۸۲۷ ۵۳۰۵ |
| 3×10^5 | ۲۷۱۸۲۷ ۶۶۶۴ |
| 4×10^5 | ۲۷۱۸۲۷ ۷۴۷۹ |
| 5×10^5 | ۲۷۱۸۲۷ ۷۷۵۱ |
| 6×10^5 | ۲۷۱۸۲۷ ۹۱۱۰ |
| 7×10^5 | ۲۷۱۸۲۷ ۹۱۱۰ (این چیست؟ يك نتیجه تکراری؟) |
| 8×10^5 | ۲۷۱۸۲۸ ۱۸۲۸ (هورا!!) |
| 9×10^5 | ۲۷۱۸۲۷ ۹۱۱۰ (ماشین این عدد را دوست دارد؟) |
| 10^6 | ۲۷۱۸۲۸ ۱۸۲۸ (خوب، این بهتر است.) |
| 10^{13} | ۱ (جریان از چه قرار است؟) |
| \vdots | |
| 10^{19} | ۱ |

این را به صورت يك معما مطرح می کنیم. ماشین چه می کند؟ (ابتدا حداکثر سعی خود را برای حل معما بکنید و سپس ادامه مطلب را بخوانید). اگر سر نخ می خواهید، تعریف a^b را به یاد آورید.

حل معما

مادر بالا مقادیری برای $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ به ازای چند مقدار n بین 10^5 و 10^{19} عرضه کرده ایم. خطاهای آشکار در بعضی از این پاسخها را چگونه می توان توجیه کرد؟

با تعریف a^b به صورت $\exp(b \ln a)$ شروع می کنیم

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right). \quad (۱)$$

به ازای مقادیر بزرگ n ، $1/n$ کوچک است و ما به سری مربوط به $\ln(1+x)$ با ضابطه $x = 1/n$ نظری می افکنیم. نتیجه این است

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \dots \quad (۲)$$

واضح است که این سری وقتی $n \rightarrow \infty$ به صفر میل می کند. اما رابطه (۱) ایجاب می کند که این سری را در n ضرب کنیم. یا

انجام دادن این کار، به دست می آوریم

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \dots \quad (3)$$

به ازای مقادیر بزرگ n ، جمله های $1/3n^2$ به بعد در مقایسه با دوجمله اول بسیار کوچک اند. پس، به عنوان اولین تقریب، داریم

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx \exp\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \quad (2)$$

در باره داده های نامنظمی که از کامپیوتر به دست آوردیم چه می توان گفت؟ ما حدس زدیم که دلیل آن، نادقیق بودن مقادیر $\ln(1 + 1/n)^n$ است. از این رو به کامپیوتر برنامه ای دادیم که آن داده ها را به دست دهد. در عین حال، از کامپیوتر خواستیم که مقادیر $1 - (1/2n) + (1/3n^2)$ و $1 - (1/2n)$ را بدهد. مقادیر اخیر به ازای همه مقادیر n که در جدول نشان داده شده، یکسان بودند. و این مقادیر مسلماً دقیقتر از مقادیر ماشین برای $n \ln(1 + 1/n)$ هستند.

| n | $n \ln(1 + 1/n)$ | $1 - (1/2n) + (1/3n^2)$ | $1 - (1/2n)$ |
|-------------------|------------------|-------------------------|--------------|
| ۱۰۵ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۵ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۵ | |
| 2×10^5 | ۰۰۹۹۹۹۹ ۷۶ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۷۵ | |
| 3×10^5 | ۰۰۹۹۹۹۹ ۸۱ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۸۳۳۳ | |
| 4×10^5 | ۰۰۹۹۹۹۹ ۸۲ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۸۷۵ | |
| 5×10^5 | ۰۰۹۹۹۹۹ ۸۵ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۰ | |
| 6×10^5 | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۰ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۱۶۶۷ | |
| 7×10^5 | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۰ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۲۸۵۷ | |
| 8×10^5 | ۱ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۴۴۴۴ | |
| 9×10^5 | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۵ | |
| 10^6 | ۱ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۵۴۵۵ | |
| 1.1×10^6 | ۱.۰۰۰۰۰۰ ۰۱ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۵۸۳۳ | |
| 1.2×10^6 | ۰۰۹۹۹۹۹ ۶ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۶۱۵۴ | |
| 1.3×10^6 | ۰۰۹۹۹۹۹ ۰ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۶۴۲۹ | |
| 1.4×10^6 | ۱.۰۰۰۰۰۰ ۰۲ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۶۶۶۷ | |
| 1.5×10^6 | ۱.۰۰۰۰۰۰ ۰۵ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۶۸۷۵ | |
| 2×10^6 | ۱ | ۰۰۹۹۹۹۹ ۹۷۵۰۰ | |

طبیعتاً اگر ماشین مقادیر غلطی از $n \ln(1 + 1/n)$ داشته

باشد، پاسخهای غلطی برای $\exp(n \ln(1 + 1/n))$ خواهد داد. پس منشأ اشکال را پیدا کرده ایم: مقادیرهای $\ln(1 + 1/n)$ آن قدر دقیق نیستند که وقتی در n ضرب می شوند (اگر $n \geq 3 \times 10^5$) پاسخهای صحیحی به دست دهند. به ازای $n = 10^{13}$ کامپیوتر می گوید $\ln(1.0000000000000001) = 0$. وقتی این مقدار در 10^{13} ضرب شود باز هم کامپیوتر می گوید «صفر» و $\exp(0) = 1$. ما از محدوده قابلیت اعتماد کامپیوتر فراتر رفته ایم. این نه تقصیر کامپیوتر است و نه تقصیر ما، ولی ما بصیرتی در حل معما به دست آورده ایم.

يك نکته دیگر: اگر تقریب (۲) و برابری زیر را به کار گیریم

$$\exp\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \exp(1) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2n}\right) \quad (5)$$

می توانیم يك گام جاورتر برویم. به یاد داشته باشید که ما از $n \geq 3 \times 10^5$ صحبت می کنیم، بنابراین

$$(1/2n) \leq (1/6) \times 10^{-5}.$$

اگر در سری مکلاون مربوط به $\exp(h) = e^h$ قرار دهیم $h = -1/2n$ ، برای

$$\exp\left(-\frac{1}{2n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} \quad (6)$$

را بنابه قضیه برآورد سری متناوب با خطایی کوچکتر از $(1/2n)(1/2n)^2$ به دست می آوریم. این خطا به ازای $n \geq 3 \times 10^5$ کوچکتر از 3×10^{-11} است. بنابراین، به ازای مقادیر بزرگ n ، با ترکیب نتایج روابط (۴)، (۵)، و (۶) خواهیم داشت

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \approx e - \frac{e}{2n}.$$

به ازای $n = 10^6$ ماشین نباید مقدار ۲۰۷۱۸۲۸۱۸۲۸ را (که این قدر دقیق به نظر می رسد) به دست دهد بلکه باید عدد ۲۰۷۱۸۲۸۰۴۶۹ را تا رقم اعشاری بدهد.

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. قضیه تیلر با باقیمانده را بیان کنید.

۲. می توان (با کمی دشواری) نشان داد که در هر مقدار x ، تابعی که به صورت زیر تعریف می شود

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-1/x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

۵. الف) با قراردادن سری مربوط به $y = 1 - \cos x$ در سری مربوط به $\ln(1-y)$ ، سری مکلورن مربوط به $\ln(\cos x)$ را تا جمله x^6 به دست آورید.
ب) نتیجه قسمت (الف) را به کار برید و

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$$

را تا پنج رقم اعشاری برآورد کنید.

۶. مطلوب است محاسبه $\int_0^1 [(\sin x)/x] dx$ تا سه رقم اعشاری.

۷. مطلوب است محاسبه $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ تا سه رقم اعشاری.

۸. تابع $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ را بر حسب توانهای $(x-1)$ بسط دهید و سه جمله ناصفر را به دست آورید.

۹. تابع $f(x) = 1/(1-x)$ را بر حسب توانهای $(x-2)$ بسط دهید و بازه همگرایی را پیدا کنید.

۱۰. $f(x) = 1/(x+1)$ را بر حسب توانهای $(x-3)$ بسط دهید.

۱۱. $\cos x$ را بر حسب توانهای $(x-\pi/3)$ بسط دهید.

۱۲. نخستین سه جمله بسط تابع $1/x$ را به سری تیلر حول نقطه π به دست آورید.

۱۳. فرض کنید f و g توابعی باشند که در شرطهای زیر صدق می کنند: (الف) $f(0) = 1$ ، $f'(0) = g(0)$ ، $f'(x) = g(x)$ ، $g'(x) = f(x)$ ؛ (ب) $g(0) = 0$. مطلوب است برآورد $f(1)$ تا سه رقم اعشاری.

۱۴. فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. ثابت کنید که

- الف) اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد، آنگاه $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$ ؛
ب) اگر $f(x)$ یک تابع فرد باشد، آنگاه $a_0 = a_2 = a_4 = \dots = 0$.

۱۵. چهار جمله اول سری مکلورن $f(x) = e^{(e^x)}$ را (تا جمله x^3) بیابید.

۱۶. الف) به کمک قضیه تیلر با باقیمانده، یک کران بالا برای خطای تقریب $e^h = 1 + h$ در صورتی که h بین ۰ و ۰۰۱ رده باشد، پیدا کنید.

- ب) ماشین حساب یا کامپیوتر مقادیر $n^{1/n}$ را به ازای $n = 10^m$ ، $m = 1, 2, 3, 4, \dots, 10$ ، محاسبه کنید و فهرست آنها را بنویسید.

پیوسته و دارای مشتقات تمام مراتب است. درصفر، مشتقها همگی صفرند.

الف) سری مکلورن تولید شده به وسیله این تسایع را بنویسید.

ب) باقیمانده $R_n(x)$ برای این تابع چیست؟ آیا این سری به ازای مقداری از x که مخالف صفر باشند همگراست؟ آیا سری در $x \neq 0$ به $f(x)$ همگراست؟ برای پاسخها یتان دلیل بیاورید.

۳. اگر قرار باشد یک سری تیلر بر حسب توانهای $x-a$ برای محاسبه عددی یک تابع به کار رود، چه چیزی در انتخاب a لازم یا مطلوب است؟ توضیح دهید.

۴. اگر $f(a) = g(a) = 0$ ، روشی را که بتواند برای یافتن $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$ مفید باشد شرح دهید.

۵. چه آزمونهایی را می توان برای یافتن بازه همگرایی یک سری توانی به کار برد؟ آیا این آزمونها در نقاط انتهایی بازه هم کارایی دارند؟ با ذکر مثال توضیح دهید.

مسأله های گوناگون

۱. الف) سری مکلورن تابع $x^2/(1+x)$ را بیابید.
ب) آیا این سری وقتی $x=2$ همگراست؟ (دلیل مختصری بیاورید.)

۲. بسط $\sin^{-1} x$ به سری مکلورن را با انتگرالگیری از سری مربوط به $(1-t^2)^{-1/2}$ از $t=0$ تا x به دست آورید. بازه های همگرایی این سریها را بیابید.

۳. با قراردادن سری مربوط به $y = \sin x$ در سری مربوط به e^y ، چهار جمله اول سری مکلورن مربوط به $e^{\sin x}$ را به دست آورید.

۴. با فرض $|x| > 1$ ، بسطهای زیر

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots, \quad x > 1$$

$$\tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots, \quad x < -1$$

را با انتگرالگیری از سری زیر از $x(> 1)$ تا $+\infty$ یا از $-\infty$ تا $x(< -1)$ به دست آورید

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1+(1/t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^8} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n^2} \quad ۰۲۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad ۰۲۸$$

در هریک از مسأله‌های ۲۹-۳۱، همه مقادیر x ی را که سری به‌ازای آنها همگراست بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n!} \quad ۰۲۹$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (\sin x)^n}{n^2} \quad ۰۳۰$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n \quad ۰۳۱$$

۰۳۲. تابعی به‌وسیله سری توانی زیر تعریف می‌شود

$$y = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{180}x^6 + \dots$$

$$+ \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (3n-2)}{(3n)!} x^{3n} + \dots$$

(الف) بازه همگرایی سری را بیابید.

(ب) نشان دهید تابعی که به‌وسیله این سری تعریف می‌شود در یک معادله دیفرانسیل به شکل $y'' = x^a y + b$ صدق می‌کند، و ثابتهای a و b را بیابید.

۰۳۳. اگر $a_n > 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، ثابت کنید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n / (1 + a_n) \text{ همگراست.}$$

۰۳۴. اگر $1 > a_n > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، ثابت کنید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - a_n) \text{ همگراست. (دانهمایی: نخست نشان دهید که } |\ln(1 - a_n)| \leq a_n / (1 - a_n) \text{)}$$

۰۳۵. یک حاصلضرب نامتناهی را که به‌صورت $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$

نشان داده می‌شود همگرا می‌گویند اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ همگرا باشد. (این سری، لگاریتم طبیعی حاصلضرب است.) ثابت کنید که این حاصلضرب همگراست اگر هر a_n بزرگتر از -1 و

$|a_n| < 1/2$ باشد. (دانهمایی: نشان دهید که وقتی $|a_n| < 1/2$

(ب) با فرض $\ln 10 = 2.30258509299404$ ، نشان دهید که $n^{1/n} = \exp(1/n \ln n)$

$$n^{1/n} \approx 1 + 10^{-m} (m \ln 10)$$

$$\approx 1.00000000002302585$$

تا ۱۵ رقم اعشاری به‌ازای $m = 10$ درست است. (ت) اگر $n = 10^{10}$ ، نشان دهید که در چند رقم آخر برآورد زیر از $n^{1/n}$ خطایی وجود دارد

$$n^{1/n} = 1.0000000000230258509299404$$

و تقریبی را که تا ۲۱ رقم اعشاری خوب است پیدا کنید.

۰۱۷. اگر $(1+x)^{1/3}$ را با $1+x/3$ تعویض کنیم و $0 \leq x \leq 1/10$ ، چه برآوردی می‌توان از مقدار خطا به‌دست داد؟

۰۱۸. عبارت زیر را به کمک سری محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) - \sin x}{1 - \cos^2 x}$$

۰۱۹. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} [(\sin x)/x]^{1/x^2}$

۰۲۰. فرض کنید که $\sum a_n$ یک سری همگرا متشکل از اعداد مثبت است. آیا $\sum \ln(1+a_n)$ همگراست؟ توضیح دهید.

در مسأله‌های ۲۱-۲۸، بازه همگرایی هر سری را بیابید. اگر این بازه متناهی است، همگرایی را در نقاط انتهایی بیازمایید.

$$1 + \frac{x+2}{3 \times 1} + \frac{(x+2)^2}{3^2 \times 2} + \dots + \frac{(x+2)^n}{3^n \times n} + \dots \quad ۰۲۱$$

۰۲۲

$$1 + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \dots + \frac{(x-1)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} \quad ۰۲۳$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n} \quad ۰۲۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \frac{(x-3)^n}{2^n} \quad ۰۲۵$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \frac{(x-2)^n}{3^n} \quad ۰۲۶$$

ب) با انتگرالگیری از رابطه قسمت (الف) نسبت به t از 0 تا x نشان دهید که

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}$$

که در آن

$$R_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt.$$

پ) اگر $x \geq 0$ ، نشان دهید که

$$|R_{n+1}| \leq \int_0^x t^{n+1} dt = \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

(دانهمایی: وقتی t از 0 تا x تغییر می‌کند، $1+t \geq 1$ و $t^{n+1}/(1+t) \leq t^{n+1}$)

$$\left(\left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt. \right)$$

ت) اگر $-1 < x < 0$ ، نشان دهید که

$$|R_{n+1}| \leq \left| \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-|x|} dt \right| = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1-|x|)}$$

(دانهمایی: اگر $0 < x \leq 1$ ، آنگاه $1-|x| \geq 1+t$ و

$$\left(\left| \frac{t^{n+1}}{1+t} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-|x|} \right)$$

ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل ثابت کنید که سری

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

به‌ازای $-1 < x \leq 1$ به $\ln(1+x)$ همگراست.

رابطه

$$|\ln(1+a_n)| \leq \frac{|a_n|}{1-|a_n|} < 2|a_n|$$

برقرار است.)

۳۶. با ضرب کردن جملات مناسبی از سریهای مکلورن $\tan^{-1}x$ و $\ln(1+x)$ در یکدیگر، جملات سری مکلورن حاصلضرب $(\tan^{-1}x) \cdot \ln(1+x)$ را تا x^5 بیابید.

۳۷. با تقسیم یا ضرب سریها، جملات سری مکلورن $\tan^{-1}x/(1-x)$ را تا x^5 بیابید.

۳۸. گسترش پیوسته خارج قسمتها. فرض کنید تابعی چون f به‌صورت سری توانی زیر نمایش داده می‌شود

$$f(x) = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

و $f(0) = 0$. در این صورت $a_0 = 0$ ، و جملات این سری را می‌توان بر x تقسیم کرد. حال اگر تابعی چون g به‌وسیله سری $\sum b_n x^n$ نمایش داده‌شود و $g(0) = 0$ و $g'(0) \neq 0$ ، آنگاه $b_0 = 0$ و $b_1 \neq 0$. پس می‌توان x ی را از صورت و مخرج خارج قسمت $f(x)/g(x) = \sum a_n x^n / \sum b_n x^n$ حذف کرد تا f/g به‌صورت خارج قسمت دوسری جدید نمایش داده شود. در این نمایش جدید، مخرج در $x=0$ صفر نمی‌شود زیرا $b_1 \neq 0$. جمله ثابت است. پس، خارج قسمت جدید دامنه تابع f/g را گسترش می‌دهد تا نقطه $x=0$ را دربرگیرد.

مثلاً، اگر $f(x) = x$ و $g(x) = e^x - 1$ ، فرمول

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots}$$

دامنه خارج قسمت f/g را گسترش می‌دهد تا شامل $x=0$ شود. این گسترش، که خارج قسمت دو تابع بی‌بسته ۱ و $1 + (x/2) + (x^2/3!) + \dots$ خود نیز پیوسته است. در سمت راست، صورت را بر مخرج تقسیم کنید تا سهضرب اول c_0 ، c_1 و c_2 برای سری $\sum c_n x^n$ که نشان‌دهنده گسترش پیوسته f/g است به‌دست آید.

۳۹. الف) با تقسیم یا به‌طریق دیگری نشان دهید که

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}.$$

پیوستها

پ ۱

اثبات قضیه‌های مربوط به حد از بخش ۹.۱

در این پیوست، قضیه‌های ۱ و ۲ از بخش ۹.۱ را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱

قضیه ترکیب حدها

اگر $\lim_{t \rightarrow c} F_1(t) = L_1$ و $\lim_{t \rightarrow c} F_2(t) = L_2$ ، آنگاه

i) $\lim [F_1(t) + F_2(t)] = L_1 + L_2$

ii) $\lim [F_1(t) - F_2(t)] = L_1 - L_2$

iii) $\lim F_1(t)F_2(t) = L_1L_2$

iv) $\lim kF_2(t) = kL_2$ (به ازای هر عدد k)

v) $\lim \frac{F_1(t)}{F_2(t)} = \frac{L_1}{L_2}$ ، $L_2 \neq 0$ ، با این شرط که

در تمام این حدها، $t \rightarrow c$.

$$\lim [F_1(t) + F_2(t)] = L_1 + L_2 \quad (i)$$

برای اینکه ثابت کنیم حدمجموع $F_1(t) + F_2(t)$ وقتی $t \rightarrow c$ عدد $L_1 + L_2$ است، باید نشان دهیم به ازای هر $\epsilon > 0$ عددی چون $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای همه t ها،

$$0 < |t - c| < \delta$$

$$\Rightarrow |F_1(t) + F_2(t) - (L_1 + L_2)| < \epsilon. \quad (۱ الف)$$

اگر ϵ مثبت باشد، $\epsilon/2$ هم مثبت است و چون $\lim_{t \rightarrow c} F_1(t) = L_1$ ، می‌دانیم يك $\delta_1 > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای همه t ها،

$$0 < |t - c| < \delta_1 \Rightarrow |F_1(t) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (ب ۱)$$

همچنین يك $\delta_2 > 0$ وجود دارد به قسمی که به ازای همه t ها،

$$0 < |t - c| < \delta_2 \Rightarrow |F_2(t) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (پ ۱)$$

حال فرض می‌کنیم δ کوچکترین عدد از دو عدد δ_1 و δ_2 باشد. در این صورت، δ عددی مثبت است و نابرابریهای مربوط به ϵ مذکور در (ب ۱) و (پ ۱) هر دو با شرط $0 < |t - c| < \delta$ برقرارند. پس، به ازای همه t ها، از نابرابری $0 < |t - c| < \delta$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} & |F_1(t) + F_2(t) - (L_1 + L_2)| \\ &= |F_1(t) - L_1 + F_2(t) - L_2| \\ &\leq |F_1(t) - L_1| + |F_2(t) - L_2| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

پس (۱ الف)، و لذا قسمت (i) قضیه، ثابت می‌شود.

(iii) تابع $F_1(t)$ را به ازای همه مقادیر t برابر با مقدار ثابت k بگیریم.

$$\lim [F_1(t) - F_2(t)] = L_1 - L_2 \quad (\text{ii})$$

این حکم به صورت زیر از قسمتهای (i) و (iv) به دست می آید

$$\begin{aligned} \lim [F_1(t) - F_2(t)] &= \lim [F_1(t) + (-1)F_2(t)] \\ &= \lim F_1(t) + \lim (-1)F_2(t) \\ &= \lim F_1(t) + (-1) \lim F_2(t) \\ &= \lim F_1(t) - \lim F_2(t) \\ &= L_1 - L_2. \end{aligned} \quad (۲)$$

$$\lim \frac{F_1(t)}{F_2(t)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0 \quad \text{اگر } (v)$$

چون L_2 صفر نیست $|L_2|$ عددی مثبت است، و چون حد $F_2(t)$ وقتی $t \rightarrow c$ عدد L_2 است، می دانیم عددی مثبت چون δ_1 وجود دارد که

$$|F_2(t) - L_2| < \frac{|L_2|}{\gamma}, \quad 0 < |t - c| < \delta_1 \quad \text{وقتی} \quad (۵ \text{ الف})$$

حال، می توان نشان داد که به ازای اعداد دلخواه A و B ،

$$|B| - |A| \leq |A - B| \quad \text{و} \quad |A| - |B| \leq |A - B|$$

لذا داریم

$$||A| - |B|| \leq |A - B|. \quad (۵ \text{ ب})$$

در (۵ ب) قرار می دهیم $A = F_2(t)$ و $B = L_2$ و از (۵ الف) نتیجه می گیریم که

$$|L_2| - |F_2(t)| \leq |F_2(t) - L_2| < \delta_1 \quad \text{با شرط} \quad 0 < |t - c| < \delta_1$$

$$-\frac{1}{\gamma} |L_2| < |F_2(t) - L_2| < \frac{1}{\gamma} |L_2|.$$

اگر به هر سه جمله نابرابری فوق $|L_2|$ را بیفزاییم، نتیجه می شود

$$\frac{1}{\gamma} |L_2| < |F_2(t)| < \frac{3}{\gamma} |L_2|$$

و از آن با شرط $0 < |t - c| < \delta_1$ به نتیجه زیر دست می یابیم

$$\left| \frac{1}{F_2(t)} - \frac{1}{L_2} \right| = \left| \frac{L_2 - F_2(t)}{L_2 F_2(t)} \right| \leq \frac{\gamma}{|L_2|^2} |L_2 - F_2(t)|$$

(۵ ب)

$$\lim [F_1(t) \cdot F_2(t)] = L_1 \cdot L_2 \quad (\text{iii})$$

فرض کنیم ϵ يك عدد دلخواه مثبت باشد، می نویسیم

$$F_1(t) = L_1 + [F_1(t) - L_1]$$

$$F_2(t) = L_2 + [F_2(t) - L_2].$$

وقتی این دو عبارت را در هم ضرب و $L_1 L_2$ را از حاصل کم کنیم، داریم

$$\begin{aligned} F_1(t) \cdot F_2(t) - L_1 L_2 &= L_1 [F_2(t) - L_2] + L_2 [F_1(t) - L_1] \\ &\quad + [F_1(t) - L_1] \cdot [F_2(t) - L_2]. \end{aligned} \quad (۳ \text{ الف})$$

عددهای $\sqrt{\epsilon/3}$ ، $\epsilon/[3(1+|L_1|)]$ و $\epsilon/[3(1+|L_2|)]$ مثبت اند. و از آنجا که حد $F_1(t)$ ، L_1 و حد $F_2(t)$ ، L_2 است، اعداد مثبتی چون δ_1 ، δ_2 ، δ_3 و δ_4 یافت می شوند به طوری که

$$|F_1(t) - L_1| < \sqrt{\frac{\epsilon}{3}} \quad \text{وقتی} \quad 0 < |t - c| < \delta_1$$

$$|F_2(t) - L_2| < \sqrt{\frac{\epsilon}{3}} \quad \text{وقتی} \quad 0 < |t - c| < \delta_2$$

$$|F_1(t) - L_1| < \frac{\epsilon}{[3(1+|L_2|)]} \quad \text{وقتی} \quad 0 < |t - c| < \delta_3$$

$$|F_2(t) - L_2| < \frac{\epsilon}{[3(1+|L_1|)]} \quad \text{وقتی} \quad 0 < |t - c| < \delta_4$$

حال δ را کوچکترین عدد از چهار عدد مثبت δ_1 ، δ_2 ، δ_3 و δ_4 می گیریم. در این صورت δ عددی مثبت است و با شرط $0 < |t - c| < \delta$ هر چهار نابرابری بالا برقرارند. اگر از دو طرف رابطه (۳ الف) قدر مطلق بگیریم و از نابرابری مثلثی استفاده کنیم، داریم

$$\begin{aligned} |F_1(t)F_2(t) - L_1L_2| &\leq |L_1| \cdot |F_2(t) - L_2| + |L_2| \cdot |F_1(t) - L_1| \\ &\quad + |F_1(t) - L_1| \cdot |F_2(t) - L_2| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \quad (0 < |t - c| < \delta) \end{aligned} \quad (۳ \text{ ب})$$

به این ترتیب، اثبات قسمت (iii) به انجام می رسد.

$$\lim kF_2(t) = kL_2 \quad (\text{iv})$$

این قسمت، حالت خاصی از قسمت (iii) است اگر در قسمت

اثبات درمورد حد داشت. اگر

$$\lim_{t \rightarrow c^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow c^+} h(t) = L$$

آنگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عددی چون $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای همه t ها،

$$c < t < c + \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(t) < L + \epsilon$$

و

$$L - \epsilon < h(t) < L + \epsilon.$$

نا برابریهای مربوط به ϵ در طرف راست را با نا برابری $f(t) \leq g(t) \leq h(t)$ تلفیق می کنیم و نتیجه می گیریم که

$$L - \epsilon < f(t) \leq g(t) \leq h(t) < L + \epsilon.$$

پس داریم

$$L - \epsilon < g(t) < L + \epsilon.$$

بنابراین، به ازای همه t ها،

$$c < t < c + \delta \Rightarrow |g(t) - L| < \epsilon.$$

نتیجه اینکه

$$\lim_{t \rightarrow c^+} g(t) = L.$$

اثبات درمورد حد چپ. اگر $\epsilon > 0$ مفروض باشد، عددی چون $\delta > 0$ یافت می شود به طوری که به ازای همه t ها،

$$c - \delta < t < c \Rightarrow L - \epsilon < f(t) < L + \epsilon$$

و

$$L - \epsilon < h(t) < L + \epsilon.$$

مانند مورد قبل نتیجه می گیریم که به ازای همه t ها،

$$c - \delta < t < c \Rightarrow L - \epsilon < g(t) < L + \epsilon$$

و لذا

$$\lim_{t \rightarrow c^-} g(t) = L.$$

اثبات درمورد حد در طرفه. اگر $\lim_{t \rightarrow c} h(t) = L$ و $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = L$

آنگاه وقتی $t \rightarrow c^+$ و $t \rightarrow c^-$ ، f و h به L میل می کنند. پس، همان طور که در بالا نشان داده ایم، وقتی $t \rightarrow c^+$ و $t \rightarrow c^-$ ، $g(t) \rightarrow L$ چون حدهای چپ و راست g وقتی $t \rightarrow c$ وجود

تا اینجا تنها ثابت کرده ایم که وقتی t به اندازه کافی به c نزدیک باشد، قدرمطلق تفاضل بین عکسهای $F_\gamma(t)$ و L_γ که در طرف چپ (۵ پ) آمده است از حاصلضرب یک مقدار ثابت در $|L_\gamma - F_\gamma(t)|$ بیشتر نیست. هنوز از این واقعیت که L_γ حد $F_\gamma(t)$ است به اندازه کافی استفاده نکرده ایم.

حال فرض کنید ϵ یک عدد مثبت دلخواه است. در این صورت $|L_\gamma - F_\gamma(t)| < \epsilon$ (۱/۲) نیز عددی مثبت است و در نتیجه عددی مثبت چون δ_γ وجود دارد که

$$|L_\gamma - F_\gamma(t)| < \frac{\epsilon}{\gamma} |L_\gamma|, \quad 0 < |t - c| < \delta_\gamma.$$

(۵ ت)

با اختیار کردن $\delta = \min\{\delta_1, \delta_\gamma\}$ یک عدد مثبت δ به دست می آید، و از تلفیق نا برابریهای (۵ پ) و (۵ ت) نتیجه زیر عاید می شود

$$| \frac{1}{F_\gamma(t)} - \frac{1}{L_\gamma} | < \epsilon, \quad 0 < |t - c| < \delta$$

از این مطلب نتیجه می گیریم که

اگر $\lim_{t \rightarrow c} F_\gamma(t) = L_\gamma$ وقتی $t \rightarrow c$ ، و اگر $L_\gamma \neq 0$ آنگاه

$$\lim_{t \rightarrow c} \frac{1}{F_\gamma(t)} = \frac{1}{L_\gamma}.$$

چون قبلاً قانون حاصلضرب را ثابت کرده ایم، می توانیم آن را درمورد $F_\gamma(t)$ و $1/F_\gamma(t)$ به صورت زیر به کار ببریم و از آن قانون خارج قسمت را به دست آوریم

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow c} \frac{F_\gamma(t)}{F_\gamma(t)} &= \lim_{t \rightarrow c} \left[F_\gamma(t) \cdot \frac{1}{F_\gamma(t)} \right] \\ &= [\lim_{t \rightarrow c} F_\gamma(t)] \cdot \left[\lim_{t \rightarrow c} \frac{1}{F_\gamma(t)} \right] = L_\gamma \cdot \frac{1}{L_\gamma}. \end{aligned}$$

قضیه ۲

قضیه ساندویچ

فرض کنید که به ازای تمام مقادیر $t \neq c$ در بازه ای حول c ،

$$f(t) \leq g(t) \leq h(t)$$

و وقتی t به c میل می کند، $f(t)$ و $h(t)$ هر دو به یک حد L میل می کنند. در این صورت

$$\lim_{t \rightarrow c} g(t) = L.$$

دارند و هر دو برابر با L هستند داریم

$$\lim_{t \rightarrow c} g(t) = L.$$

مسئله‌ها

۰۱. وقتی t به c میل می‌کند حدهای $F_1(t)$ ، $F_2(t)$ و $F_3(t)$ به ترتیب L_1 ، L_2 و L_3 است. نشان دهید که حد مجموع این تابعها $L_1 + L_2 + L_3$ است. این نتیجه را به مجموع هر تعداد متناهی از توابع تعمیم دهید.

۰۲. اگر n یک عدد صحیح و مثبت بزرگتر از یک باشد، وقتی t به c میل می‌کند حدهای $F_1(t)$ ، $F_2(t)$ ، \dots ، $F_n(t)$ به ترتیب L_1 ، L_2 ، \dots ، L_n باشند، نشان دهید که حد حاصلضرب این n تابع قضیه ۱ استفاده کنید.)

۰۳. با استفاده از نتایج بخش ۹.۱، مثال ۲، و مسئله ۲ی بالا نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n داریم $\lim_{t \rightarrow c} t^n = c^n$.

۰۴. با استفاده از نتیجه مثال ۳ مذکور در بخش ۹.۱ و مسائل ۱ و ۳ی بالا نشان دهید که به ازای هر تابع چندجمله‌ای

$$f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

داریم

$$\lim_{t \rightarrow c} f(t) = f(c).$$

۰۵. با استفاده از قضیه ۱ و نتیجه مسئله ۲ نشان دهید که اگر $f(t)$ و $g(t)$ توابع چندجمله‌ای باشند و اگر $g(c) \neq 0$ ، آنگاه

$$\lim_{t \rightarrow c} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$

۰۶. در شکل پ.۱ نمودار اثباتی از این مطلب دیده می‌شود که ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است. از روی نمودار، اثبات را بنویسید. حکم موردنظر چنین است

اگر $f(t)$ در $t=c$ و $g(x)$ در $x=f(c)$ پیوسته باشند، آنگاه ترکیب $g \circ f$ در $t=c$ پیوسته است.

پ.۱. نمودار اثباتی از این حکم که ترکیب دو تابع پیوسته یک تابع پیوسته است. این حکم در مورد هر تعداد متناهی از توابع نیز درست است. تنها شرط مورد نیاز این است که هر تابع در نقطه مربوط پیوسته باشد. در این شکل باید f در c و g در $f(c)$ پیوسته باشد.

همچنین فرض کنید c یک نقطه درونی دامنه f و $f(c)$ یک نقطه درونی دامنه g باشد. با این فرض تمام حدهای موردنظر دوطرفه خواهند شد. (استدلال درحالاتی که c یا $f(c)$ یا هر دوی آنها نقاط انتهایی دامنه‌های f و g باشند نظیر استدلال درحالاتی است که هر دو را نقاط درونی فرض کنیم.)

پ ۲

استقرای ریاضی

درستی بسیاری از فرمولها، نظیر فرمول

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

به ازای هر عدد صحیح و مثبت n را می‌توان با به کار بردن اصل موضوعی موسوم به اصل استقرای ریاضی اثبات کرد. اثباتی که در آن این اصل موضوع به کار رود اثبات با استقرای ریاضی یا اثبات با استقرا نام دارد.

مراحل اثبات یک فرمول با استقرا عبارت‌اند از

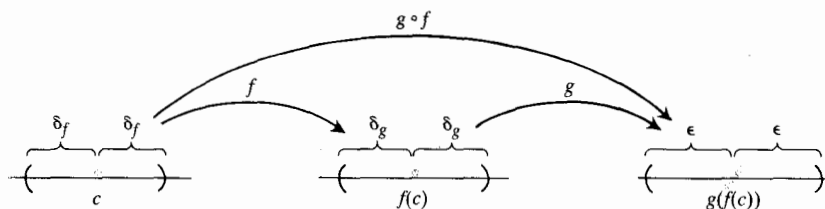
مرحله ۱: درستی فرمول را به ازای $n=1$ می‌آزماییم.
مرحله ۲: ثابت می‌کنیم که اگر فرمول به ازای هر عدد صحیح و مثبت $n=k$ درست باشد به ازای $n=k+1$ نیز درست است.

وقتی این مراحل به انجام رسید (بنابسه اصل موضوع مزبور) می‌دانیم که فرمول به ازای همه اعداد صحیح و مثبت n درست است. بنا به مرحله ۱ برای $n=1$ برقرار است. بنا به مرحله ۲ برای $n=2$ و در نتیجه بنا به مرحله ۲ برای $n=3$ ، مجدداً بنا به همین مرحله برای $n=4$ و همین‌طور الی آخر، درست است. مانند بازی دومینو، اگر مهره اول بیفتد و اگر مهره k ام که می‌افتد مهره $k+1$ ام را بیندازد، همه مهره‌ها می‌افتند.

از دیدگاه دیگر، فرض کنید به ازای هر عدد صحیح و مثبت دنباله‌ای از گزاره‌ها به صورت

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

داشته باشیم. و تصور کنید می‌توانیم نشان دهیم که درستی گزاره‌ای درستی گزاره بعدی را ایجاب می‌کند. همچنین فرض کنید که می‌توانیم درستی S_1 را اثبات کنیم. در این صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که همه گزاره‌های بعد از S_1 هم درست هستند.



مرحله ۲: اگر

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} &= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{1 \times 2}{2^k \cdot 2} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

بنابراین دیده می شود که هرگاه فرمول اولیه به ازای $n=k$ برقرار باشد به ازای $n=k+1$ نیز برقرار است.

حال که این دو مرحله طی شد اصل استقرای ریاضی درستی فرمول به ازای هر عدد صحیح و مثبت n را تضمین می کند. ■

آغاز کردن با اعداد صحیح دیگر

در برخی از استدلالهای استقرایی به جای اینکه استدلال را با $n=1$ شروع کنند، با عدد صحیح دیگری شروع می کنند. مراحل این گونه استدلال به شرح زیر است.

مرحله ۱: درستی فرمول را به ازای $n=n_1$ (نخستین عدد صحیح مناسب) بررسی می کنیم.

مرحله ۲: ثابت می کنیم که اگر فرمول به ازای هر عدد صحیح و مثبت $n_1 \leq n=k$ درست باشد، آنگاه به ازای $n=k+1$ نیز درست است.

وقتی این مراحل طی شود، اصل استقرای ریاضی درستی فرمول را به ازای هر $n \geq n_1$ تضمین می کند.

مثال ۳ نشان دهید که اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد $3^n > n!$.

حل: «به اندازه کافی بزرگ» یعنی چه؟ به آزمایش می پردازیم

| n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ |
|-------|---|---|----|----|-----|-----|------|
| $n!$ | ۱ | ۲ | ۶ | ۲۴ | ۱۲۰ | ۷۲۰ | ۵۰۴۰ |
| 3^n | ۳ | ۹ | ۲۷ | ۸۱ | ۲۴۳ | ۷۲۹ | ۲۱۸۷ |

مثال ۱ نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حل: با طی کردن دو مرحله استقرای ریاضی فرمول را اثبات می کنیم.

مرحله ۱: این فرمول به ازای $n=1$ برقرار است زیرا

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

مرحله ۲: آیا اگر این فرمول به ازای $n=k$ برقرار باشد به ازای $n=k+1$ نیز برقرار است؟ پاسخ مثبت و دلیل آن به شرح زیر است: اگر

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

آنگاه

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

آخرین عبارت این رشته از برابریها همان عبارت $n(n+1)/2$ به ازای $n=k+1$ است.

حال اصل استقرای ریاضی درستی فرمول اولیه را به ازای همه اعداد صحیح و مثبت n تضمین می کند.

توجه کنید تنها کاری که ما باید انجام دهیم اجرای مراحل ۱ و ۲ است. بقیه کار به عهده اصل استقرای ریاضی است. ■

مثال ۲ نشان دهید که به ازای همه اعداد صحیح و مثبت n

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

حل: با اجرای دو مرحله استقرای ریاضی فرمول را اثبات می کنیم.

مرحله ۱: این فرمول به ازای $n=1$ برقرار است زیرا

$$\frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2^1}$$

۵. نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ،

$$\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}.$$

۶. نشان دهید که اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، $n! > n^2$.

۷. نشان دهید که اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، $2^n > n^2$.

۸. نشان دهید که به ازای $n \geq -3$ داریم $2^n \geq 1/8$.

پ ۳

فرمولهایی از ریاضیات پیش دانشگاهی

جبر

۱. قانون نماها

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (ab)^m = a^m b^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

اگر $a \neq 0$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

۲. صفر

به ازای هر عدد غیر بینهایت a داریم

$$a \times 0 = 0 \times a = 0.$$

اگر $a \neq 0$

$$\frac{0}{a} = 0, \quad 0^a = 0, \quad a^0 = 1.$$

تقسیم بر صفر تعریف نمی شود.

۳. کسر

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \quad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\begin{aligned} \frac{(a/b) + (c/d)}{(e/f) + (g/h)} &= \frac{(a/b) + (c/d)}{(e/f) + (g/h)} \cdot \frac{bd fh}{bd fh} \\ &= \frac{(ad+bc)fh}{(eh+fg)bd} \end{aligned}$$

به نظر می رسد که به ازای $n \geq 7$ داریم $n! > 3^n$. برای اطمینان، از استقرای ریاضی استفاده می کنیم. در مرحله ۱ می گیریم $n_1 = 7$ و به مرحله ۲ می پردازیم.

فرض کنید به ازای $k \geq 7$ داشته باشیم $k! > 3^k$. در این صورت

$$\begin{aligned} (k+1)! &= (k+1)(k!) > (k+1)3^k > 7 \times 3^k > 3^{k+1}. \end{aligned}$$

پس به ازای $k \geq 7$

$$k! > 3^k \Rightarrow (k+1)! > 3^{k+1}.$$

حال اصل استقرای ریاضی درستی $n! \geq 3^n$ را به ازای هر $n \geq 7$ تضمین می کند.

مسئله ها

۱. با این فرض که نابرابری مثلثی $|a+b| \leq |a| + |b|$ به ازای هر دو عدد a و b برقرار است نشان دهید که به ازای هر n عدد x_1, x_2, \dots, x_n داریم

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

۲. نشان دهید که اگر $r \neq 1$ ، به ازای هر عدد صحیح و مثبت n داریم

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

۳. با استفاده از قاعده حاصلضرب

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

و این واقعیت که

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ،

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

۴. فرض کنید تابعی چون $f(x)$ دارای این ویژگی است که به ازای هر دو عدد مثبت x_1 و x_2 ، $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. نشان دهید که در مورد حاصلضرب n عدد مثبت x_1, x_2, \dots, x_n داریم

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n).$$

را تا آنجا بر $x-r$ تقسیم کنیم که باقیمانده R مستقل از x باشد، آنگاه $R = f(r)$. به عبارت دیگر، $x-r$ عاملی از $f(x)$ است اگر و تنها اگر r جوابی برای معادله $f(x) = 0$ باشد. مثلاً اگر $f(x) = x^2 + x - 1$ را بر $x-2$ تقسیم کنیم می‌بینیم که $R = 5$:

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x-2 \overline{) x^2 + x - 1} \\ \underline{x^2 - 2x} \\ 3x - 1 \\ \underline{3x - 6} \\ 5 \end{array}$$

پس، $f(2) = 5$ و $f(x) = x^2 + x - 1 = (x-2)(x+3) + 5$. اگر $g(x) = x^2 + x - 6$ را بر $x-2$ تقسیم کنیم درمی‌یابیم که $R = 0$:

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x-2 \overline{) x^2 + x - 6} \\ \underline{x^2 - 2x} \\ 3x - 6 \\ \underline{3x - 6} \\ 0 \end{array}$$

پس، $g(2) = 0$ و $g(x) = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$.

۸. فرمول درجه دوم

اگر دوجمله اول معادله

$$ax^2 + bx + c = 0$$

را به صورت مربع کامل درآوریم و از معادله حاصل x را بیابیم (جزئیات محاسبه را نمی‌نویسیم) به فرمول زیر می‌رسیم

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

این رابطه را فرمول درجه دوم می‌نامند. مثلاً جوابهای معادله

$$2x^2 + 3x - 1 = 0$$

عبارت‌اند از

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4}.$$

۴. قضیه دوجمله‌ای به ازای عدد صحیح و مثبت n

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^{n-2}b^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3}b^3 + \dots \\ &+ nab^{n-1} + b^n \end{aligned}$$

مثلاً

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

۵. تفاضل توانهای صحیح یکسان، $n > 1$.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

مثلاً

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

۶. تناسب

گزاره‌های « y مستقیماً با x تغییر می‌کند» و « y با x تناسب مستقیم دارد» یک معنا دارند و آن این است که به ازای عدد ثابتی چون k

$$y = kx.$$

ثابت k را ضریب تناسب معادله $y = kx$ می‌نامند.

به همین ترتیب، « y به طور معکوس با x تغییر می‌کند» و « y با x تناسب معکوس دارد» به این معنا هستند که به ازای عدد ثابتی چون k ,

$$y = k \frac{1}{x}.$$

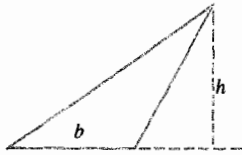
باز هم k ضریب تناسب معادله است.

۷. باقیمانده و عامل

اگر چندجمله‌ای

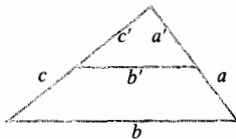
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

۱. مثلث



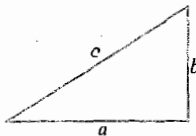
$$A = \frac{1}{2}bh$$

۲. مثلثهای متشابه



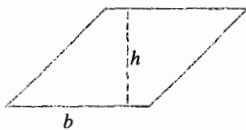
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

۳. قضیه فیثاغورس

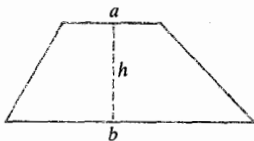


$$a^2 + b^2 = c^2$$

۴. متوازی الاضلاع

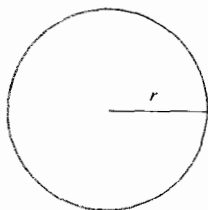


$$A = bh$$



$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

۵. ذوزنقه



$$A = \pi r^2, \quad C = 2\pi r$$

۶. دایره

یا

$$x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{و} \quad x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

اگر فرمول درجه دوم را درمورد معادله

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

به کار بندیم به نتیجه زیر می‌رسیم

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i.$$

جوابهای این معادله اعداد مختلط زیر هستند

$$x = -1 - i \quad \text{و} \quad x = -1 + i$$

۹. روش هورنر

(معمولاً) سریعترین راه محاسبه چند جمله‌ای

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

در $x = c$ عبارت است از محاسبه

$$p(c) = a_0 + c(a_1 + c(a_2 + c(a_3 + \dots + c(a_{n-1} + ca_n))))$$

که در آن، محاسبات از درون آغاز می‌شود. به این ترتیب، محاسبه ساده می‌شود و کار ما صرفاً n بار ضرب و جمع کردن است؛ کلاً $2n$ (و اگر ضربی صفر باشد از آن هم کمتر) عمل باید انجام شود. مثلاً مقدار

$$p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x + 5$$

در $x = 2$ برابر است با

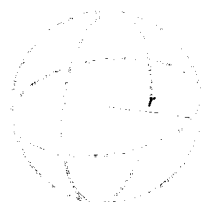
$$p(2) = 5 + 2(4 + 2(-6 + 2 \times 3)) = 13.$$

↑

از اینجا آغاز می‌کنیم
و به طرف چپ ادامه می‌دهیم

هندسه

(مساحت = A ، مساحت قاعده = B ، محیط = C ، مساحت سطح(جانبی = S ، حجم = V)



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2$$

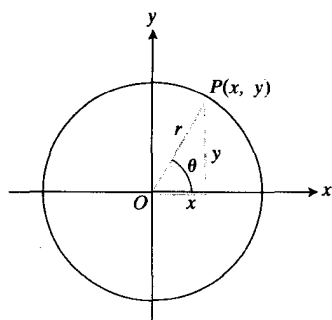
مثلثات

۱. تعریفها و اتحادهای اساسی

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\csc \theta} \quad \text{سینوس:}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sec \theta} \quad \text{کسینوس:}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\cot \theta} \quad \text{تانژانت:}$$



$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

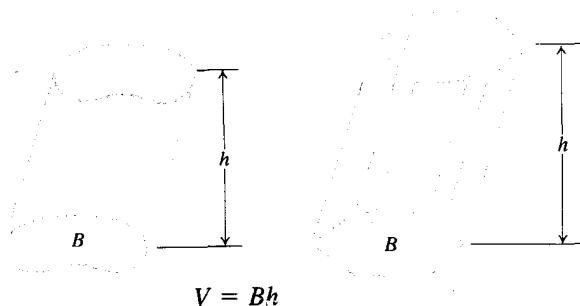
$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

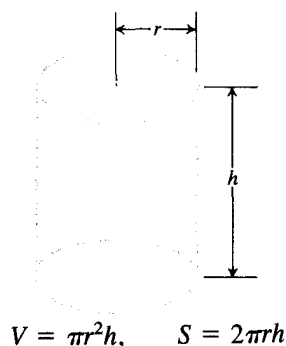
$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

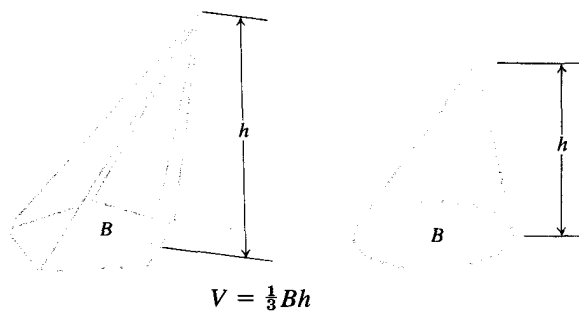
۷. استوانه یا منشور با قاعده‌های متوازی



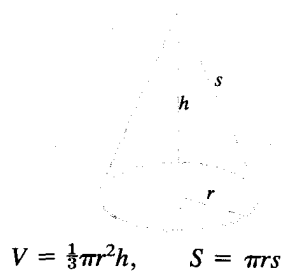
۸. استوانه مستدیر قائم



۹. مخروط یا هرم



۱۰. مخروط مستدیر قائم



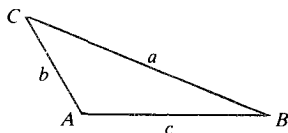
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{قانون سینوسها:}$$

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

در اینجا

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$



TOOLKIT PROGRAMS

Function Evaluator

Super * Grapher

پ ۲

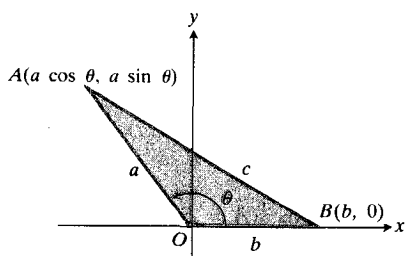
قانون کسینوسها و فرمولهای مربوط به مجموع زاویه‌ها

در شکل پ. ۲ مثلث OAB چنان است که O در مبدأ و B بر محور x ها در نقطه $B(b, 0)$ قرار دارد. مختصات رأس سوم یعنی نقطه A عبارت اند از

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta. \quad (۱)$$

θ اندازه زاویه BOA است. بنا به فرمول فاصله بین دو نقطه، مربع فاصله c از A تا B برابر است با

$$\begin{aligned} c^2 &= (a \cos \theta - b)^2 + (a \sin \theta)^2 \\ &= a^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + b^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$



پ. ۲ برای به دست آوردن قانون کسینوسها فاصله بین A و B را محاسبه و نتیجه را مجذور می‌کنیم.

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos A, \quad \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \sin A$$

$$\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A, \quad \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin A$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} \cos(A-B) - \frac{1}{2} \cos(A+B)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos(A-B) + \frac{1}{2} \cos(A+B)$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} \sin(A-B) + \frac{1}{2} \sin(A+B)$$

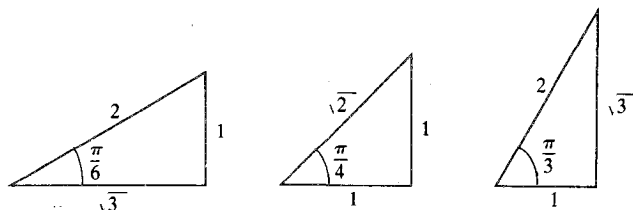
$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$$

۳. مثلثهایی که غالباً به آنها مراجعه می‌شود



۳. زاویه‌ها و ضلعهای مثلث

$$\text{قانون کسینوسها: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

لذا مربع فاصله بین P و Q برابر است با

$$\begin{aligned}(PQ)^2 &= (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 \\ &= (x_Q^2 + y_Q^2) + (x_P^2 + y_P^2) - 2(x_Q x_P + y_Q y_P) \\ &= 2 - 2(\cos A \cos B + \sin A \sin B).\end{aligned}$$

اما زاویه QOP برابر است با $A - B$ و بنا به قانون کسینوسها داریم

$$\begin{aligned}(PQ)^2 &= (OP)^2 + (OQ)^2 - 2(OP)(OQ) \cos(A - B) \\ &= 2 - 2 \cos(A - B).\end{aligned}$$

وقتی این دو عبارت مربوط به $(PQ)^2$ را برابر قرار دهیم، داریم

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad (11)$$

که همان رابطه (۱۱) در بخش ۶.۲ است.

حال معادلات (۱۱ الف، ب، و پ) از بخش ۶.۲ را از معادله (۱۱) به دست می آوریم. به نتایج زیر نیز نیاز داریم

$$\sin 0 = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad (3)$$

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

۱. در رابطه (۱۱) قرار می دهیم $A = \pi/2$ و رابطه های (۳) را به کار می بریم تا فرمول زیر را به دست آوریم

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin B. \quad (4)$$

اگر در این فرمول به جای B ، $\pi/2 - B$ و به جای $\pi/2 - B$ ، $\pi/2 - (\pi/2 - B)$ را قرار دهیم داریم

$$\cos B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right). \quad (5)$$

رابطه های (۴) و (۵) به ما می گویند که سینوس و کسینوس زاویه به ترتیب برابرند با کسینوس و سینوس زاویه متمم آنها.

۲. حال اگر در رابطه (۱۱) قرار دهیم $B = -\pi/2$ و از رابطه های (۳) استفاده کنیم داریم

$$\cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin A. \quad (6)$$

۳. از فرمول (۱۱) می توان با قرار دادن B به جای B فرمول

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta. \quad (2)$$

رابطه (۲)، قانون کسینوسهاست. این قانون حاکی است که «مربع هر ضلع یک مثلث برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصلضرب آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها». وقتی $\theta = \pi/2$ ، $\cos \theta = 0$ و رابطه (۲) به قضیه فیثاغورس بدل می شود. رابطه (۲) به ازای هر زاویه دلخواه θ برقرار است زیرا فقط بر اساس فرمول فاصله و روابط (۱) استوار است. با قرار دادن زاویه بیرونی زاویه θ یعنی $(2\pi - \theta)$ یا زاویه اخیر با علامت مخالف، باز هم این معادله برقرار است زیرا

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta - 2\pi) = \cos \theta.$$

وقتی A بر محور x ها قرار دارد و $\theta = \pi$ یا $\theta = 0$ ، با توجه به اینکه $\cos 0 = 1$ و $\cos \pi = -1$ به سادگی می توان نشان داد که این فرمول باز هم برقرار است. در این حالت های خاص طرف راست رابطه (۲) به صورت $(a-b)^2$ یا $(a+b)^2$ در می آید.

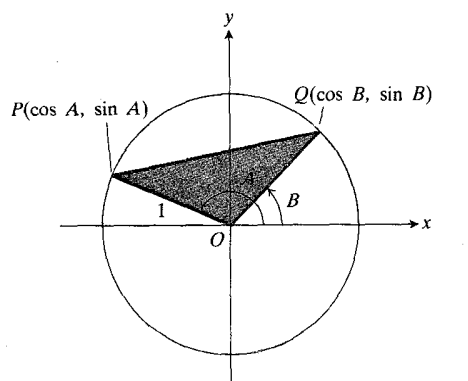
اثبات فرمولهای مربوط به مجموع

با به کار گرفتن قانون کسینوسها در مورد مثلث OPQ از شکل پ.۳.۱ رابطه $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ مذکور در بخش ۶.۲ را به دست می آوریم. فرض می کنیم $OP = OQ = r = 1$. در این صورت مختصات P عبارت اند از

$$x_P = \cos A, \quad y_P = \sin A$$

و مختصات Q عبارت اند از

$$x_Q = \cos B, \quad y_Q = \sin B.$$



پ.۳.۱ برای به دست آوردن فرمول $\cos(A - B)$ قانون کسینوسها را در مورد این مثلث به کار می بندیم.

با این شرط که حد طرف راست وجود داشته باشد.

$\cos(A+B)$ را به دست آورد

اثبات صورت قویتر قاعده هویپیتال مبتنی است بر قضیه مقدار میانگین کوشی، قضیه ای درباره مقدار میانگین که به جای یک تابع با دو تابع سروکار دارد. ما ابتدا قضیه کوشی را ثابت می کنیم و سپس چگونگی استفاده از آن را برای به دست آوردن قاعده هویپیتال نشان می دهیم.

قضیه

قضیه مقدار میانگین کوشی

فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ بر $a \leq x \leq b$ پیوسته و بر $a < x < b$ مشتقپذیر باشند و بر $a < x < b$ داشته باشیم $g'(x) \neq 0$. در این صورت بین a و b عددی چون c وجود دارد که

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (2)$$

اثبات قضیه مقدار میانگین کوشی از قضیه مقدار میانگین بخش ۷.۳ دوبار استفاده می کنیم. ابتدا با استفاده از آن نشان می دهیم که $g(b) \neq g(a)$. زیرا اگر $g(b) = g(a)$ با $g(a)$ برابر باشد، با به کار بردن قضیه مقدار میانگین در مورد g نتیجه می گیریم که به ازای عددی چون c بین a و b داریم

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0.$$

اما چنین چیزی غیر ممکن است زیرا بر $a < x < b$ داریم $g'(x) \neq 0$.

حال قضیه مقدار میانگین را در مورد تابع زیر به کار می بریم

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]. \quad (3)$$

در تمام نقاطی که f و g پیوسته و مشتقپذیرند این تابع نیز پیوسته و مشتقپذیر است و داریم $F(b) = F(a) = 0$. پس عددی چون c بین a و b وجود دارد به طوری که $F'(c) = 0$. بر حسب f و g این مطلب حاکی است که

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g'(c)] = 0 \quad (4)$$

یا

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$\cos(A+B) = \cos[A - (-B)]$$

$$= \cos A \cos(-B) + \sin A \sin(-B)$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B. \quad (11 \text{ ب})$$

۴. برای به دست آوردن فرمول $\sin(A \pm B)$ ، ابتدا در رابطه (۴) به جای B می نویسیم $A+B$ ، و سپس از (۱۱ ت) استفاده می کنیم

$$\sin(A+B) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (A+B)\right]$$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - B\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \cos B \quad (11 \text{ الف})$$

$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \sin B$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

رابطه (۱۱ پ) از بخش ۶.۲ از این فرمول، با قراردادن $-B$ به جای B ، نتیجه می شود

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B. \quad (11 \text{ پ})$$

پ ۵

اثباتی برای صورت قویتر قاعده هویپیتال

در این پیوست قضیه ای از بخش ۸.۳ را اثبات می کنیم که آن را صورت قویتر قاعده هویپیتال نامیدیم.

قضیه

قاعده هویپیتال (صورت قویتر)

فرض کنید

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

و فرض کنید توابع f و g هر دو بر بازه ای باز چون (a, b) که شامل نقطه x_0 است مشتقپذیر باشند. همچنین فرض کنید که به ازای همه نقاط (a, b) بجز احتمالاً x_0 ، $g' \neq 0$. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (1)$$

به این ترتیب، قاعده هوییتال در حالتی که x از بالا به x_0 نزدیک می شود ثابت می گردد. بنا به کار بردن قضیه مقدار میانگین کوشی در مورد بازه بسته $[x, x_0]$ ، $x < x_0$ ، حالتی که x از پایین به x_0 نزدیک می شود ثابت می گردد.

مسئله ها

هر چند اهمیت قضیه مقدار میانگین کوشی مربوط به مطلب دیگری است، ولی با حل مسائلی نظیر مسائل زیر می توانیم کنجکاو خود را در مورد یکتا بودن عدد c موجود در معادله (۲) فروشانیم. در مسائل ۱-۴ تمام مقادیر c مربوط به قضیه مقدار میانگین کوشی را که در رابطه (۲) صدق می کنند بیابید.

$$1. f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad [a, b] = [-2, 0]$$

$$2. f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad [a, b] \text{ اختیاری.}$$

$$3. f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x, \quad g(x) = x^2, \quad [a, b] = [0, 3]$$

$$4. f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad [a, b] = [0, \pi/2]$$

که همان رابطه (۲) است.

اثبات صورت قویتر قاعده هوییتال ابتدا رابطه (۱) را برای حالت $x \rightarrow x_0^+$ ثابت می کنیم. روشی که در این مورد به کار می بریم تقریباً بدون هیچ تغییری در مورد $x \rightarrow x_0^-$ نیز می تواند به کار رود و تلفیق این دو حالت، به اثبات نتیجه می انجامد.

فرض کنید x درست راست x_0 واقع باشد. در این صورت $g'(x) \neq 0$ و می توانیم قضیه مقدار میانگین کوشی را در مورد بازه بسته از x_0 تا x به کار ببریم. در این صورت عددی چون c بین x_0 و x وجود دارد که

$$(5) \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

اما $f(x_0) = g(x_0) = 0$ و لذا

$$(6) \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

وقتی x به x_0 میل کند، c به x_0 میل می کند زیرا c بین x_0 و x واقع است. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

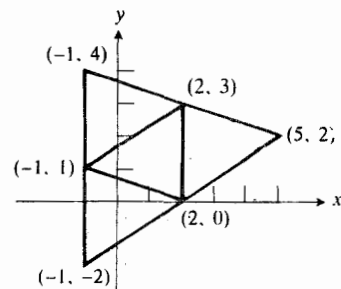
پاسخها

فصل ۱

بخش ۱.۱، صفحه‌های ۳ تا ۴

بخش ۲.۱، صفحه‌های ۸ تا ۱۰

| | Q | R | S | T | |
|---|---|----------|----------|----------|----|
| ۱.۱ $\Delta x = 2, \Delta y = 1$ | (1, 2) | (-1, -2) | (-1, 2) | (-2, 1) | ۱ |
| ۱.۳ $\Delta x = 2, \Delta y = -4$ | (-2, -2) | (2, 2) | (2, -2) | (2, -2) | ۳ |
| ۱.۵ $\Delta x = -5, \Delta y = 0$ | (0, -1) | (0, 1) | (0, -1) | (1, 0) | ۵ |
| ۱.۷ الف $\Delta x = 57, \Delta y = -10$ | (-2, 0) | (2, 0) | (2, 0) | (0, -2) | ۷ |
| ۱.۷ ب $\Delta x = -2, \Delta y = -12$ | (-1, 3) | (1, -3) | (1, 3) | (-3, -1) | ۹ |
| ۱.۷ پ $\Delta x = 1, \Delta y = -14$ | (-π, π) | (π, -π) | (π, π) | (-π, -π) | ۱۱ |
| ۱.۹ بالا، راست | (x, -y) | (-x, y) | (-x, -y) | (y, x) | ۱۳ |
| ۱.۱۱ چپ | مختصات رأس چهارم: (5, 2), (-1, -2), (-1, 4) | | | | ۱۵ |
| ۱.۱۳ زیر، راست | $A(-12, 2), B(-12, -5), C(9, -5)$ | | | | ۱۷ |
| ۱.۱۵ زیر | | | | | ۱۹ |
| ۱.۱۷ $m = 3, m_{\perp} = -1/3$ | | | | | |
| ۱.۱۹ $m = -1/3, m_{\perp} = 3$ | | | | | |
| ۱.۲۱ $m = -1, m_{\perp} = 1$ | | | | | |
| ۱.۲۳ $m = 0$, تعریف نمی‌شود | | | | | |
| ۱.۲۵ $m = -1, m_{\perp} = 1$ | | | | | |
| ۱.۲۷ $m = 2, m_{\perp} = -1/2$ | | | | | |



$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_1) \quad \cdot ۲۷$$

$$3x - y = 2 \quad \cdot ۲۹$$

$$x - y = -\sqrt{2} \quad \cdot ۳۱$$

$$5x + y = 2.5 \quad \cdot ۳۳$$

$$m = 3, (0, 5), (-5/3, 0) \quad \cdot ۳۵$$

$$m = -1, (0, 2), (2, 0) \quad \cdot ۳۷$$

$$m = 1/2, (0, -2), (2, 0) \quad \cdot ۳۹$$

$$m = 2/3, (0, -4), (3, 0) \quad \cdot ۴۱$$

$$m = -2/3, (0, 2), (3, 0) \quad \cdot ۴۳$$

$$m = 3/2, (0, 3), (-2, 0) \quad \cdot ۴۵$$

$$m = 3, (0, -20), (20/3, 0) \quad \cdot ۴۷$$

$$m = -b/a, (0, b), (a, 0) \quad \cdot ۴۹$$

$$\sqrt{3}x + 3y = 3 \quad \cdot ۵۱$$

$$x - y = 1 \quad \text{الف} \quad \cdot ۵۳$$

$$x + y = 3 \quad \text{ب}$$

$$3/\sqrt{2} \quad \text{پ}$$

$$x + \sqrt{3}y = 0 \quad \text{الف} \quad \cdot ۵۵$$

$$\sqrt{3}x - y = 0 \quad \text{ب}$$

$$3/2 \quad \text{پ}$$

$$2x + y = -2 \quad \text{الف} \quad \cdot ۵۷$$

$$x - 2y = -6 \quad \text{ب}$$

$$6/\sqrt{5} \quad \text{پ}$$

$$2x - y = 2 \quad \text{الف} \quad \cdot ۵۹$$

$$x + 2y = 1 \quad \text{ب}$$

$$2/\sqrt{5} \quad \text{پ}$$

$$x = 3 \quad \text{الف} \quad \cdot ۶۱$$

$$y = 2 \quad \text{ب}$$

$$8 \quad \text{پ}$$

$$x = a \quad \text{الف} \quad \cdot ۶۳$$

$$y = b \quad \text{ب}$$

$$|a + 1| \quad \text{پ}$$

$$m = y/x, \quad m_{\perp} = -x/y \quad \cdot ۲۹$$

$$m_{AB}, \quad m_{\perp} = 0 \quad \text{تعریف نمی شود} \quad \cdot ۳۱$$

$$17.35^{\circ} \leq \alpha \leq 48.37^{\circ} \quad \cdot ۳۳$$

$$0.8391 \quad \cdot ۳۵$$

$$37 \quad \text{فایبر گلاس بهترین عایق} (-16 \text{ deg/in}) \text{ و لایه نازک کاری}$$

$$\text{گچ بدترین عایق} (-3 \text{ deg/in}) \text{ است.}$$

$$39 \quad \text{الف) غیر همخط}$$

$$\text{ب) غیر همخط}$$

$$\text{پ) } D, C, B \text{ همخط اند}$$

$$\text{ت) غیر همخط}$$

$$\text{ث) } D, C, B, A \text{ همخط اند}$$

$$(3, -2) \quad \cdot ۴۱$$

$$x = -2, \quad y = -9 \quad \cdot ۴۳$$

$$\text{بخش ۳۰۱، صفحه های ۱۵ تا ۱۷}$$

$$x = 2 \quad \text{الف} \quad \cdot ۱$$

$$y = 3 \quad \text{ب}$$

$$x = 0 \quad \text{الف} \quad \cdot ۳$$

$$y = 0 \quad \text{ب}$$

$$x = -4 \quad \text{الف} \quad \cdot ۵$$

$$y = 0 \quad \text{ب}$$

$$x = 0 \quad \text{الف} \quad \cdot ۷$$

$$y = b \quad \text{ب}$$

$$x - y = 0 \quad \cdot ۹$$

$$x - y = -2 \quad \cdot ۱۱$$

$$2x - y = -b \quad \cdot ۱۳$$

$$3x - 2y = 0 \quad \cdot ۱۵$$

$$x = 1 \quad \cdot ۱۷$$

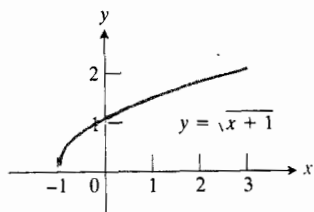
$$x = -2 \quad \cdot ۱۹$$

$$F_0 x + T y = T F_0 \quad \cdot ۲۱$$

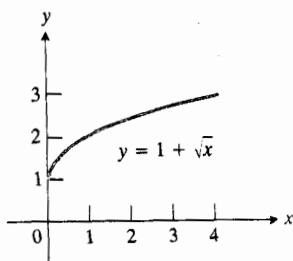
$$x = 0 \quad \cdot ۲۳$$

$$5x + 15y = 19 \quad \cdot ۲۵$$

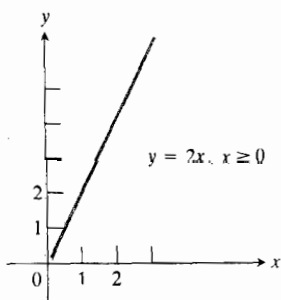
۱۷. $x \geq -1, y \geq 0$



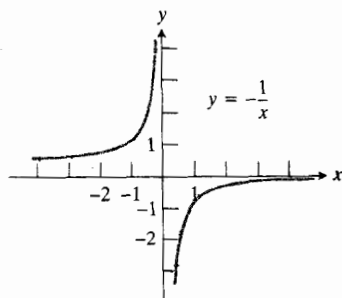
۱۹. $x \geq 0, y \geq 1$



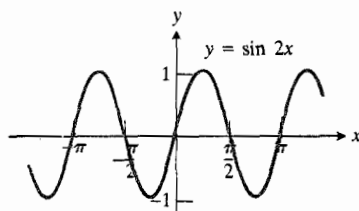
۲۱. $x \geq 0, y \geq 0$



۲۳. $x \neq 0, y \neq 0$



۲۵. $-1 \leq y \leq 1$



۶۵. الف) $3y + 4x = 32$

ب) $3x - 4y = -12$

پ) $22/5$

۶۷. 25°

۶۹. 150°

۷۱. 116.6°

۷۳. 126.9°

۷۵. $\sqrt{3}x - y = \sqrt{3} - 2$

۷۷. $x = -2$

۷۹. 597 atm

۸۱. $S = 0.000232 + 34.85$

۸۳. 23 ft

بخش ۴.۱، صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹

۱. $x \geq 0, y \geq 0$

۳. $x \geq 0, y \leq 0$

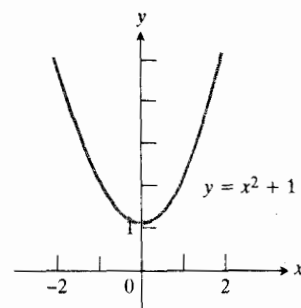
۵. $x \geq -2, y \geq 0$

۷. $x \neq 2, y \neq 0$

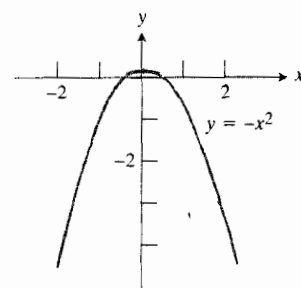
۹. $-2 \leq y \leq 2$ ، همه x ها

۱۱. $-3 \leq y \leq 3$ ، همه x ها

۱۳. $y \geq 1$ ، همه x ها

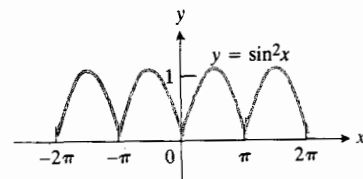
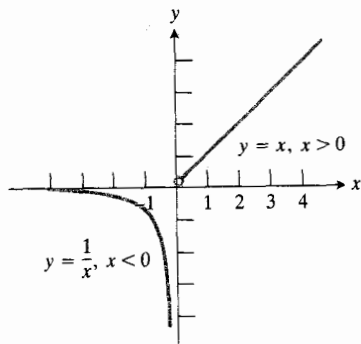


۱۵. $y \leq 0$ ، همه x ها

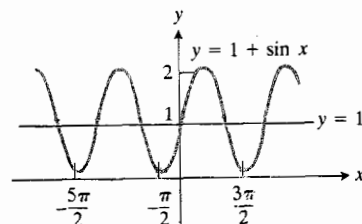


۲۷. همه x ها، $0 \leq y \leq 1$

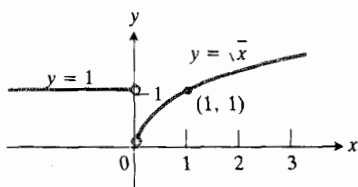
۴۱



۲۹



۴۳



۳۱. الف) خیر

ب) خیر

پ) $x > 0$

۳۳. الف) خیر

ب) خیر

پ) خیر

ت) $0 < x \leq 1$

۴۵. D_f : همه x ها، D_g : $x \geq 1$;

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_{g|f}$: $x \geq 1$; $D_{f|g}$: $x > 1$

۴۷. D_f : $x \geq 0$, D_g : $x \geq -1$;

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_{f|g}$: $x \geq 0$; $D_{g|f}$: $x > 0$

۴۹. الف) ۲-

ب) ۱۱

پ) ۲

ت) $1 + (1/x)$

ث) $1 + (1/2x)$

ج) $1 + 5x, x \neq 0$

۵۱. $f(1-x) = (x/x-1)$

۵۳. ۲

۳۵. الف) $(x/2) \neq \pm(\pi/2), \pm(3\pi/2), \dots$

$\pm((2n-1)\pi)/2$

ب) $x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm(2n-1)\pi$

پ) همه مقادیر حقیقی

ت) دامنه، پاسخ قسمت (ب) و برد، پاسخ قسمت (پ) است

۳۷. i, iii, یا iv نمی تواند باشد زیرا $f(0) \neq 0$

۳۹

بخش ۵.۱، صفحه های ۳۲ تا ۳۳

۰.۱ ۳

۰.۳ ۵

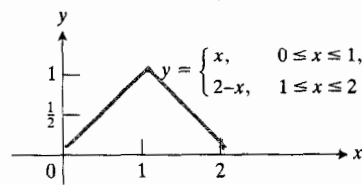
۰.۵ ± 2

۰.۷ $-1/2, -9/2$

۰.۹ $17/3, -1/3$

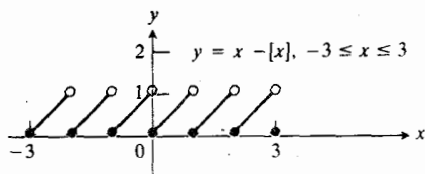
۰.۱۱ ج

| x | y |
|-----|-----|
| 0 | 0 |
| 1/2 | 1/2 |
| 1 | 1 |
| 3/2 | 1/2 |
| 2 | 0 |

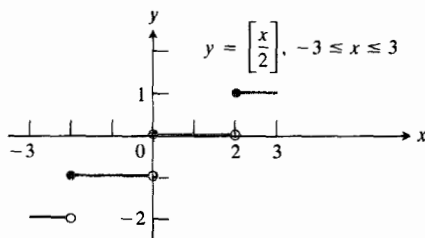


$$g(x) = \sqrt{x} \quad ۰.۵۱$$

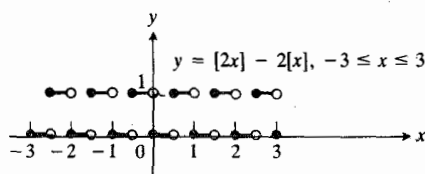
(الف) ۰.۵۳



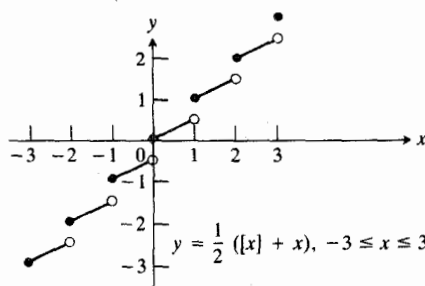
(ب)



(ب)



(ت)



۰.۵۵ وقتی $x < 0$ عددی صحیح نباشد، $[x]$ يك واحد کمتر از قسمت صحیح نمایش اعشاری x است.

بخش ۶.۱، صفحه ۳۸

۰۱ تقریباً ۳۵ مگس در روز

$$۰.۳ \quad \text{الف)} \quad h^2 - 3$$

$$\text{ب)} \quad -3$$

$$\text{پ)} \quad 3x + y = 3$$

$$۰.۱۳ \quad \text{پ}$$

$$۰.۱۵ \quad \text{ب}$$

$$۰.۱۷ \quad \text{ت}$$

$$۰.۱۹ \quad \text{الف}$$

$$۰.۲۱ \quad -2 < x < 2$$

$$۰.۲۳ \quad -1 \leq x \leq 3$$

$$۰.۲۵ \quad -2 < x < 2$$

$$۰.۲۷ \quad -3/2 < x < -1/2$$

$$۰.۲۹ \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$۰.۳۱ \quad x \geq 1 \quad \text{یا} \quad x \leq -1$$

$$۰.۳۳ \quad |x| < 8$$

$$۰.۳۵ \quad |x+2| < 3$$

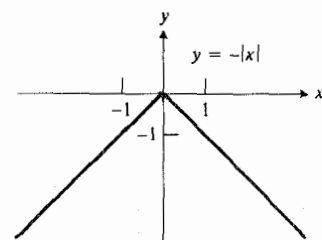
$$۰.۳۷ \quad |y| < a$$

$$۰.۳۹ \quad |y-L| < \epsilon$$

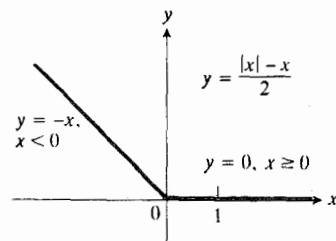
$$۰.۴۱ \quad |x-x_0| < \delta$$

$$۰.۴۳ \quad f(x) = 1-x, \quad x \leq 1; \quad f(x) = x-1, \quad x \geq 1$$

$$۰.۴۵$$



$$۰.۴۷$$



۰.۴۹ دامنه $y = \sqrt{x^2}$ همه x هاست، اما دامنه $y = (\sqrt{x})^2$ عبارت است از $x \geq 0$. برد هر دو یکی و عبارت است از $y \geq 0$.

$$f'(x) = 2x - 1, \quad m = 11, \quad 11x - y = 13 \quad ۰۹$$

$$f'(x) = 2x^2, \quad m = 108, \quad 108x - y = 223 \quad ۰۱۱$$

$$f'(x) = 1 + (1/x^2), \quad m = 10/9, \quad 10x - 9y = 6 \quad ۰۱۳$$

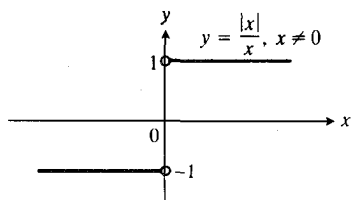
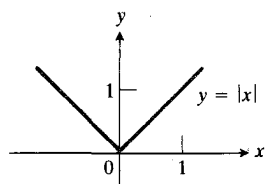
$$f'(x) = 1/\sqrt{2x}, \quad m = 1/\sqrt{6}, \quad x - \sqrt{6}y = -3 \quad ۰۱۵$$

$$f'(x) = 1/\sqrt{2x+3}, \quad m = 1/3, \quad x - 3y = -6 \quad ۰۱۷$$

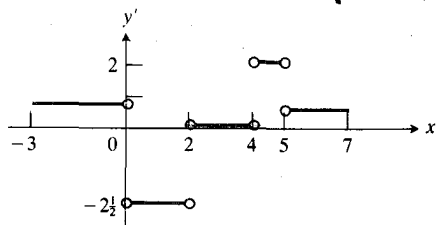
$$f'(x) = -1/(2x+3)^{3/2}, \quad m = -1/27 \quad ۰۱۹$$

$$x + 27y = 12$$

$$x \neq 0, f'(x) = |x|/x \text{ برای } f(x) = |x| \text{ مشتق} \quad ۰۲۱$$



(الف ۰۲۳)



(ب ۰، ۲، ۴، ۵)

۰ ۰۲۵

۰۲۷. روباه در روز

بخش ۸.۱، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰

$$\Delta s = 322, \quad v_{av} = 16 \quad (\text{الف } ۰۳)$$

$$v(t) = 16t \quad (\text{ب})$$

$$v(2) = 32 \quad (\text{پ})$$

$$\Delta s = 18, \quad v_{av} = 9 \quad (\text{الف } ۰۵)$$

$$v(t) = 4t + 5 \quad (\text{ب})$$

$$v(2) = 13 \quad (\text{پ})$$

$$\Delta s = -8, \quad v_{av} = -4 \quad (\text{الف } ۰۷)$$

$$v(t) = -2t - 2 \quad (\text{ب})$$

$$v(2) = -6 \quad (\text{پ})$$

۰۵ (الف) ۲x

$$2x - y = 3 \quad (\text{ب})$$

$$(0, 1) \quad (\text{پ})$$

۰۷ (الف) -2x

$$2x - y = -5 \quad (\text{ب})$$

$$(0, 4) \quad (\text{پ})$$

۰۹ (الف) 2x + 3

$$x - y = -1 \quad (\text{ب})$$

$$(-3/2, -1/2) \quad (\text{پ})$$

۰۱۱ (الف) 2x + 2

$$y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$(-2, 0) \quad (\text{پ})$$

۰۱۳ (الف) 2x - 2

$$2x + y = 3 \quad (\text{ب})$$

$$(2, 0) \quad (\text{پ})$$

۰۱۵ (الف) 3x^2

$$3x - y = 2 \quad (\text{ب})$$

$$(0, 0) \quad (\text{پ})$$

۰۱۷ (الف) 3x^2 - 3

$$y = 2 \quad (\text{ب})$$

$$(-1, 2), (1, -2) \quad (\text{پ})$$

۰۱۹ (الف) 3x^2 - 6x

$$y + 3x = 5 \quad (\text{ب})$$

$$(0, 4), (2, 0) \quad (\text{پ})$$

بخش ۷.۱، صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵

$$f'(x) = 2x, \quad m = 6, \quad 6x - y = 9 \quad ۰۱$$

$$f'(x) = 2, \quad m = 2, \quad 2x - y = -3 \quad ۰۳$$

$$f'(x) = 1/(2\sqrt{x}), \quad m = 1/(2\sqrt{3}) \quad ۰۵$$

$$x - 2\sqrt{3}y = -(3 + 2\sqrt{3})$$

$$f'(x) = -2/(2x+1)^2, \quad m = -2/49 \quad ۰۷$$

$$2x + 49y = 13$$

۰۲۹ الف) ۴

ب) ۲۱-

پ) ۱۲-

ت) ۷/۳-

۰۳۱ ۵/۴

۰۳۳ ۰

۰۳۵ وجود ندارد

۰۳۷ ۱/۲-

۰۳۹ ۱-

۰۴۱ ۱/۳

۰۴۳ ۱/۲-

۰۴۵ ۰

۰۴۷ ۳/۴

۰۴۹ ۳-

۰۵۱ ۳/۴a

۰۵۳ $f(x) = 1/x$, $g(x) = -1/x$

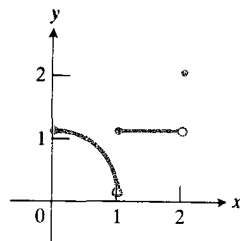
۰۵۵ $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/x^2$

۰۵۷ $f(x) = |x-1|$

۰۵۹ الف) درجهٔ c ها به استثنای ۰، ۱، و ۲

ب) $c = 2$

پ) $c = 0$



۰۶۱ ۰

۰۶۳ ۰

۰۶۵ ۱

۰۶۷ ۶

۰۹ الف) $\Delta s = 8$, $v_{av} = 4$

ب) $v(t) = 4$

پ) $v(2) = 4$

۰۱۱ الف) $s = 490t^2$, $v = 980t$

ب) $4/7 \text{ sec}$, $v_{av} = 280 \text{ cm/sec}$

پ) حدود ۳۴۰۳۰ ثانیه

۰۱۳ الف) 32 ft/sec

ب) -16 ft/sec

پ) 0 ft/sec

۰۱۵ 190 ft/sec

۰۱۷ $t = 8 \text{ sec}$; $v = 0$

۰۱۹ 2.8 sec

۰۲۱ $dQ/dt = 8000 \text{ gal/min}$

$\Delta Q/\Delta t = 10000 \text{ gal/min}$

۰۲۳ الف) ۹۰ دلار برای هر ماشین

ب) ۸۰ دلار برای هر ماشین

پ) $f(101) - f(100) = 11080 - 11000 = 80$

بخش ۹.۱، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۳

۰۱ ۴

۰۳ ۲

۰۵ ۲

۰۷ ۲۵

۰۹ ۱

۰۱۱ $2x$

۰۱۳ ۰

۰۱۵ -۵

۰۱۷ ۱۸

۰۱۹ ۳۶

۰۲۱ ۲

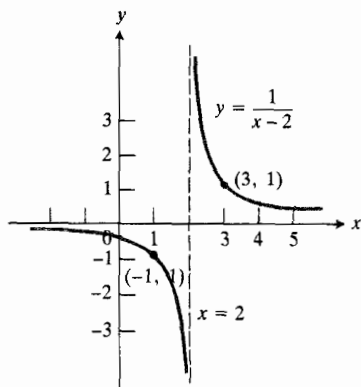
۰۲۳ ۴

۰۲۵ ۱

۰۲۷ الف) ۱۰-

ب) ۲۰-

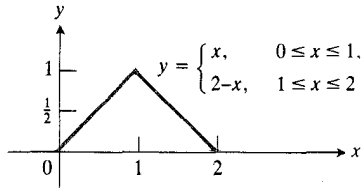
۶۹. به ازای همه c های غیر صحیح
- ۱.۰۷۱
- ۱.۰۷۳
- ۱.۰۷۵
- ۰.۰۷۷
- ۰.۰۷۹
- ۰.۰۸۱
- ۲.۰۸۳
- ۲/۳.۰۸۵
- ۰.۸۹ (الف) $L=5$ ، هر $\delta \leq \epsilon/2$
- (ب) $L=-1$ ، هر $\delta \leq \epsilon/2$
- (پ) $L=-1$ ، هر $\delta \leq \epsilon/3$
- (ت) $L=7$ ، هر $\delta > 0$
- (ث) $L=2$ ، هر $\delta \leq \epsilon$
- (ج) $L=6$ ، هر $\delta \leq \epsilon$
- (چ) $L=-5$ ، هر $\delta \leq 2\epsilon/3$
- (ح) $L=2$ ، هر δ نابزرگتر از مینیمم $(1, \epsilon/2)$
- (خ) $L=-1/9$ ، هر δ نابزرگتر از مینیمم $(1, 18\epsilon)$
- ۰.۹۱ (الف) $\delta \leq 1/80$
- (ب) $\delta \leq 1/800$
- (پ) مینیمم $(\epsilon/8, 1)$ $\delta \leq$
- ۰.۹۳ $f'(0)=0$
- ۰.۵۱ (الف) $-1/5$
- (ب) ۰
- (پ) $-1/3$
- ۰.۵۳



بخش ۱۰.۱، صفحه های ۶۷ تا ۶۹

- ۰.۱ ۲/۵
- ۰.۳
- ۰.۵
- ۰.۷ ۱/۲
- ۰.۹
- ۰.۱۱ ∞
- ۰.۱۳

(الف ۰۲۷)



(ب) آری

(پ) خیر

۲/۳ ۰۲۹

۱ ۰۳۱

۰ ۰۳۳

۰۳۵. ماکسیمم ۱ و مینیمم ۰ است.

۰۳۷. ماکسیمم ندارد و مینیمم ۰ است؛ زیرا بازه باز است.

۰۳۹. بنسب قضیه مقدار میانگین از $f(1) > 0 > f(0)$ نتیجه می گیریم که x وجود دارد به قسمی که $f(x) = 0$.

مساله های گوناگون، فصل ۱، صفحه های ۷۹ تا ۸۴

۰۱ $A(u-h, v-k)$

۰۵ (الف) $2x + 3y = -7$

(ب) $\sqrt{13}$

۰۷ $x=0; 3x+4y=0$

۰۹ (الف) $-A/B$

(ب) C/B

(پ) C/A

(ت) $Bx - Ay = 0$

۰۱۳ ۲ دایره:

$C(-1-\sqrt{5}, 1), r=(\sqrt{2}+\sqrt{10})/2$

$C(0, -2-\sqrt{5}), r=(3\sqrt{2}+\sqrt{10})/2$

$C(0, -2+\sqrt{5}), r=(3\sqrt{2}-\sqrt{10})/2$

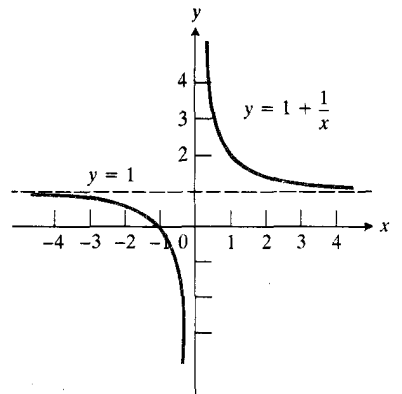
$C(\sqrt{5}-1, 1), r=(\sqrt{10}-\sqrt{2})/2$

۰۱۵. اگر $L_1 \parallel L_2$ ، همه خطوط از نقطه تقاطع L_1 و L_2 می گذرند؛ اگر $L_1 \not\parallel L_2$ ، همه خطوط موازی L_1 و L_2 اند.

۰۱۷ خط: $x+5y=10\sqrt{2}$ ، $x+5y=-10\sqrt{2}$

۰۱۹ $A=\pi r^2; C=2\pi r; A=C^2/4\pi$

۰۵۵



۲ ۰۵۷

بخش ۱۱-۱، صفحه های ۷۶ تا ۷۸

۰۱ (الف) آری

(ب) آری

(پ) آری

(ت) آری

۰۳ (الف) خیر

(ب) خیر

۰۵ (الف) ۰

(ب) ۰

۰۷ همه x ها بجز ۱، ۰

۰۹ همه x های دامنه بجز ۱، ۲

۰۱۱ همه x ها بجز ۱، -۱، ۰، ۱

۰۱۳ $x=-2$

۰۱۵ $x=1, 3$

۰۱۷ $x=-2, 5$

۰۱۹ چنین نقطه ای وجود ندارد

۰۲۱ $x=0$

۰۲۳ ۶

۰۲۵ ۳/۲

$$dy/dx = 180 - 22x; \quad (25/8, 2025/2) \quad ۰۳۹$$

$$t=1, \quad s=16 \quad ۰۴۱$$

$$۰ \quad ۰۴۳$$

$$۰ \quad ۰۴۵$$

$$1/3 \quad ۰۴۷$$

$$2a \quad ۰۴۹$$

$$2x \quad ۰۵۱$$

$$-1/x^2 \quad ۰۵۳$$

$$1/2 \quad ۰۵۵$$

$$۰۵۷ \quad \text{وجود ندارد}$$

$$1 \quad ۰۵۹$$

$$-1 \quad ۰۶۱$$

$$۰ \quad ۰۶۳$$

$$۰ \quad ۰۶۵$$

$$۰ \quad ۰۶۷ \quad \text{(الف)}$$

$$-1/3 \quad \text{(ب)}$$

$$f(-1/x) = (-x^2 - x)/(5x^2 + 7x + 2) \quad \text{(پ)}$$

$$x \neq 0; \quad f(0) = -1/5; \quad 1/f(x) = 2x - 5$$

$$x \neq 1, \quad 5/2$$

$$۰ \quad ۰۶۹ \quad \text{(الف)}$$

$$1/2 \quad \text{(ب)}$$

$$M = 1 + (1/\epsilon) \quad ۰۷۱$$

$$۰۷۵ \quad \text{خیر}$$

$$۰۷۷ \quad \text{همه } x \text{ های صحیح و } 1 < x < 0$$

$$۰۷۹ \quad \delta \leq \epsilon \quad \text{هر}$$

فصل ۲

بخش ۱۰۲، صفحه های ۹۰ تا ۹۱

$$y' = 1, \quad y'' = 0 \quad ۰۱$$

$$y' = 2x, \quad y'' = 2 \quad ۰۳$$

$$y' = -2x, \quad y'' = -2 \quad ۰۵$$

$$x \neq -1; \quad y \neq 0 \quad ۰۲۱$$

$$x \geq 0; \quad 0 < y \leq 1 \quad ۰۲۳$$

$$ad + b = bc + d \quad ۰۲۵$$

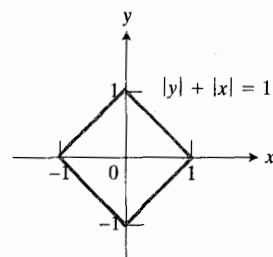
$$1/(1-x) \quad \text{(الف)} \quad ۰۲۷$$

$$x/(x+1) \quad \text{(ب)}$$

$$x \quad \text{(پ)}$$

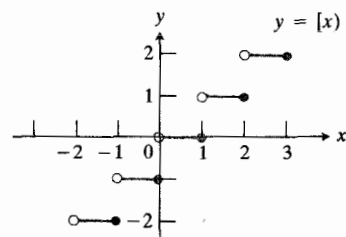
$$1-x \quad \text{(ت)}$$

$$۰۲۹$$

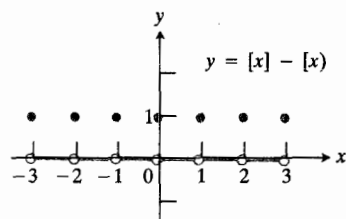


$$m(a, b) = (a+b)/2 - |a-b|/2 \quad ۰۳۱$$

$$۰۳۳ \quad \text{(الف)}$$



$$\text{(ب)}$$



$$2/(x+1)^2 \quad \text{(الف)} \quad ۰۳۵$$

$$(3/2)x^{1/2} \quad \text{(ب)}$$

$$-1/(3x^{2/3}) \quad \text{(پ)}$$

$$۰۳۷ \quad \text{(الف)} \quad ۶$$

$$\text{(ب)} \quad (0, 2)$$

$$-30(2x^3 - 3x^2 + 6x)^{-2}(x^2 - x + 1) \quad ۰۱۷$$

$$2x^{-2} - 2x^{-3} \quad ۰۱۹$$

$$-12x^{-2} + 12x^{-4} - 12x^{-5} \quad ۰۲۱$$

$$(x+2)^{-2} \quad ۰۲۳$$

$$(1-t^2)/(t^2+1)^2 \quad ۰۲۵$$

$$(2-4t)/(t^2-t)^2 \quad ۰۲۷$$

$$(2-6t^2)/(2t^2+1)^2 \quad ۰۲۹$$

$$2(t^3+3t)^2(2t+3) \quad ۰۳۱$$

$$۱۳ \text{ (الف)} \quad ۰۳۳$$

$$-۷ \text{ (ب)}$$

$$۷/۲۵ \text{ (ب)}$$

$$۲۰ \text{ (ت)}$$

$$-۲۲۵ \text{ (ث)}$$

$$-۳۰ \text{ (ج)}$$

$$2y-3x=4 \quad ۰۳۵$$

$$8(3-2x)^{-2} \quad ۰۳۷$$

$$3x^2-1 \quad ۰۳۹$$

$$-8x+2x^2 \quad ۰۴۱$$

$$۰.۰۹y \quad ۰۴۳$$

$$dP/dt = (a^x k)/(akt+1)^2 \text{ (الف)} \quad ۰۴۵$$

$$t=0, \quad dP/dt = a^x k \text{ (ب)}$$

بخش ۳۰۲، صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۴

$$-x/y \quad ۰۱$$

$$(2x-y)/x \quad ۰۳$$

$$2x^2/2y \quad ۰۵$$

$$-\sqrt{y/x} \quad ۰۷$$

$$(y/x) - (x+y)^2 \text{ نیز } (1-2xy-3x^2)/(x^2+1) \quad ۰۹$$

$$(2x^2+1)/\sqrt{x^2+1} \quad ۰۱۱$$

$$(1-2y)/(2x+2y-1) \quad ۰۱۳$$

$$2x/[y(x^2+1)^2] \quad ۰۱۵$$

$$y'=2, \quad y''=0 \quad ۰۷$$

$$y'=x^2+x+1, \quad y''=2x+1 \quad ۰۹$$

$$v=32t, \quad a=32 \quad ۰۱۱$$

$$v=32t-60, \quad a=32 \quad ۰۱۳$$

$$v=gt+v_0, \quad a=g \quad ۰۱۵$$

$$y'=15x^2-15x^3, \quad y''=30x-60x^2 \quad ۰۱۷$$

$$y'=x^2-x^2+x-1, \quad y''=2x^2-2x+1 \quad ۰۱۹$$

$$y'=2x^2-2x-1, \quad y''=4x^2-2 \quad ۰۲۱$$

$$y'=5x^2-2x, \quad y''=10x^2-2 \quad ۰۲۳$$

$$y'=12x+13, \quad y''=12 \quad ۰۲۵$$

$$۰۲۷ \text{ پ}$$

$$x+9y=29 \quad ۰۲۹$$

$$y=2x+2; \quad y=2x-2 \text{ ؛ کوچکترین شیب در } x=0 \text{ و برابر با ۱ است} \quad ۰۳۱$$

$$(-2/3, 0) \text{ و } (0, 16) \quad ۰۳۳$$

$$a=1, \quad b=1, \quad c=0 \quad ۰۳۵$$

$$۰۳۷ \text{ مریخ: حدود ۴۴۶ ثانیه؛ مشتری: حدود ۷۳۰ ثانیه}$$

$$۰۳۹ \text{ حدود } ۲۹۳۹ \text{ متر}$$

$$a(3)=10, \quad a(-1/3)=-10 \quad ۰۴۱$$

$$۰۴۳ \text{ ؛ } t=x_1(1-(1/n)) \text{ خطی از نقطه مفروض و } (t, 0) \text{ بگذرانید}$$

بخش ۲۰۲، صفحه‌های ۹۶ تا ۹۸

$$x^2-x+1 \quad ۰۱$$

$$10x(x^2+1)^4 \quad ۰۳$$

$$-2(x+1)(x^2+1)^{-4}(2x^2+3x-1) \quad ۰۵$$

$$-19/(3x-2)^2 \quad ۰۷$$

$$(1+x^2)^{-2}(x^2-2x-1) \quad ۰۹$$

$$-40/(2x-3)^5 \quad ۰۱۱$$

$$2x-14 \quad ۰۱۳$$

$$45(2x-1)^2(x+7)^{-2} \quad ۰۱۵$$

$$-(2/5)x + 9/5; \quad ۰۱۱ \quad ۵۱۶$$

$$1 + 2x \quad ۰۱۳$$

$$1 - 5x \quad ۰۱۵$$

$$2 + 8x \quad ۰۱۷$$

$$2 + x \quad ۰۱۹$$

$$1 - x \quad ۰۲۱$$

$$۱۰۵۲ \quad ۰۲۳ \quad \text{الف}$$

$$۱۰۵۰۳ \quad \text{ب}$$

$$۱۰۵۰۱ \quad \text{پ}$$

$$۰۲۵ \quad \text{الف} \quad ۰۲۱$$

$$۰۲۲ \quad \text{ب}$$

$$۰۲۰۱ \quad \text{پ}$$

$$۰۲۷ \quad \text{الف} \quad ۰۲۳۱$$

$$۰۲۲ \quad \text{ب}$$

$$۰۲۰۳۱ \quad \text{پ}$$

$$۰۲۹ \quad \text{الف} \quad ۰۲۳$$

$$۰۲۴ \quad \text{ب}$$

$$۰۲۰۶ \quad \text{پ}$$

$$4\pi r^2 dr \quad ۰۳۱$$

$$3x^2 dx \quad ۰۳۳$$

$$2\pi hr dr \quad ۰۳۵$$

$$(2/3)\pi hr dr \quad ۰۳۷$$

$$۰۳۹ \quad \text{الف} \quad ۰۲۰۸\pi$$

$$\%۲ \quad \text{ب}$$

$$\%۳ \quad ۰۴۱$$

$$۰۴۳ \quad \text{کمتر از } ۱\% \text{ خطا}$$

$$۰۴۵ \quad \text{کمتر از } ۱/۳\%$$

$$۰۴۷ \quad \text{کمتر از } ۱\%$$

$$۰۴۹ \quad \text{کمتر از } ۰.۰۵\%$$

$$۰۵۳ \quad \text{ب} \quad x = ۰.۰۰۴, \quad 1 + (1/2)x, \quad 2 + 2x$$

$$f(۰.۰۰۴) \approx ۰.۰۰۰۳ \quad \text{پ}$$

$$[5(3x+7)^4]/2y^2 \quad ۰۱۷$$

$$(-y/x)^2 \quad ۰۱۹$$

$$(2x-1)/2y \quad ۰۲۱$$

$$-(x^2+9)/[3x^2(x^2+3)^{2/3}] \quad ۰۲۳$$

$$(6y-x^2)/(y^2-6x) \quad ۰۲۵$$

$$-(2/5)(2x+5)^{-5/5} \quad ۰۲۷$$

$$-(1/4)(x-x^{3/2})^{-1/2} \quad ۰۲۹$$

$$(0, 1) \quad \text{و} \quad (-4, 0) \quad ۰۳۱$$

$$۰۳۳ \quad a^{-1/3} (2/3); \quad \text{برای اینکه } db/da \text{ وجود داشته باشد}$$

$$a \neq 0 \quad \text{باید}$$

$$-x/y; \quad -1/y^3 \quad ۰۳۵$$

$$-(y/x)^{1/2}; \quad (1/3)x^{-2/3}y^{-1/3} \quad ۰۳۷$$

$$(y+1)^{-1}; \quad -(y+1)^{-2} \quad ۰۳۹$$

$$(1+y^{-1/2})^{-1}; \quad (1/2)(\sqrt{y}+1)^{-2} \quad ۰۴۱$$

$$2y-7x=-2 \quad \text{الف} \quad ۰۴۳$$

$$7y+4x=29 \quad \text{ب}$$

$$y-3x=6 \quad \text{الف} \quad ۰۴۵$$

$$3y+x=8 \quad \text{ب}$$

$$y+x=-1 \quad \text{الف} \quad ۰۴۷$$

$$y-x=3 \quad \text{ب}$$

$$y+2x=3, \quad y+2x=-3 \quad ۰۴۹$$

$$(-13/4, 17/16) \quad ۰۵۱$$

$$(\pm\sqrt{7}, 0), \quad m=-2 \quad ۰۵۳$$

$$v=2/5 \text{ m/sec}; \quad a=-4/125 \text{ m/sec}^2 \quad ۰۵۵$$

$$\text{بخش ۴۰۲، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲}$$

$$2x-3; \quad ۱۰۰۴ \quad ۰۱$$

$$-(1/4)x+1; \quad ۰۰۴۷۵ \quad ۰۳$$

$$2x-2; \quad ۰۰۲۲ \quad ۰۵$$

$$۱۰x-13; \quad ۶ \quad ۰۷$$

$$(1/4)x+1; \quad ۲۰۰۲۵ \quad ۰۹$$

۰۵۵ ۱۲٪ سرعت نور

بخش ۵.۲، صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۷

۰۱ $8t - 20$

۰۳ $-t^2$

۰۵ $-1/9$

۰۷ $-t^{-2}(2t^{-1} + 2)^{-1/2}$

۰۹ $8t + 10$

۰۱۱ $18x + (1/3x^2)$

۰۱۳ $(16t^2 - 20t + 1)^{-1/2}(16t - 10)$

۰۱۵ $(1 - 2v)/[v^2(v - 1)^2]$

۰۱۷ $24t$

۰۱۹ $-(1/4t^2)$

۰۲۱ 1

۰۲۳ $\sqrt{2}/2$

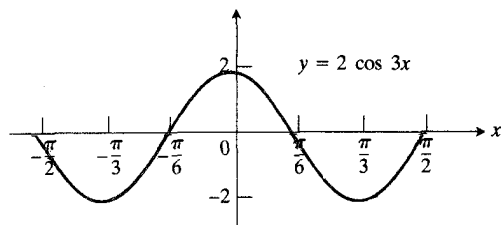
۰۲۵ 0

۰۲۷ $dv/dt = (1/2)k^x$

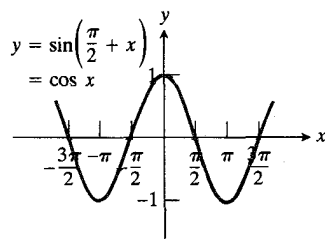
۰۲۹ $kT/2$

بخش ۶.۲، صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۴

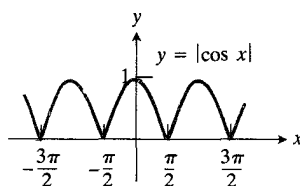
۰۱



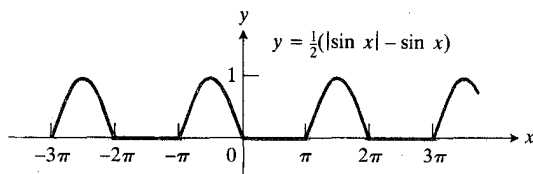
۰۵



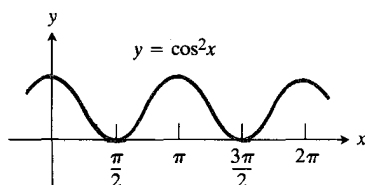
۰۷



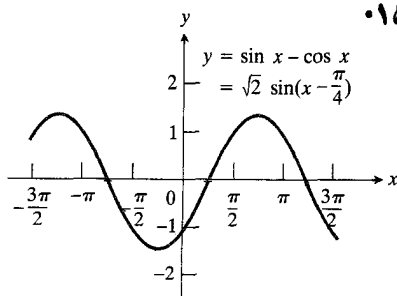
۰۹



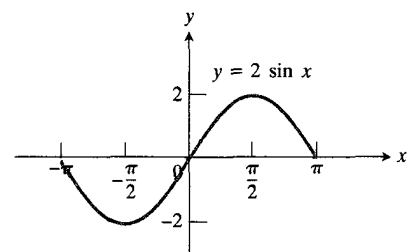
۰۱۱



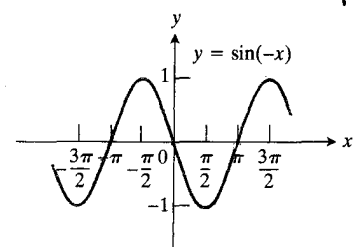
۰۱۳



۰۱۵



۰۳



$$\tan x \sec x \quad ۰۱۵$$

$$\tan(x-1) \sec(x-1) \quad ۰۱۷$$

$$-\tan(1-x) \sec(1-x) \quad ۰۱۹$$

$$2 \sec^2 x \quad ۰۲۱$$

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x \quad ۰۲۳$$

$$-1 \circ \sin 5x \cos 5x = -5 \sin 1 \circ x \quad ۰۲۵$$

$$5 \sec^2(5x-1) \quad ۰۲۷$$

$$2 \cos 2x \quad ۰۲۹$$

$$(-\sin 2x) / \sqrt{2 + \cos 2x} = (-\sin 2x) / y \quad ۰۳۱$$

$$-(\sin \sqrt{x}) / 2\sqrt{x} \quad ۰۳۳$$

۰۳۵ $y = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$. بنابراین اگر $\cos x > 0$ ، $y' = -\sin x$ و اگر $\cos x < 0$ ، $y' = \sin x$ ؛ یا $y' = (-\sin 2x) / \sqrt{2(1 + \cos 2x)}$ توجه کنید که در هر حال به ازای $x = (2k+1)(\pi/2)$ ، k صحیح، y' وجود ندارد.

$$\cos^2 y \quad ۰۳۷$$

$$(-\sin 2x) / y \quad ۰۳۹$$

$$-(1/x)[y + \cos^2(xy)] \quad ۰۴۱$$

$$y = 2x \quad ۰۴۳$$

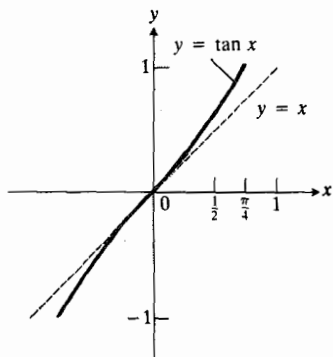
$$1 \quad ۰۴۵$$

$$1 \quad ۰۴۷$$

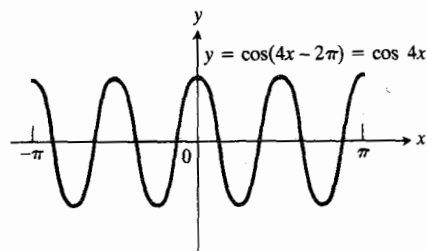
$$1 \quad ۰۴۹$$

$$-\sin a \quad ۰۵۱$$

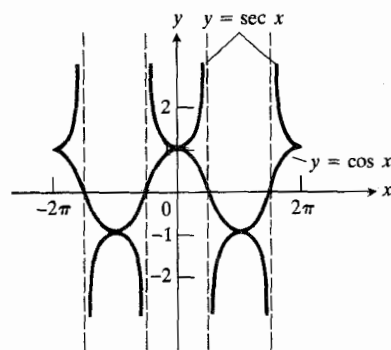
$$۰۵۳$$



۰۱۷



۰۱۹



۰۲۱ الف ۳۷

ب ۳۶۵

پ ۱۰۱

ت ۲۵

۰۲۳

۰۲۵

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1 \quad ۰۲۷$$

بخش ۷۰۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۰

$$\cos(x+1) \quad ۰۱$$

$$\frac{1}{y} \cos(x/2) \quad ۰۳$$

$$-5 \sin 5x \quad ۰۵$$

$$-2 \sin 2x \quad ۰۷$$

$$3 \cos(3x+2) \quad ۰۹$$

$$x \cos x + \sin x \quad ۰۱۱$$

$$x \cos x \quad ۰۱۳$$

۰۵۵. $f: b=1$ در $x=0$ پیوسته است، اما $f'(0)$ وجود ندارد.

۰۵۷. $1 + (3/2)x$ ؛ مجموعه‌شان است

بخش ۸۰۲، صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۴

۰۱. $x^2 + y^2 = 1$ ؛ از $(1, 0)$ شروع و پس از پیمودن مسیر در خلاف جهت ساعت به همین نقطه منتهی می‌شود.

۰۳. نظیر مسأله ۱

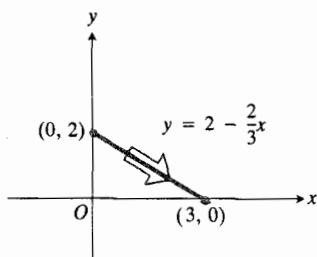
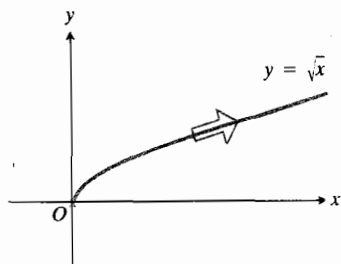
۰۵. $x^2 + y^2 = 9$ ؛ از $(3, 0)$ شروع و به همین نقطه منتهی می‌شود، حرکت در خلاف جهت ساعت است.

۰۷. $x + y = 1$ ؛ از $P(1, 0)$ تا $Q(0, 1)$

۰۹. الف) $x = 2 \cos t$, $y = -2 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

ب) $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

۰۱۱



۰۲۱. $y = 1 + (x/2)$; $dy/dt = 1$, $dx/dt = 2$

$dy/dx = 1/2$

۰۲۳. $x^y + y^x = 25$; $dy/dt = 5 \cos t$

$dx/dt = -5 \sin t$, $dy/dx = -x/y = -\cot t$

۰۲۵. $y = \cos x$; $dy/dt = 2t \cos(t^2)$, $dx/dt = 2t$

$dy/dx = \cos[(\pi/2) + x] = -\sin x$

۰۲۷. $x^y + (y-1)^y = 1$; $dy/dt = \cos t$

$dx/dt = -\sin t$

$dy/dx = -x/(y-1) = -\cos t / \sin t$

۰۲۹. ب

۰۳۱. الف) $5/3$

ب) $3y - 5x = -8$

۰۳۳. الف) $1/11$

ب) $11y - x = 16$

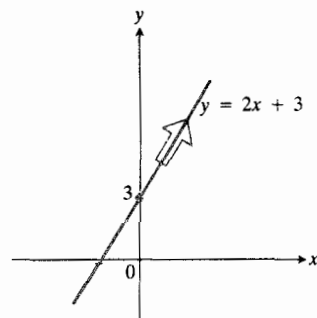
۰۳۵. الف) -2

ب) $2y + 4x = 9$

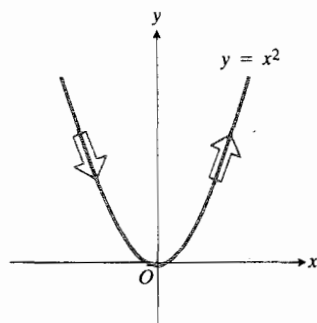
۰۳۷. ۲

۰۳۹. -3

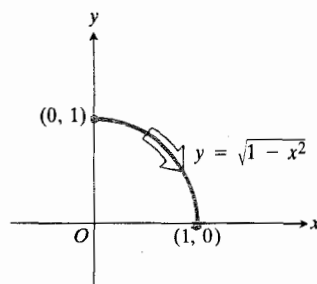
۰۴۱. ۵



۰۱۳



۰۱۵



$$2 \sec^2(x/2) dx \quad ۰۹$$

$$\csc[1-(x/3)] \cot[1-(x/3)] dx \quad ۰۱۱$$

$$dx=dt, \quad dy=(1+t)dt, \quad dy/dx=1+t \quad ۰۱۳$$

$$dx=-\sin t dt, \quad dy=\cos t dt \quad ۰۱۵$$

$$dy/dx=-\cot t$$

مساله‌های گوناگون، فصل ۲، صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۷

$$-2(x^2-2)^{-3/2} \quad ۰۱$$

$$-y/(x+2y) \quad ۰۳$$

$$-(2xy+y^2)/(2xy+x^2) \quad ۰۵$$

$$2 \sin(1-2x) \quad ۰۷$$

$$(x+1)^{-2} \quad ۰۹$$

$$(3x^2-2xa^2)/\sqrt{x^2-a^2} \quad ۰۱۱$$

$$2x/(1-x^2)^2 \quad ۰۱۳$$

$$10 \sec^2 \Delta x \tan \Delta x \quad ۰۱۵$$

$$[(4x+5)\sqrt{2x^2+5x}]/2 \quad ۰۱۷$$

$$(-2y^2\sqrt{xy}-y)/(2xy\sqrt{xy}+x) \quad ۰۱۹$$

$$-\sqrt[3]{y/x} \quad ۰۲۱$$

$$-y/x \quad ۰۲۳$$

$$-(x+2y+y^2)/(2x+2y+2xy) \quad ۰۲۵$$

$$1/[2y(x+1)^2] \quad ۰۲۷$$

$$-(y+2)/(x+3) \quad ۰۲۹$$

$$(y-3x^2)/(3y^2-x) \quad ۰۳۱$$

$$(1+x)^{-1/2}(1-x)^{-3/2} \quad ۰۳۳$$

$$x^2(x^2+1)^{-2/3} \quad ۰۳۵$$

$$-2 \csc^2 2x \quad ۰۳۷$$

$$(\cos^2 x + 2 \sin^2 x)/\cos^2 x \quad ۰۳۹$$

$$-8x^2 \sin 8x + 2x \cos 8x \quad ۰۴۱$$

$$(1+\cos x)^{-1} \quad ۰۴۳$$

$$-\csc x \cot x \quad ۰۴۵$$

$$-(1/2)t^{-2/2} \quad ۰۴۳$$

$$2t^{-3} \quad ۰۴۵$$

$$-1/\sin^2 t \quad ۰۴۷$$

$$-1/200 \quad ۰۴۹$$

$$3 \quad ۰۵۱$$

بخش ۹.۲، صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۳۹

$$۰۵۶۱۸ \quad ۰۱$$

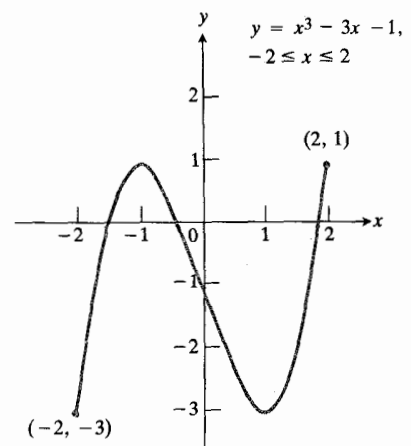
$$۱۰۱۶۲ \quad ۰۳$$

$$-۱۰۱۸۹ \quad ۰۵$$

۰۷ همگی برابر با x_0 اند.

$$۱۰۱۷۹۵۰۹ \quad ۰۹$$

(۰۱۱ ب)



(ب) ۱۰۸۷۹۳۹

(ت) ۱۰۸۳۲۰۹، ۰۵۳۴۷۳۰

$$۰۷۳۹۰۹ \quad ۰۱۳$$

$$۰۶۳۰۱۱۵, \quad ۲۵۷۳۲۷۲ \quad ۰۱۵$$

بخش ۱۰.۲، صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۰

$$(2x^2-3)dx \quad ۰۱$$

$$[(1-2x^2)/\sqrt{1-x^2}]dx \quad ۰۳$$

$$[(1-y)/(1+x)]dx \quad ۰۵$$

$$5 \cos 5x dx \quad ۰۷$$

$$-2 \cos 3t; -2 \quad ۱۰۱$$

$$2, -2 \quad ۱۰۳$$

۱۰۹ همه مقادیر m و b به قسمی که b/π ؛ $m = -1$ ،
 $b = \pi$

۱۱۱ ب) $2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$

ب) خیر، $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x)$ وجود ندارد

فصل ۳

بخش ۱۰۳، صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۳

۱۰۱ $y' = 2x - 1$ بر $(-\infty, 1/2)$ نزولی و بر $(1/2, \infty)$ صعودی است؛ $y(1/2) = 3/4$ مینیمم است.

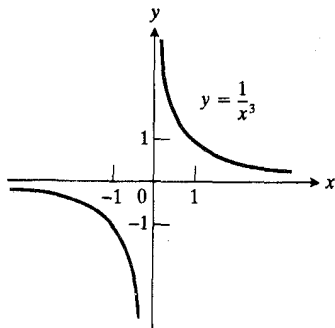
۱۰۳ $y' = x^2 - x - 2$ بر $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ صعودی و بر $(-1, 2)$ نزولی است؛ $y(-1) = 3/2$ ماکسیمم موضعی است، $y(2) = -3$ مینیمم موضعی است.

۱۰۵ $y' = 3x^2 - 27$ بر $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ صعودی و بر $(-3, 3)$ نزولی است؛ $y(-3) = 90$ ماکسیمم موضعی است، $y(3) = -18$ مینیمم موضعی است.

۱۰۷ $y' = 6x - 6x^2$ بر $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ نزولی و بر $(0, 1)$ صعودی است؛ $y(0) = 0$ مینیمم موضعی، $y(1) = 1$ ماکسیمم موضعی است.

۱۰۹ $y' = 4x^3$ بر $(-\infty, 0)$ نزولی و بر $(0, \infty)$ صعودی است؛ $y(0) = 0$ مینیمم است.

۱۱۱ $y' = -3x^{-4}$ بر همه x های مخالف صفر نزولی، مقادیر اکسترم ندارد.



۱۱۳ $y' = -2(x+1)^{-3}$ بر $(-\infty, -1)$ صعودی و بر $(-1, \infty)$ نزولی است، مقادیر اکسترم ندارد.

$$-\sin 2x \sin(\sin^2 x) \quad ۴۷$$

$$2 \sec^2 x \tan x \quad ۴۹$$

$$-3 \sin 6x \sin(\sin^2 x) \quad ۵۱$$

$$2(1+t)/\sqrt{2t+t^2} \quad ۵۳$$

$$\text{نیز } (4x+8)/\sqrt{4x^2+16x+15}$$

$$2x + [2x(1-x^2)]/(1+x^2)^2 \quad ۵۵$$

$$3t^2/(2t+1) \quad ۵۷$$

$$\text{نیز } [3(y+1)^{2/3}]/[2(y+1)^{1/3}+1]$$

$$1, y=x \quad ۵۹$$

$$2, y-2x=-5 \quad ۶۱$$

$$\pi(20x-x^2) \quad ۶۳$$

$$56 \text{ ft/sec} \quad ۶۵$$

$$-12+18x, f(x)=(2-3x)^2 \quad ۶۷$$

$$-8/5 \quad ۶۹$$

$$-3/32 \quad ۷۱$$

$$x+y=3 \quad ۷۳$$

$$3(2x-1)^{-5/2} \text{ (الف)} \quad ۷۵$$

$$\text{ب) } -162(3x+2)^{-4}$$

$$\text{ب) } 6a$$

$$h+2k=5; h=-4, k=9/2, r=5\sqrt{5}/2 \quad ۷۹$$

$$5y+8x=18; 5y-3x=-18 \quad ۸۱$$

$$3 \text{ ft} \quad ۸۳$$

$$dy=0.09, \Delta y=0.092 \quad ۸۵$$

$$30 \quad ۸۷$$

$$2/[3\sqrt{x^2+x}(2x+1)(2y+1)] \quad ۸۹$$

$$[3/(x+1)^2] \sin[(2x-1)/(x+1)]^2 \quad ۹۱$$

$$dy/dt = [-x(x-1)^2]/\sqrt{x^2+16}; -12/5 \quad ۹۳$$

$$(\sin z + \sin y + xy \cos y \cos z) \quad ۹۵$$

$$-2y^2 \cos z / [\sin y (\sin z + \sin y)]$$

$$۹۹ \text{ طول ضلع برابر است با } 2r \sin(\pi/n); 2\pi r \text{ آری}$$

پ) ۱۹۰

بخش ۲.۳، صفحه‌های ۱۵۶ تا ۱۵۸

الف) $(2, \infty)$ ب) $(-\infty, 2)$

پ) هر بازه‌ای

ت) وجود ندارد. مینیمم در $(2, -1)$ ، نقطه عطف ندارد.

۳. الف) هر بازه‌ای

ب) وجود ندارد

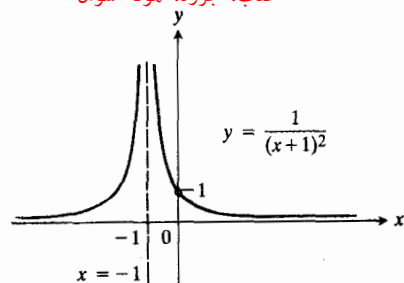
پ) $(0, \infty)$ ت) $(-\infty, 0)$. نقاط اکسترم ندارد، $(0, 0)$ نقطه عطف است.۵. الف) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ب) $(-1, 1)$ پ) $(0, \infty)$ ت) $(-\infty, 0)$. ماکسیمم موضعی در $(-1, 5)$ ، مینیمم موضعی در $(1, 1)$ ، $(0, 3)$ نقطه عطف است.۷. الف) $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ ب) $(1, 3)$ پ) $(2, \infty)$ ت) $(-\infty, 2)$. ماکسیمم موضعی در $(1, 5)$ ، مینیمم موضعی در $(3, 1)$ ، $(2, 3)$ نقطه عطف است.

۹. الف) هر بازه‌ای

ب) وجود ندارد

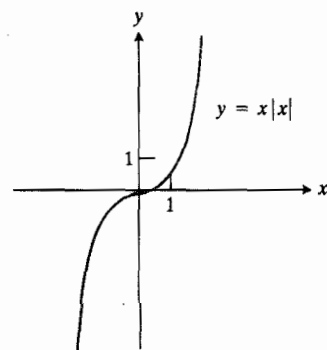
پ) $(2, \infty)$ ت) $(-\infty, 2)$. مقادیر اکسترم ندارد، $(2, 1)$ نقطه عطف است.۱۱. الف) $(-\pi/2, \pi/2)$

ب) وجود ندارد

پ) $(0, \pi/2)$ ت) $(-\pi/2, 0)$. مقادیر اکسترم ندارد، $(0, 0)$ نقطه عطف است.۱۳. الف) $(-\infty, 0)$ ب) $(0, \infty)$ 

۱۵. $y' = -\sin x$ ، بر $(\pi, 3\pi/2]$ و $(-\pi, 0)$ صعودی و بر $(0, \pi)$ و $[-3\pi/2, -\pi)$ نزولی است؛ $y(0) = 1$ ماکسیمم است، $y(-\pi) = y(\pi) = -1$ مینیمم است.

۱۷. y' به ازای $x > 0$ برابر با $2x$ و به ازای $x < 0$ برابر با $-2x$ است، همواره صعودی است، مقادیر اکسترم ندارد.

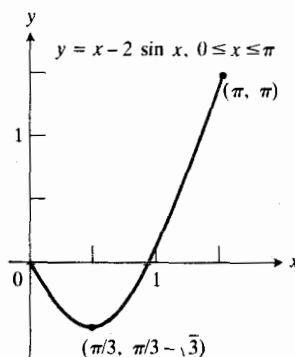


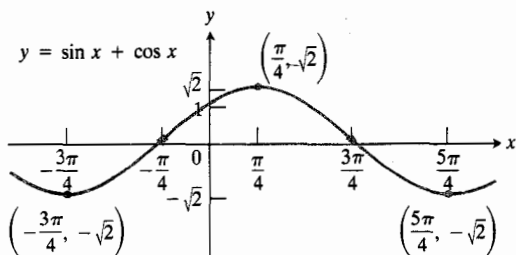
۱۹. ماکسیمم در $x = 0$ و برابر با ۱ است، مینیمم در $x = -\pi$ یا $x = \pi$ و برابر با -1 است.

۲۱. $y' = (x+1)^{-2}$ به ازای $x \neq -1$ همواره مثبت است.

۲۳. $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \leq 0 \\ 1-2x & x > 0 \end{cases}$ (این جواب یکتا نیست).

۲۵. الف) $y' < 0$ اگر $0 \leq x < \pi/3$ ، $y'(\pi/3) = 0$ ، $y' > 0$ اگر $\pi/3 < x \leq \pi$ (ب)

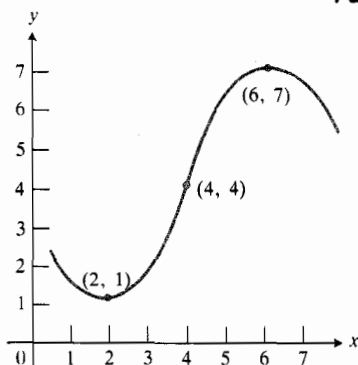




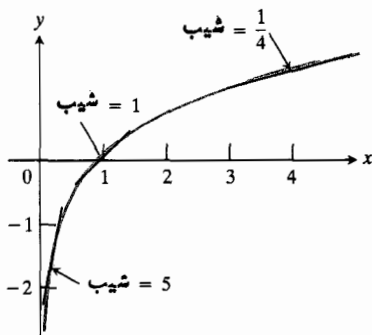
۳۳ الف T

۳۴ ب P

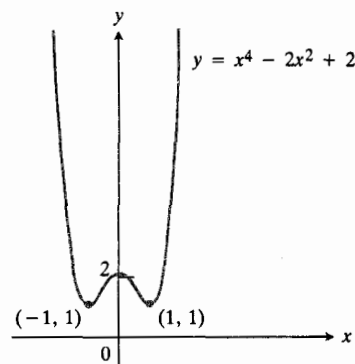
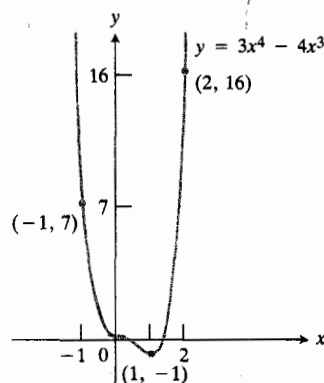
۳۵



۳۶ تقریب و به پایین

۳۷ الف سه بار، یکی یک بار در بازه‌های $(-2, -1)$ ، $(-1/2, 0)$ و $(1/3, 1)$ ب یک بار، در بازه $(-2, -1)$ پ یک بار در بازه $(1, 2)$ ۳۸ مینیمم موضعی در $x = -15$ ، $y = -37125$ ، وماکسیمم موضعی در $x = 0$ ، $y = 0$ ؛نقاط عطف اند $(5, -5125)$ و $(-9, -21121)$ ۳۹ الف $x = 2$ ب $x = 2$

پ وجود ندارد

ت هر بازه‌ای ماکسیمم در $(0, 0)$ ۴۰ $y = (x-1)^2$. این جواب یکتا نیست.۴۱ ماکسیمم در $(-1, 7)$.۴۲ ماکسیمم موضعی در $(1, 16)$ ، مینیمم موضعی در $(3, 0)$ ،نقطه عطف در $(2, 8)$ ۴۳ ماکسیمم موضعی در $(-2, 28)$ ، مینیمم موضعی در $(2, -2)$ ، نقطه عطف در $(0, 12)$ ۴۴ نقطه عطف در $(-1, 1)$ ۴۵ ماکسیمم موضعی در $(-5, 400)$ ، مینیمم موضعی در $(9, -972)$ ، نقطه عطف در $(2, -288)$ ۴۶ ماکسیمم موضعی در $(0, 2)$ ، مقادیر مینیمم در $(-1, 1)$ و $(1, 1)$ ، نقاط عطف در $(-1/\sqrt{3}, 13/9)$ و $(1/\sqrt{3}, 13/9)$ ۴۷ مینیمم در $(1, -1)$ ، نقاط عطف در $(0, 0)$ و $(2/3, -16/27)$ ۴۸ ماکسیمم به مقدار $\sqrt{2}$ در $x = \pi/4, -7\pi/4, \dots$ مینیمم به مقدار $-\sqrt{2}$ در $x = 5\pi/4, -3\pi/4, \dots$ ؛ نقاط

عطف در همه نقاط محل تقاطع خم با محور x

بخش ۳.۳، صفحه‌های ۱۶۲ تا ۱۶۴

۰۱ فرد

۰۳ فرد

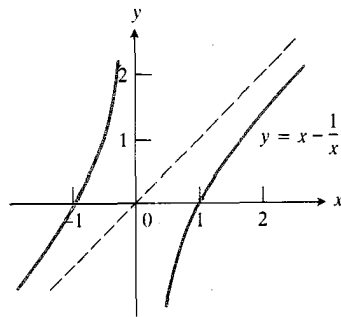
۰۵ نه فرد است نه زوج

۰۷ زوج

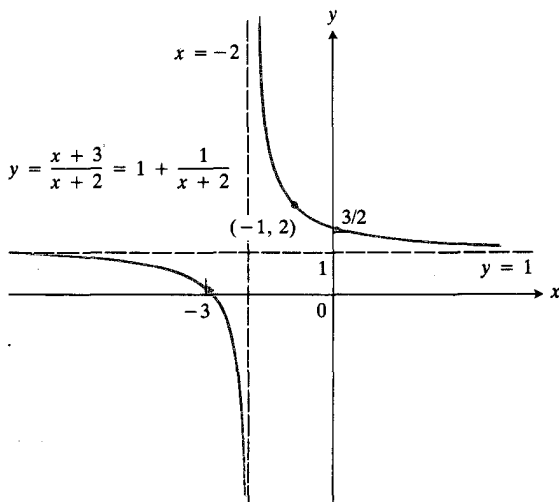
۰۹ زوج

۰۱۱ فرد

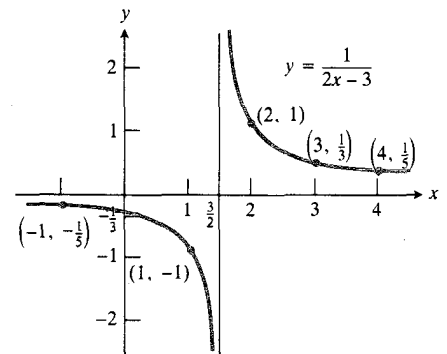
۰۱۳ الف) ندارد

(ب) $(0, -1/3)$ (پ) $x = 3/2$; $y = 0$ (ت) $-2/9$ (ث) به ازای همه مقادیر x جز $x = 3/2$ نزولی است.(ج) بر $(-\infty, 3/2)$ تقعر روبه پایین و بر $(3/2, \infty)$ تقعر روبه بالاست.

۰۱۷ الف) ندارد

(ب) $(0, 3/2)$, $(-3, 0)$ (پ) $x = -2$, $y = 1$ (ت) -1 , $-1/2$ (ث) به ازای همه x ها جز $x = -2$ نزولی است.(ج) بر $(-\infty, -2)$ تقعر روبه پایین و بر $(-2, \infty)$ تقعر روبه بالاست.(چ) به ازای x های بزرگ $y \approx 1$ ، به ازای x های نزدیک $y \approx 1/(x+2)$ ، $x = -2$ 

۰۱۹ الف) ندارد

(ب) $(0, -1)$, $(-1, 0)$ (پ) $x = 1$, $y = 1$ (ت) -2 , $-1/2$ (ث) به ازای همه x ها جز $x = 1$ نزولی است.(ج) بر $(-\infty, 1)$ تقعر روبه پایین و بر $(1, \infty)$ تقعر روبه بالاست.

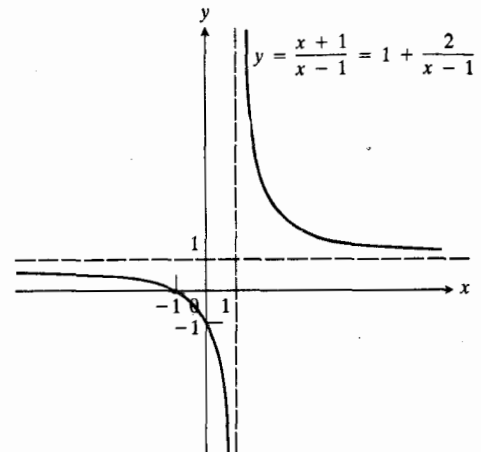
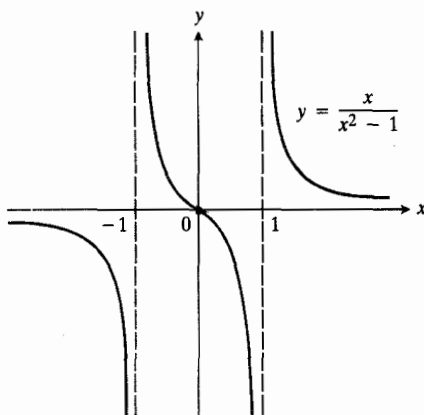
۰۱۵ الف) تابع فرد؛ تقارن نسبت به مبدأ

(ب) $(\pm 1, 0)$ (پ) $x = 0$, $y = x$

(ت) ۲

(ث) به ازای همه x ها جز $x = 0$ صعودی است.(ج) بر $(-\infty, 0)$ تقعر روبه بالا و بر $(0, \infty)$ تقعر روبه پایین است.(چ) به ازای x های بزرگ $y \approx x$ ، به ازای x های کوچک $y \approx -1/x$

ج) به ازای x های بزرگ $y \approx 1$ ، به ازای y های نزدیک $x=1$ ، $y \approx 2/(x-1)$



۲۵. الف) زوج

ب) $(0, 0)$

پ) $x = \pm 1$ ، $y = 1$

ت) ۰

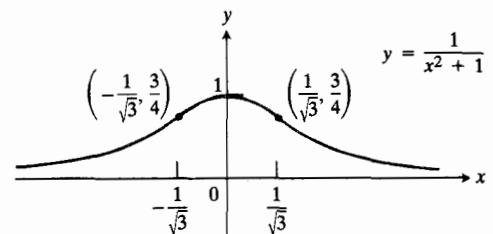
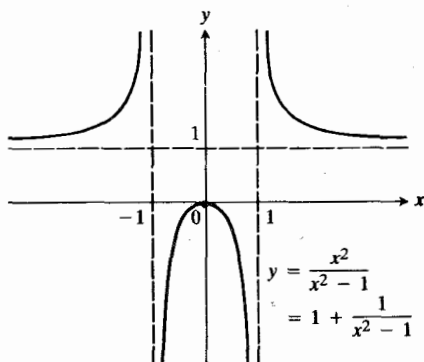
ث) بر $(-1, 0) \cup (-\infty, -1)$ صعودی، بر $(0, 1) \cup (1, \infty)$ نزولی

ج) بر $(-1, 1)$ تقریباً رو به پایین، بر $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ تقریباً رو به بالا

تقریباً رو به بالا

ج) به ازای x های بزرگ $y \approx 1$ ، نزدیک $x=1$ ، $y \approx 1/(2(x-1))$ ، در نزدیک $x=-1$ ، $y \approx 1/(2(x+1))$

$y \approx 1/(2(x+1))$



۲۳. الف) مبدأ

ب) $(0, 0)$

پ) $x = \pm 1$ ، $y = 0$

ت) -۱

ث) به ازای همه x ها جز $x = \pm 1$ نزولی است.

ج) بر $(-1, 0) \cup (0, 1)$ تقریباً رو به پایین، بر $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ تقریباً رو به بالاست.

ج) در نزدیک $x=1$ ، $y \approx 1/(2(x-1))$ ، در نزدیک $x=-1$ ، $y \approx 1/(2(x+1))$

۲۷. الف) ندارد

ب) $(0, 2)$ ، $(\pm 2, 0)$

پ) $x=1$ ، $y=x+1$

ت) $y'(2)=2$ ، $y'(-2)=2/3$ ، $y'(0)=2$

ث) همواره صعودی

۳۱. الف) ندارد

ب) $(-\sqrt[3]{1/3}, 0)$

پ) $x=0$

ت) $-6\sqrt[3]{9}$

ث) بر $(-\infty, 0) \cup (0, \sqrt[3]{1/6})$ نزولی، بر

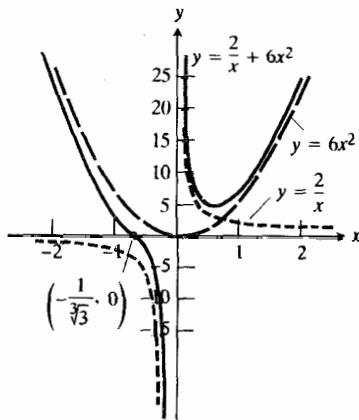
$(\sqrt[3]{1/6}, \infty)$ صعودی

ج) بر $(-\infty, -\sqrt[3]{1/3}) \cup (0, \infty)$ تقریباً بالا، بر

$(-\sqrt[3]{1/3}, 0)$ تقریباً پایین

چ) $y \approx 6x^2$ وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ ، $y \approx 2/x$ وقتی

$x \rightarrow 0$



۳۳. الف) نسبت به محور y

ب) $(\pm 2, 0)$ ، $(0, 4)$

پ) $y=1$ ، $x=\pm 1$

ت) $y'(\pm 2)=\pm 4/3$ ، $y'(0)=0$

ث) بر $(-\infty, 0)$ نزولی، بر $(0, \infty)$ صعودی

ج) بر $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ تقریباً پایین، بر

$(-1, 1)$ تقریباً بالا

چ) به ازای x های بزرگ $y \approx 1$ ؛ نزدیک $x=1$ ،

$y \approx -3/(2(x-1))$ ؛ نزدیک $x=-1$ ،

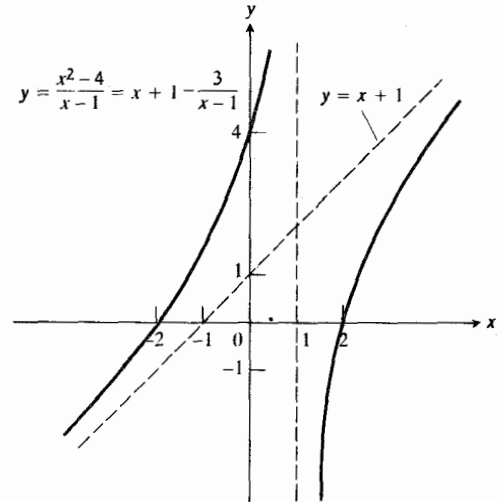
$y \approx 3/(2(x+1))$

ج) بر $(-\infty, 1)$ تقریباً بالا، بر $(1, \infty)$ تقریباً

پایین

چ) به ازای x های بزرگ $y \approx x$ (یا $y \approx x+1$)،

در نزدیک $x=1$ ، $y \approx -3/(x-1)$



۲۹. الف) ندارد

ب) $(\pm 1, 0)$ ، $(0, -1/2)$

پ) $y=1/2x-1$ ، $x=-2$

ت) $y'(0)=1/8$ ، $y'(-1)=-1$ ، $y'(1)=1/3$

ث) بر $(-\infty, -2-\sqrt{3}) \cup (-2+\sqrt{3}, \infty)$

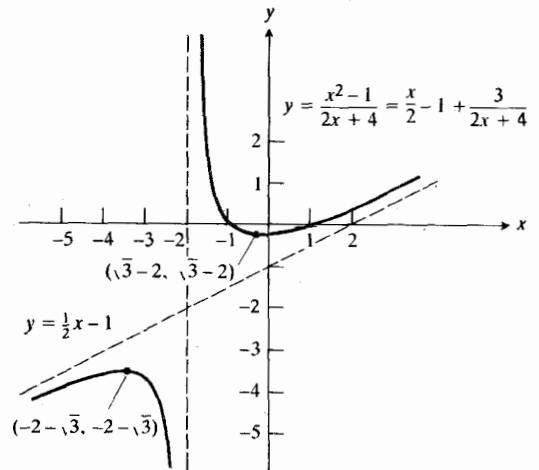
صعودی، بر $(-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$ نزولی

ج) بر $(-2, \infty)$ تقریباً بالا، بر $(-\infty, -2)$ تقریباً

پایین

چ) به ازای x های بزرگ $y \approx (x/2)-1$ (یا $y \approx x/2$)،

در نزدیک $x=-2$ ، $y \approx 3/(2x+4)$



پ) $y=0, x=2, x=0$

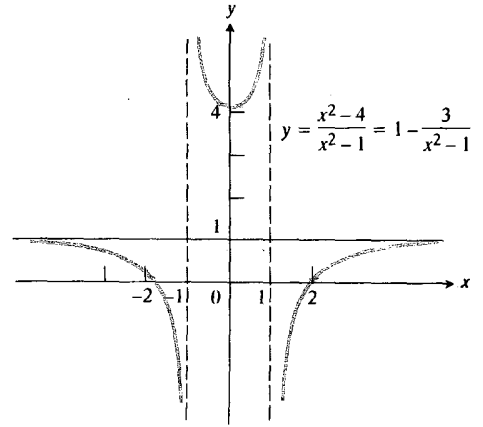
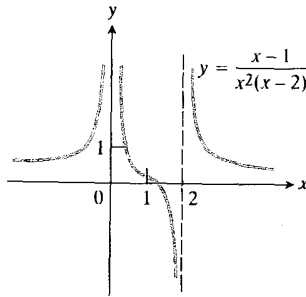
ت) $y'(1)=-1$

ث) بر $(-\infty, 0)$ صعودی، بر $(2, \infty) \cup (0, 2)$ نزولی

ج) بر $(-\infty, 0) \cup (0, 1.22)$ و $(2, \infty)$ تفررو به بالا، بر $(1.22, 2)$ تفررو به پایین

چ) نزدیک $x=0$ ، $y \approx 1/(2x^2)$ ، نزدیک $x=2$ ،

$y \approx 1/(4(x-2))$



۳۵ الف) ندارد

ب) $(0, 1/3)$

پ) $x=1, x=3, x=1$

ت) $2/9$

ث) بر $((1-\sqrt{5})/2, (1+\sqrt{5})/2)$ صعودی، بر

نزولی $(-\infty, (1-\sqrt{5})/2) \cup ((1+\sqrt{5})/2, \infty)$

ج) بر $(-\infty, -1) \cup (1, 3)$ تفررو به پایین، بر

$(-1, 1) \cup (3, \infty)$ تفررو به بالا

چ) به ازای x های بزرگ، $y \approx 1$ ؛ نزدیک $x=1$ ،

$y \approx 2/((x-1)(-2)) = 1/(1-x)$ و نزدیک

$x=3$ ، $y \approx 10/(2(x-3)) = 5/(x-3)$

۴۱ فرد

۴۳ زوج

۴۵ فرد

۴۷ فرد

۴۹ زوج

۵۱ فرد

۵۳ زوج

۵۵ نه فرد نه زوج

۵۷ الف) زوج

ب) زوج

۵۹ الف) فرد

ب) فرد

پ) زوج

ت) زوج

۶۱ الف) صعودی

ب) نزولی

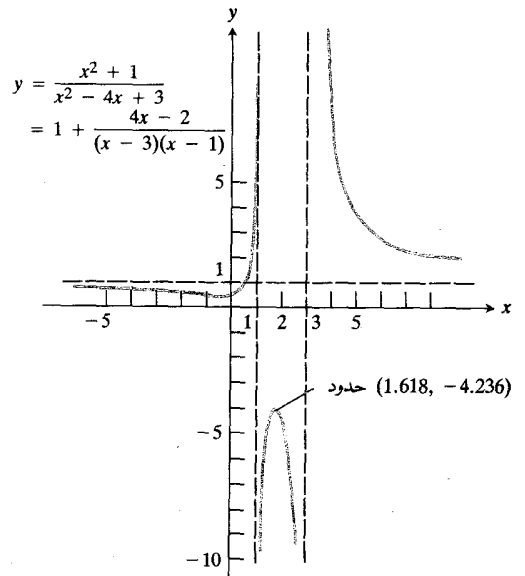
پ) تفررو به پایین

ت) تفررو به پایین

بخش ۴.۳، صفحه‌های ۱۶۸ تا ۱۶۹

۱. ماکسیمم مطلق برابر با $1/2$ در $x=1/2$ ؛ مینیمم مطلق برابر

با 0 در $x=0, 1$



۳۷ الف) ندارد

ب) $(1, 0)$

۰۴۱ ب

۰۴۳ ۲

بخش ۵.۳، صفحه‌های ۱۷۵ تا ۱۸۰

۰۱ الف) ۲۰ و ۵

۰۲ ب) ۸ و ۱۲

۰۳ پ) $1/4$ و $19/4$

۰۳ ۱۶

۰۵ $(1/2, \sqrt{3}/2)$

۰۷ ۳۲

۰۹ $80000 m^2$ ۰۱۱ $6 ft \times 6 ft \times 3 ft$ ۰۱۳ $a = b = 10\sqrt{2}$ ۰۱۵ الف) $2, 8/5$ ۰۲ ب) $2 < t < 8/5$ ۰۳ پ) $v(11/5) = -2187/125$ ۰۱۷ $18 in \times 9 in$ ۰۱۹ $72 : 12 m \times 18 m$ ۰۲۱ $r = h = 10/\sqrt{\pi} cm$

۰۲۳ حدود ۴۸۰۲۸ دلار

۰۲۷ $H/\sqrt{3}$ = شعاع، $\sqrt{2/3}H$ = ارتفاع

۰۲۹ الف) ۱۶

۰۳ ب) -۵۴

۰۴ پ) -۱

۰۳۱ الف) برای مربع قطعه‌ای به طول $2L/(3\sqrt{3}+4)$ برید.۰۳۲ ب) در صورتی که همه سیم به شکل مربع درآید ماکسیمم به مقدار $L^2/16$ به دست می‌آید.۰۳۳ $32\pi r^3/81$ ۰۳۷ $(\sqrt{3}/2)D \times (1/2)D$ (قطر است)۰۳۹ نسبت قطر نیم‌دایره به ارتفاع مستطیل برابر با $8/(2+\pi)$ است.۰۴۱ $r = h = \sqrt{S/5\pi}$ ۰۳ ماکسیمم مطلق برابر با $2\sqrt{3}/9$ در $x = 1/\sqrt{3}$ ؛ مینیمم مطلق برابر با ۵ در $x = 0, 1$ ۰۵ ماکسیمم موضعی برابر با ۶۸۶ در $x = -7$ ؛ مینیمم موضعی برابر با ۶۸۶- در $x = 7$ ، اکسترمم مطلق ندارد.۰۷ مینیمم مطلق برابر با -۱ در $x = 2$ ۰۹ ماکسیمم مطلق برابر با $1/4$ در $x = 1/2$ ۰۱۱ نقطه بحرانی ندارد؛ مینیمم مطلق برابر با ۵ در $x = 0$ و ماکسیمم مطلق برابر با ۶ در $x = 3$ ۰۱۳ مینیمم مطلق برابر با ۳ در $x = 1$

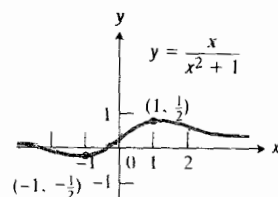
۰۱۵ مقادیر اکسترمم ندارد.

۰۱۷ ماکسیمم مطلق برابر با $1/4$ در $x = 1/4$ ؛ مینیمم مطلق ندارد.۰۱۹ مینیمم مطلق برابر با ۳- در $x = 1$ ؛ ماکسیمم مطلق برابر با ۸ در $x = 2$

۰۲۱ مینیمم مطلق برابر با ۵؛ ماکسیمم ندارد.

۰۲۳ مینیمم مطلق برابر با ۱ در $x = 0, \pi/2$ ؛ ماکسیمم مطلق برابر با $3/2$ در $x = \pi/6$ ۰۲۵ ماکسیمم موضعی برابر با ۵ در $x = 0$ ؛ مینیمم موضعی برابر با $477-9$ در $x = -9$ ؛ مینیمم مطلق برابر با $37125-9$ در $x = 15$ ۰۲۷ مینیمم مطلق برابر با ۴ در $x = 1/2$ ، مقدار ماکسیمم ندارد.۰۲۹ ماکسیمم موضعی برابر با ۱ در $x = 1$ ؛ مینیمم موضعی برابر با ۵ در $x = 0$

۰۳۱ مقدار اکسترمم ندارد.

۰۳۳ ماکسیمم مطلق برابر با ۱ در $x = \pm \pi/2$ ؛ مینیمم مطلق برابر با -۱ در $x = \pm 3\pi/2$ ۰۳۵ ماکسیمم مطلق برابر با ۳ در $x = 2$ ؛ مینیمم مطلق برابر با ۵ در $x = \pm 1$ ۰۳۹ نقاط بحرانی: $x = \pm 1$ ، نقاط عطف عبارت‌اند از $(0, 0)$ و $(\pm \sqrt{3}, \pm \sqrt{3}/2)$ ؛ $y = 0$ مجانب است.

(ب) خیر، کمترین فاصله بین کشتیها در این روز ۵٫۶ مایل است.

بخش ۷۰۳، صفحه‌های ۱۹۱ تا ۱۹۲

$$0.1 \quad f(-2) = 11, f(-1) = -1, f \text{ و } f' \text{ بر } (-2, -1), \\ f'(x) = 4x^3 + 3 < 0$$

$$0.3 \quad f(-1) = 1, f(0) = -6, f \text{ بر بازه } (-1, 0), \\ f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 < 0$$

$$0.5 \quad (i) \quad y'(\pm 2) = 0, y'(0) = 0$$

$$(ii) \quad y'(-5) = y'(-3) = y'(-4) = 0$$

$$(iii) \quad y(-1) = y(2) = y'(2) = 0, \\ y'(0) = y'(2) = 0$$

$$(iv) \quad y(0) = y(9) = y(22) = 0, \\ y'(4) = y'(18) = 0. \text{ بین هردو } y \text{ یی که برابر با صفر است} \\ \text{يك } y \text{ برابر با صفر قرار دارد.}$$

$$0.8 \quad 1/2$$

$$0.9 \quad 1$$

0.15 تناقضی وجود ندارد، شرایط قضیه مقدار میانگین کافی‌اند. نه لازم.

$$0.17 \quad y = [x] \text{ بر } [0, 1] \text{ پیوسته نیست.}$$

0.23 تابع دیگری وجود ندارد.

بخش ۸۰۳، صفحه‌های ۱۹۵ تا ۱۹۷

$$0.1 \quad 1/4$$

$$0.3 \quad 5/7$$

$$0.5 \quad 0$$

$$0.7 \quad 5$$

$$0.9 \quad 1$$

$$0.11 \quad \sqrt{2}$$

$$0.13 \quad 1$$

$$0.15 \quad -1$$

$$0.17 \quad 1/2$$

$$0.19 \quad 3$$

$$0.21 \quad na$$

0.43 الف) خیر، تنها يك نقطه بحرانی در $x = 1/2$ دارد، که در این نقطه تابع مینیمم مطلق برابر با $3/4$ دارد.

(ب) خیر، مینیمم مطلق برابر با ۰ در $n(n-1)\pi$ است (n عددی صحیح است).

0.45 ماکسیمم برابر با $\sqrt{2}$ در $\pi/4 + 2n\pi$ ؛ مینیمم برابر با $-\sqrt{2}$ در $5\pi/4 + 2n\pi$ (n عددی صحیح است).

0.47 $h = (3V/\pi)^{1/3}$, $r = (3V/8\pi)^{1/3}$ شعاع نیمکره، h ارتفاع استوانه، و V حجم کل است.

$$0.53 \quad (b) \quad d^2y/dx^2 > d^2R/dx^2$$

0.55 ماکسیمم به مقدار $ka^2/4$ در $x = a/2$

بخش ۶۰۳، صفحه‌های ۱۸۳ تا ۱۸۵

$$0.1 \quad dA/dt = 2\pi r(dr/dt)$$

$$0.3 \quad dV/dt = 3s^2(ds/dt)$$

$$0.5 \quad \text{الف) } 1$$

$$(b) \quad -1/3$$

$$(c) \quad dR/dt = I^{-1}(dV/dt) - VI^{-2}(dI/dt)$$

$$\text{ت) } 3/2$$

0.7 الف) x فاصله تا پایگاه دوم و برابر ۶۰ ft است، y فاصله تا پایگاه سوم و برابر $30\sqrt{13}$ ft است.

$$(b) \quad y^2 = x^2 + 90^2$$

$$(c) \quad y(dy/dt) = x(dx/dt)$$

$$\text{ت) } -(32/\sqrt{13}) \text{ ft/sec}$$

$$0.9 \quad t = (13\sqrt{2}/2) \text{ sec}; (119/3) \text{ ft}^2/\text{sec}$$

$$0.13 \quad (200/3) \text{ ft}^2/\text{min}; (25/9\pi) \text{ ft/min}$$

$$0.15 \quad 3337 \text{ ft/sec}$$

$$0.17 \quad dy/dx = \pm 2; \pm 3 \text{ m/sec}$$

$$0.19 \quad 10/10610 \approx 0.00094; 1$$

$$0.21 \quad -3 \text{ ft/sec}, 8 \text{ ft/sec}$$

$$0.23 \quad 20 \text{ ft/sec}$$

$$0.25 \quad 62.5 \text{ mph}$$

0.27 الف) ۱۲ گره سرظهر، ۸ گره يك ساعت بعد

پ) به ازای هیچ x ی

ت) همه x ها

۳. الف) $x < 3$

ب) $x > 3$

پ) $0 < x < 2$

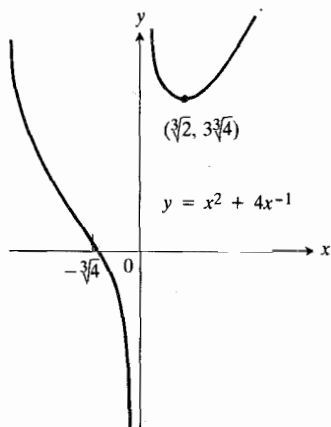
ت) $x < 0$ یا $x > 2$

۵. الف) $x > \sqrt[3]{2}$

ب) $x < \sqrt[3]{2}$ ، $x \neq 0$

پ) $x < -\sqrt[3]{2}$ یا $x > 0$

ت) $-\sqrt[3]{2} < x < 0$

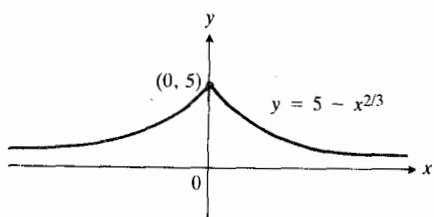


۷. الف) $x < 0$

ب) $x > 0$

پ) $x \neq 0$

ت) به ازای هیچ x ی



۹. الف) $x \neq 0$

ب) به ازای هیچ x ی

پ) $x < 0$

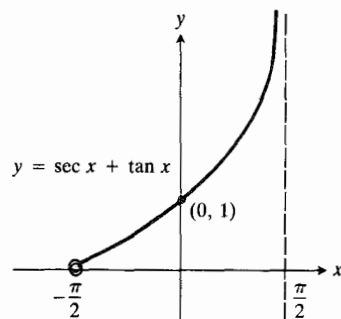
ت) $x > 0$

۲۳. $-1/2$

۲۵. $\sqrt{10}$

۲۷. ب) ۰

پ)



۲۹. الف) ۰

ب) ۱

پ) ∞

بخش ۹.۳، صفحه‌های ۲۰۱ تا ۲۰۲

۱. x^2

۳. $(1/2) - (1/2)x$

۵. $(3/8) + (3/4)x - (1/8)x^2$

۷. الف) ۱۴۶۰۰۰

ب) ۵۰۰۰۰

۹. الف) x

ب) ۸۹۰۰۰۰۰

۱۱. الف) $1 - (1/2)(x - \pi/2)^2$

ب) ۱۶۷۰۰۰۰

۱۳. الف) $(\pi/2) - x$

ب) ۱۶۷۰۰۰۰

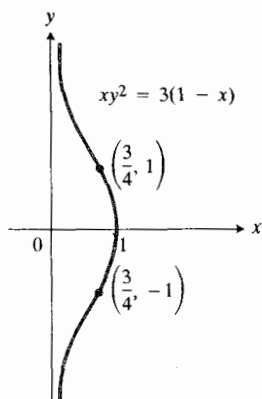
۱۵. الف) $|x| < ۲۵۰$

ب) $|x| < ۶۰۰$

مسئله‌های گوناگون، فصل ۳، صفحه‌های ۲۰۳ تا ۲۰۹

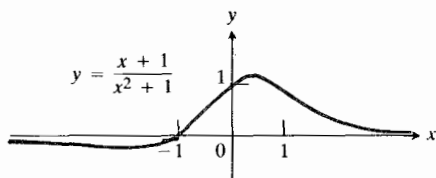
۱. الف) $x < ۹/۲$

ب) $x > ۹/۲$

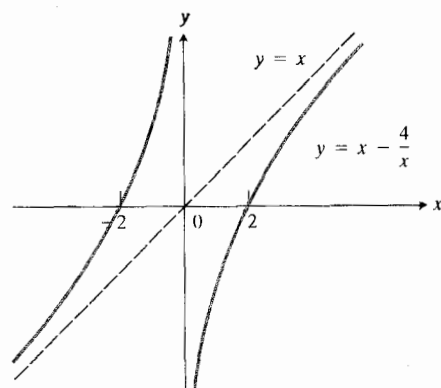
عبارت انداز $(\pm 1, 3/4)$.

۱۹. الف) دامنه تابع همه یهاست؛ تقارن ندارد؛ نقاط تقاطع با محورهای عبارت انداز $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ ؛ $y=0$ ؛ $y' = (1-2x-x^2)/(x^2+1)^2$ ؛ $y'(-1) = 1/2$ ، $y'(0) = 1$ ؛ به ازای $x < -1 - \sqrt{2}$ یا $x > -1 + \sqrt{2}$ نزولی و به ازای $-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$ صعودی است؛

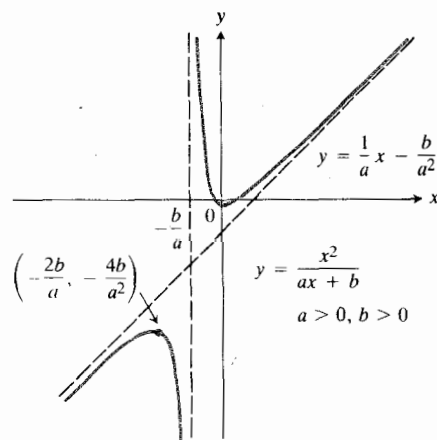
$y'' = (2(x-1)(x^2+4x+1))/(x^2+1)^3$ ؛ به ازای $x < -2 - \sqrt{3}$ یا $-2 + \sqrt{3} < x < 1$ نقره رو به پایین و به ازای $-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$ یا $x > 1$ نقره رو به بالاست.



ب) دامنه همه یها جز $x = -1$ است، تقارن ندارد، محل تقاطع با محور y عبارت است از $(0, 1)$ ؛ مجانبها عبارت انداز $x = -1$ و $y = x - 1$ ؛ $y' = 1 - 2/(x+1)^2$ ؛ $y'(0) = -1$ ؛ به ازای $x < -1 - \sqrt{2}$ یا $x > -1 + \sqrt{2}$ نزولی است؛ $y'' = 4/(x+1)^3$ ؛ به ازای $x < -1$ نقره رو به بالاست، به ازای $x > -1$ نقره رو به بالاست. جملات چیره: به ازای x های بزرگ $y \approx x - 1$ (یا $y \approx x$)، در نزدیک $x = -1$ ، $x \approx 2/(x+1)$.



۱۱. الف) $x < -2b/a$ یا $x > 0$
ب) $-2b/a < x < 0$
پ) $x > -b/a$
ت) $x < -b/a$



۱۳. الف) $x < -1$ یا $x > 1/3$
ب) $-1 < x < 1/3$
پ) $x > -1/3$
ت) $x < -1/3$

۱۵. الف) $x < 1$ یا $x > 2$
ب) $1 < x < 2$
پ) $x > 3/2$
ت) $x < 3/2$

۱۷. مقارن نسبت به محور x ، با دامنه $(0, 1]$. به ازای $y > 0$ ، نمودار نزولی است و به ازای $0 < x < 3/4$ نقره رو به بالاست، به ازای $3/4 < x \leq 1$ نقره رو به پایین است. به ازای $y < 0$ ، نمودار صعودی است و به ازای $0 < x < 3/4$ نقره رو به پایین است، به ازای $3/4 < x \leq 1$ نقره رو به بالاست. نقاط عطف

به ازای $1 < x < 1$ یا $x > 4.5$ تقریباً بالاست. جملات
چیره: در نزدیک $x=1$ ، $y \approx -2/(x-1)$ ، در نزدیک
 $x=-1$ ، $y \approx 6/(x+1)$

$$d=e=0, a=b=c=1 \quad 0.27$$

۰.۲۹ الف) $x=1$ زیرا y' از $+$ تا $-$ تغییر می کند

ب) $x=3$ زیرا y' از $-$ تا $+$ تغییر می کند

$$10 \quad 0.31$$

$$d=5, c=-9, b=-3, a=1 \quad 0.33$$

$$25 \quad 0.35$$

$$r=h=4 \text{ ft} \quad 0.37$$

$$2\sqrt{3} \quad 0.39$$

$$(2, \pm\sqrt{3}) \quad 0.41$$

$$(1, 0) \quad 0.43$$

$$(1, 0) \quad 0.45$$

$$y=b-(al/\sqrt{w^2-l^2}), x=aw/\sqrt{w^2-l^2} \quad 0.43$$

$$0.45 \quad \text{اگر } b \text{ اندازه قاعده ثابت مثلث باشد، آنگاه}$$

$$a=c=s-(b/2)$$

$$6 \text{ ft} \times 18 \text{ ft} \quad 0.57$$

$$1 \text{ واحد} \quad 0.59$$

$$\theta=2 \text{ rad}, r=\sqrt{A} \quad 0.61$$

$$-0.04\pi \text{ cm}^2/\text{sec} \quad 0.63$$

$$t=(3a-5b)/(b^2-a^2) \quad 0.65$$

$$x=\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n c_j \quad 0.67$$

$$(1/2) \text{ cm/min} \quad 0.73$$

$$dr/dt=-(3/200) \text{ m/min} \quad 0.75$$

$$-(3/4000) \text{ m}; ds/dt=-(6\pi/5) \text{ m}^2/\text{min}$$

$$-(3\pi/25) \text{ m}^2$$

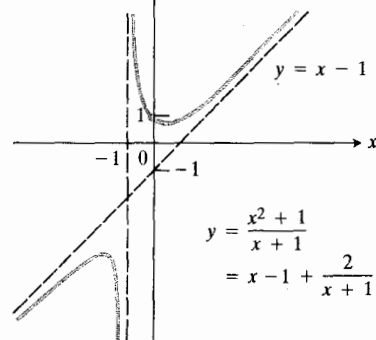
$$\sqrt{3}/2 \quad 0.77$$

$$0.79 \quad \text{آری، به ازای } 0 \leq y \leq 10$$

$$dV/dt > 0 \quad \text{داریم}$$

$$5\sqrt{13} \text{ mi/hr} \quad 0.83$$

کتاب، جزوه، نمونه سوال



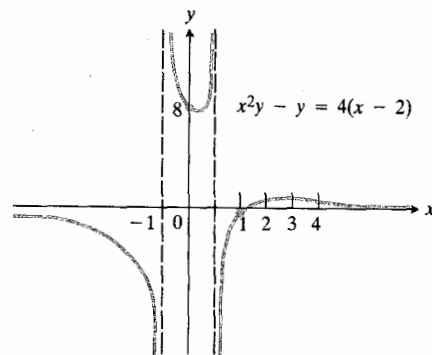
۰.۲۹ دامنه همه x هاست؛ تقارن ندارد؛ نقاط تقاطع با محورها عبارت اند از $(0, 0)$ ، $(-1, 0)$ و $(2, 0)$ ؛ مجانب ندارد؛ $y' = 3x^2 - 2x - 2$ ؛ $y'(-1) = 3$ ، $y'(0) = -2$ ؛ $y'(2) = 4$ ؛ به ازای $x < (1-\sqrt{7})/3$ یا $x > (1+\sqrt{7})/3$ صعودی است، به ازای $(1-\sqrt{7})/3 < x < (1+\sqrt{7})/3$ نزولی است؛ به ازای $x > 1/3$ تقریباً بالاست، به ازای $x < 1/3$ تقریباً پایین است.

۰.۲۳ دامنه همه x ها جز $x = \pm 2$ است؛ نسبت به محور y متقارن است؛ مجانبها عبارت اند از $x = \pm 2$ و $y = 0$ ؛ محل تقاطع با محور y عبارت است از $(0, 2)$ ؛ $y' = 16x/(4-x^2)^2$ ؛ $y'(0) = 0$ ؛ به ازای $x < 0$ ، $x \neq -2$ نزولی است؛ به ازای $x > 0$ ، $x \neq 2$ صعودی است؛

$$y'' = (16(3x^2 + 4))/(4-x^2)^3$$

به ازای $-2 < x < 2$ تقریباً بالاست، به ازای $x < -2$ یا $x > 2$ تقریباً پایین است. جملات چیره: در نزدیک $x=2$ ، $y \approx 2/(2-x)$ ، در نزدیک $x=-2$ ، $y \approx 2/(2+x)$.

۰.۲۵ دامنه همه x ها جز $x = \pm 1$ است؛ تقارن ندارد؛ نقاط تقاطع با محورها عبارت اند از $(0, 8)$ و $(2, 0)$ ؛ مجانبها عبارت اند از $y' = (-4(x^2 - 4x + 1))/(x^2 - 1)^2$ ؛ $x = \pm 1$ ، $y = 0$ ؛ $y'(2) = 4/3$ ، $y'(0) = -4$ ؛ به ازای $x < 2 - \sqrt{3}$ یا $x > 2 + \sqrt{3}$ نزولی است. به ازای $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$ صعودی است؛ $y'' = (8(x^3 - 4x^2 - 3x + 4))/(x^2 - 1)^3$ ؛ به ازای $x < -1$ یا $1 < x < 4.5$ تقریباً بالاست، به ازای $x > 4.5$ تقریباً پایین است.



۸۵. خیر، y' در $x=0$ وجود ندارد.

۸۷. $y'=0$ ، بنابراین y تابعی ثابت است ($y \approx -0.7$).

۸۹. ۱۲

۹۳. الف) ۱

ب) ۲

۹۷. ب) (i) $1/a$

(iii) $0 < x_0 < 2/a$

فصل ۲

بخش ۱۰.۴، صفحه‌های ۲۱۴ تا ۲۱۶

۱. الف) $x^2 + C$

ب) $2x + C$

پ) $x^2 + 2x + C$

۳. الف) $x^2 + C$

ب) $(1/3)x^3 + C$

پ) $(1/3)x^3 + x^2 + C$

۵. الف) $x^{-2} + C$

ب) $-(1/3x^3) + C$

پ) $-(1/3x^3) + x^2 + 2x + C$

۷. الف) $x^{3/2} + C$

ب) $(8/3)x^{3/2} + C$

پ) $(1/3)x^3 - (8/3)x^{3/2} + C$

۹. الف) $x^2 - x + C$

ب) $(1/6)(2x-1)^2 + C$

پ) $(1/8)(2x-1)^4 + C$

۱۱. الف) $(x^2-3)^2 + C$

ب) $(1/4)(x^2-3)^2 + C$

۱۳. $y = x^2 - 7x + C$

۱۵. $y = (1/3)x^3 + x + C$

۱۷. $y = 5x^{-1} + C$

۱۹. $y = (x-2)^5/5 + C$

۲۱. $y = (x^2/2) - (1/x) + C$

۲۳. $y = \sqrt{x^2 + C}$

۲۵. $y = 1 + \sqrt{(x+1)^2 + C}$

۲۷. $y = ((1/3)x^{3/2} + C)^2$

۲۹. $y = -1/(x^2 + C)$

۳۱. $y = x^{-2} + C$

۳۳. $s = t^3 + 2t^2 - 6t + C$

۳۵. $y = (4t^3/3) + 4t - (1/t) + C$

۳۷. ۲۸ m/sec

بخش ۲۰.۴، صفحه‌های ۲۱۷ تا ۲۱۹

۱. $s = t^3 + 4$

۳. $s = (1/3)(t+1)^3 - (1/3)$

۵. $s = -(t+1)^{-1} - 4$

۷. $v = 9.8t + 20$; $s = 4.9t^2 + 20t$

۹. $v = t^2 + 1$; $s = (1/3)t^3 + t + 1$

۱۱. $v = (t+1)^2$; $s = (1/3)t^3 + t^2 + t$

۱۳. $y = x^3 + x^2 + x - 3$

۱۵. $y = (x-7)^4 + 9$

۱۷. $y = ((1/4)x^4 + 1)^2$

۱۹. $y = 1/(2-x^2)$

۲۱. $y = -x^2 + x^2 + 2x + 1$

۲۳. $y = x^2/16$

۲۵. $f(x) = 2x^{3/2} - 50$

۲۷. ۲۲.۲۵ m/sec

۲۹. ت) $y = x^2 + C$ ؛ $y(1) = 1$ نتیجه می‌دهد $C = 0$

بخش ۳۰.۴، صفحه‌های ۲۲۲ تا ۲۲۳

۱. $(1/224)(x-1)^{224} + C$

۳. $-2\sqrt{1-x} + C$

۵. $(1/6)(2x^2-1)^{3/2} + C$

۷. $-(3/5)(2-t)^{5/2} + C$

$$-(1/2)\cos^2(2x/3)+C \quad ۰۲۹$$

$$\tan \theta + \sec \theta + C \quad ۰۳۱$$

$$\tan y - \cot y + C \quad ۰۳۳$$

$$-(3/2)\cos 2x + (4/3)\sin 2x + C \quad ۰۳۵$$

$$(1/3)\tan^2 x + C \quad ۰۳۷$$

$$-(1/4)\cot^2 x + C \quad ۰۳۹$$

$$(2/3)\tan^{3/2} x + C \quad ۰۴۱$$

$$(2/5)\sin^{5/2} x + C \quad ۰۴۳$$

$$\sin x - (1/3)\sin^3 x + C \quad ۰۴۵$$

$$\sin x - (2/3)\sin^2 x + (1/5)\sin^4 x + C \quad ۰۴۷$$

$$(1/6)\cos^{-2} 2x + C \quad ۰۴۹$$

$$2 \tan \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C \quad ۰۵۱$$

$$(1/3)\sin \sqrt{3x^2 - 6} + C \quad ۰۵۳$$

۰۵۵ ت

$$y^2 = (5/2)x^2 + 3 \cos x - 3 \quad ۰۵۷$$

$$y = ((5/2)x^2 + 3 \cos x - 3)^{1/2}$$

$$y = ((3/2)\sin \pi x - (1/2))^{2/3} \quad ۰۵۹$$

۰۶۱ m ۶

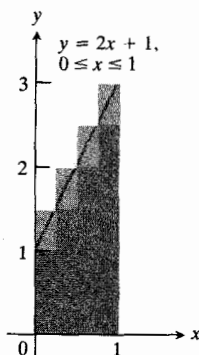
۰۶۳ هر سه روش درست است؛ تفاوت پاداشتها مقداری ثابت است.

$$(1/3)[1 + \sin^2(x-1)]^{3/2} + C \quad ۰۶۵$$

بخش ۵.۴، صفحه‌های ۲۳۶ تا ۲۳۸

۰۱ الف ۷/۴

ب ۹/۲



$$x + (1/2)x^2 + (1/7)x^7 + C \quad ۰۹$$

$$(1/22)(x^2+1)^{11} + C \quad ۰۱۱$$

$$(2/3)(1+x^2)^{1/2} + C \quad ۰۱۳$$

$$(-1/2(3x+2)) + C \quad ۰۱۵$$

$$-2(1-r^2)^{1/2} + C \quad ۰۱۷$$

$$-(1/20)(7-x^5)^4 + C \quad ۰۱۹$$

$$(-1/2(s+1)^2) + C \quad ۰۲۱$$

$$-1/(x+2) + C \quad ۰۲۳$$

$$(1/3)(x+1)^{3/2} + C \quad ۰۲۵$$

$$(1/6)(y+2)^6 + C \quad ۰۲۷$$

$$(-2/(1+\sqrt{x})) + C \quad ۰۲۹$$

$$y = (1/3)(1+x^2)^{3/2} - (1/3) \quad ۰۳۱$$

$$r = (32^2 - 1)^4 - 2 \quad ۰۳۳$$

$$2(y^2+1)^{1/2} = (x^2+1)^{3/2} + 1 \quad ۰۳۵$$

۰۳۷ الف و ب

بخش ۴.۴، صفحه‌های ۲۲۶ تا ۲۲۹

$$-(1/2)\cos 3x + C \quad ۰۱$$

$$\tan(x+2) + C \quad ۰۳$$

$$-\csc(x+\pi/2) + C \quad ۰۵$$

$$-(1/2)\cos(2x^2) + C \quad ۰۷$$

$$-(1/2)\cos 2t + C \quad ۰۹$$

$$(2/3)\sin 2y + C \quad ۰۱۱$$

$$(\sin^2 x)/3 + C \quad ۰۱۳$$

$$(1/2)\tan 2\theta + C \quad ۰۱۵$$

$$2\sec(x/2) + C \quad ۰۱۷$$

$$-\cot \theta + C \quad ۰۱۹$$

$$(1/2)y + (1/2)\sin 2y + C \quad ۰۲۱$$

$$(1/3)\sin^3 t - (1/9)\sin^2 t + C \quad ۰۲۳$$

$$-\csc x + C \quad ۰۲۵$$

$$\sqrt{2-\cos 2t} + C \quad ۰۲۷$$

۱/۱۵ ۰۵

۱۰ ۰۷

۱ ۰۹

۱/۲ ۰۱۱

۲/۳ ۰۱۳

۴/۳ ۰۱۵

π/۶ ۰۱۷

۵/۶ ۰۱۹

۸ ۰۲۱

۸/۳ ۰۲۳

۲ ۰۲۵

$\sqrt{2}-1$ ۰۲۷

π/۲ ۰۲۹

۲/۹ ۰۳۱

۲۸/۱۵ ۰۳۳

۰ ۰۳۵

۳/۲ ۰۳۷

$\sqrt{3}/۸$ ۰۳۹

۱۶ ۰۴۱

$\sqrt{1+x^2}$ ۰۴۵

$-\sqrt{1-x^2}$ ۰۴۷

$2 \cos(4x^2)$ ۰۴۹

$(\cos x)/(2+\sin x)$ ۰۵۱

$\csc x$ ۰۵۳

$\cos x$ ۰۵۵

$2+10x$ (الف) ۰۵۷

$2+10x-5x^2$ (ب)

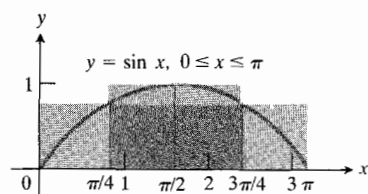
۱ (الف) ۰۵۹

۱/۴ (ب)

$(12)^{1/3}$ (ب)

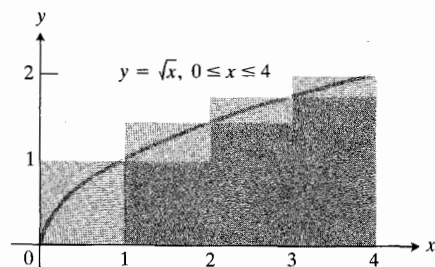
$(\sqrt{2}\pi)/4 \approx 1.11$ (الف) ۰۳

$[\pi(\sqrt{2}+2)]/4 \approx 2.68$ (ب)



$1+\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 4.146$ (الف) ۰۵

$2+\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 6.146$ (ب)



$\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8$ ۰۷

۲۲۵ ۰۹

۱ ۰۱۱

۳۴ ۰۱۳

۰۱۵ الف، ب، پ، ت

-۸ (الف) ۰۱۷

(ب) ۶

(پ) -۵

(ت) ۰

بخش ۶.۴، صفحه‌های ۲۴۱ تا ۲۴۳

$[m(b^2-a^2)]/2$ ۰۳

۴/۳ ۰۹

۱/۳ ۰۱۱

بخش ۷.۴، صفحه‌های ۲۴۹ تا ۲۵۱

۱۲ ۰۱

۲۶/۳ ۰۳

بخش ۸.۴، صفحه‌های ۲۵۲ تا ۲۵۴

۰۱ الف ۱۲/۳

ب ۲/۳

۰۳ الف ۱/۲

ب $-1/2$ ۰۵ الف $(1/2)(\sqrt{10}-3)$ ب $(1/2)(3-\sqrt{10})$

۰۷ الف ۴۵/۸

ب $-45/8$

۰۹ الف ۱/۶

ب ۱/۲

۰۱۱ الف ۰

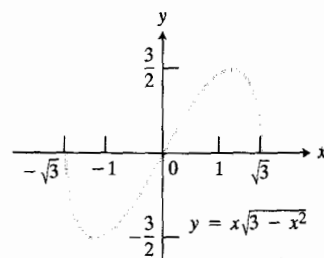
ب ۰

۰۱۳ الف ۰

ب $-(1/4)\sin(2\pi^2)$ ۰۱۵ $2/\sqrt{3}$

۰۱۷ ۰

۰۱۹ الف

ب $2/\sqrt{3}$ ۰۲۱ $F(6)-F(2)$

$$\int_0^1 x^x dx = \int_{-1}^0 (x+1)^x dx = 1/3 \quad 0.25$$

$$\int_4^8 \sqrt{x-4} dx = \int_{-1}^3 \sqrt{x+1} dx = 16/3 \quad 0.27$$

بخش ۹.۴، صفحه‌های ۲۶۱ تا ۲۶۳

۰۱ الف ۲

ب ۲

ب ۲

۰۳ الف ۱۷/۴

ب ۴

ب ۴

۰۵ الف ۵۱۴۶

ب ۵۲۵۲

ب ۵۳

۰۷ الف ۱/۶۰۰

ب $10^{-5} \times 10^3$ ب $|E_T| \leq 1/96, |E_S| \leq 1/1920$ ۰۹ الف هر n ب هر n زوج۰۱۱ الف $n \geq 283$ ب هر n زوج۰۱۳ الف $n \geq 75$ ب $n \geq 12$ ۰۱۵ $n > 6$

۰۱۷ ۱۰۰۶ ft

۰۱۹ الف ۰۰۰۰۶۶۴

ب ۲۷۷۲

ب ۲۴٪

مسئله‌های گوناگون، فصل ۴، صفحه‌های ۲۶۴ تا ۲۶۷

$$y = -[2/(C+x^2)] \quad 0.1$$

$$y^3 + 3y = x^2 - 3x + C \quad 0.3$$

$$1/(r+2) = -1/(3-s) + C \quad 0.5$$

$$y = (1/3)(x^2-4)^{3/2} + 3 \quad 0.7$$

$$y = 1/\sqrt{1-x^2} \quad 0.8$$

$$y = 4/(2-x^4) \quad 0.9$$

$$y = (15/2 - 3/2x)^{2/3} - 1 \quad 1.0$$

۳. الف)

$$v(t) > 0 \quad 0 \leq t < 5, \quad v(t) < 0 \quad 5 < t \leq 10$$

ب) ۲۴۵

پ) ۰

$$v(t) > 0 \quad 0 \leq t < 1, \quad v(t) < 0 \quad 1 < t < 2$$

ب) ۶

پ) ۴

۷. الف)

$$v(t) > 0 \quad 0 < t < \pi/3, \quad v(t) < 0 \quad \pi/3 < t \leq \pi/2$$

ب) ۶

پ) ۲

$$s(t) = \sin t \quad \text{الف) ۹.}$$

ب) ۴

پ) ۰

$$s(t) = 5 \sin \pi t + 5 \quad \text{الف) ۱۱.}$$

ب) ۱۵

پ) -۵

۱۳. ۲

۱۵. ۲۸

$$\text{الف) ۱۷. } 2 = \text{کل}, \quad 2 = \text{خالص}$$

$$\text{ب) } 0 = \text{خالص}, \quad 2 = \text{کل}$$

$$\text{پ) } 2 = \text{خالص}, \quad 2 = \text{کل}$$

$$\text{ت) } 2 = \text{خالص}, \quad 2 = \text{کل}$$

بخش ۲۰۵، صفحه‌های ۲۷۴ تا ۲۷۵

۱. ۳۲/۳

۳. ۱/۱۲

۵. ۳۲/۳

۷. ۴/۳

۹. ۹/۲

۱۱. ۱/۱۲

۱۳. ۹/۲

$$y = x^2 + 2x - 2 \quad \text{۹.}$$

$$v = (2/3)t^{3/2} - 2t^{1/2} + (4/3) \quad \text{الف) ۱۱.}$$

ب)

$$s = (4/15)t^{5/2} - (4/3)t^{3/2} + (4/3)t - (4/15)$$

۱۳. -۸

$$y = (1/3)(1+x^2)^{3/2} - (7/3) \quad \text{۱۵.}$$

$$y = 2((1/3)x^{3/2} + x^{1/2} - (1/3))^{1/2} \quad \text{۱۷.}$$

$$y = ((1/6)(9+x^2)^{3/2} + (3/2))^2 \quad \text{۱۹.}$$

$$s = -16t^2 + 96t; \quad 122 \text{ ft} \quad \text{۲۱.}$$

$$4 \text{ ft/sec} \quad \text{الف) ۲۳.}$$

$$64/3 \text{ ft} \quad \text{ب)}$$

۲۵. ۱/۶

$$\int_0^1 f(x) dx \quad \text{۲۷.}$$

۲۹. πr^2

۳۱. ۰

۳۳. ۶/۵

۳۵. ۱/۳

۳۷. -۲

$$(3/5)(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}) \quad \text{۳۹.}$$

۴۱. $\sqrt{3}$

۴۳. ۳۵/۲

$$1/(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{الف) ۴۵.}$$

$$\text{ب) } (2)f(2), \text{ با فرض پیوسته بودن } f$$

۴۹. خیر

فصل ۵

بخش ۱۰۵، صفحه‌های ۲۷۰ تا ۲۷۱

$$v(t) > 0 \quad 0 \leq t < 1/2, \quad 3/2 < t \leq 2 \quad \text{الف) ۱.}$$

$$v(t) < 0 \quad 1/2 < t < 3/2$$

ب) ۲۰

پ) ۰

$$۸۵۲/۳ \cdot ۳۵$$

$$۱۵۹۹۰ \text{ ft}^۳ \cdot ۳۷$$

بخش ۴۰۵، صفحه ۲۸۸

$$۸\pi/۳ \cdot ۱$$

$$۵۶\pi/۱۵ \cdot ۳$$

$$۲۵۶\pi/۵ \cdot ۵$$

$$۱۱۷\pi/۵ \cdot ۷$$

$$\pi/۳ \cdot ۹$$

$$۵\pi/۳ \text{ (الف)} \cdot ۱۱$$

$$۲\pi/۳ \text{ (ب)}$$

$$۱۱\pi/۱۵ \text{ (الف)} \cdot ۱۳$$

$$۹۷\pi/۱۰۵ \text{ (ب)}$$

$$۱۲۱\pi/۲۱۰ \text{ (پ)}$$

$$۲۳\pi/۳۰ \text{ (ت)}$$

$$۵۱۲\pi/۲۱ \text{ (الف)} \cdot ۱۵$$

$$۸۳۲\pi/۲۱ \text{ (ب)}$$

$$\pi/۶ \text{ (الف)} \cdot ۱۷$$

$$\pi/۶ \text{ (ب)}$$

$$\pi/۲ \cdot ۱۹$$

$$۳۲\pi/۳ \cdot ۲۱$$

$$۲\pi^۲ \cdot ۲۳$$

$$۲\pi^۲ a^۲ b \cdot ۲۵$$

بخش ۵۰۵، صفحه‌های ۲۹۲ تا ۲۹۴

$$۱۲ \cdot ۱$$

$$۱۲/۳ \cdot ۳$$

$$۱۲۳/۳۲ \cdot ۵$$

$$۶a \cdot ۷$$

$$۲ \cdot ۹$$

$$a\pi^۲/۸ \cdot ۱۱$$

$$۲۱/۲ \cdot ۱۳$$

$$۲ \cdot ۱۵$$

$$۱/۶ \cdot ۱۷$$

$$۱۰۴/۱۵ \cdot ۱۹$$

$$۲\pi \cdot ۲۱$$

$$(۲/\pi) - ۱ \cdot ۲۳$$

$$\sqrt{۲} - ۱ \cdot ۲۵$$

$$۵/۶ \cdot ۲۷$$

$$۳۲/۳ \cdot ۲۹$$

$$۲\sqrt{۲} \cdot ۳۱$$

$$۳/۲ \cdot ۳۳$$

بخش ۳۰۵، صفحه‌های ۲۷۹ تا ۲۸۰

$$۸\pi/۳ \cdot ۱$$

$$\pi/۳۰ \cdot ۳$$

$$۱۶\pi/۱۵ \cdot ۵$$

$$\pi/۹ \cdot ۷$$

$$۲\pi \cdot ۹$$

$$۳۲\pi/۳ \cdot ۱۱$$

$$۱۶\pi/۱۵ \cdot ۱۳$$

$$\pi/۲ \cdot ۱۵$$

$$\pi^۲ \cdot ۱۷$$

$$۸\pi \text{ (الف)} \cdot ۱۹$$

$$۸\pi/۳ \text{ (ب)}$$

$$۱۸\pi/۱۵ \cdot ۲۱$$

$$۳\pi^۲ \cdot ۲۳$$

$$۱۴۴\pi/۱۵ \cdot ۲۵$$

$$c = ۲/\pi \cdot ۲۷$$

$$\pi h^۲/۲(۳a - h) \text{ (الف)} \cdot ۲۹$$

$$۱/۱۲۰\pi \text{ ft/sec (ب)}$$

$$۱۰۲۴۰ \cdot ۳۱$$

$$۱۶a^۳/۳ \cdot ۳۳$$

۱۱. $(1, -3/5)$
۱۳. $(2a/3\pi, 2a/3\pi)$
۱۵. $(2a/[3(2-\pi)], 2a/[3(2-\pi)])$
۱۷. $(2/5, 1)$
۱۹. $(1, -2/5)$
۲۱. $(0, 1)$
۲۳. $(1, 1)$
۲۵. $13/6$
۲۷. $(5/7)h$
۲۹. $(3/5, 1/2)$
۳۱. $(0, \pi a/2)$
- بخش ۹.۵، صفحه‌های ۳۱۵ تا ۳۱۶
۱. 0.3 N-m
۳. الف) ۲۰۰
- ب) 400 in-lb
- ب) 8 in
۵. $5/2 \text{ ft-lb}; 12 \text{ ft}$
۷. الف) $(1/2)k$
- ب) $(1/3)k$
۹. 1942 ft-lb
۱۱. $2\pi r^2 h(2\pi + h)$
۱۳. $20070400\pi/3 \text{ N-m}$
۱۵. $200\pi/3 \text{ ft-tons}$
۱۷. 11400 ft-tons
۱۹. $30 \text{ hr}, 51 \text{ min}$
۲۱. 85.1 ft-lb
- بخش ۱۰.۵، صفحه‌های ۳۱۹ تا ۳۲۰
۱. 375 lb
۳. $1666 \frac{2}{3} \text{ lb}$
۱۵. $132/27$
۱۹. تقریباً ۴۰۰ دلار
- بخش ۶.۵، صفحه‌های ۲۹۷ تا ۲۹۸
۱. $(\pi/27)(10\sqrt{10}-1)$
۳. $1823\pi/18$
۵. $253\pi/20$
۷. $99\pi/2$
۹. $\pi(r_2 + r_1)l$
۱۱. الف) $2\pi^2$
- ب) خم، دایره $x^2 + (y-1)^2 = 1$ است
۱۳. $12\pi a^2/5$
۱۵. $s = 2\pi rh$
- بخش ۷.۵، صفحه‌های ۳۰۹ تا ۳۰۲
۱. الف) $2/\pi$
- ب) ۰
۳. $49/12$
۵. الف) $1/2$
- ب) $1/2$
۹. $300 =$ میانگین موجودی روزانه؛ میانگین هزینه روزانه نگهداری ۶۰۰ ریال است.
۱۱. ۲۵
۱۳. ب) ۳۲
- ب) ۲۲۷
- بخش ۸.۵، صفحه‌های ۳۱۰ تا ۳۱۱
۱. 2 ft
۳. $M_0 = L^2/2; M = L; \bar{x} = L/2$
۵. $M_0 = (17/12)L^2; M = (7/3)L; \bar{x} = (17/28)L$
۷. $\bar{y} = 2/3$
۹. $(16/105, 8/15)$

$$8a^2/3 \quad 0.45$$

$$72 \text{ (الف)} \quad 0.47$$

$$82 \frac{2}{3} \text{ (ب)}$$

$$(9/10, 9/5) \quad 0.49$$

$$(8/5, 1) \quad 0.51$$

$$(3/2, 3/10) \quad 0.53$$

$$(5a/2, 0) \text{ (الف)} \quad 0.55$$

$$(2a/3, 0) \text{ (ب)}$$

$$(2a/5, 2a/5) \quad 0.57$$

$$257 \text{ sec} \text{ حدود} = 22500 \text{ ft-lb} \quad 0.59$$

$$[k(b-a)]/ab \quad 0.61$$

$$33515323 \text{ ft-lb} \quad 0.63$$

$$2200 \text{ lb} \quad 0.65$$

$$2323 \frac{1}{3} \text{ lb} \quad 0.67$$

$$2h/3 \text{ (الف)} \quad 0.69$$

$$(6a^2 + 8ah + 3h^2)/[2(3a + 2h)] \text{ (ب)}$$

$$32\pi \text{ (الف)} \quad 0.71$$

$$32\sqrt{2}\pi \text{ (ب)}$$

$$4\pi^2 \quad 0.73$$

$$(0, 2a/\pi) \quad 0.75$$

$$(0, 2a/3\pi) \quad 0.77$$

$$[\pi a^2(2 + 3\pi)]/3\sqrt{2} \quad 0.79$$

فصل ۶

بخش ۶.۱، صفحه‌های ۳۳۱ تا ۳۳۲

$$g(x) = (x-3)/2 \text{ (الف)} \quad 0.1$$

$$41 \frac{2}{3} \text{ lb} \quad 0.5$$

$$103324 \text{ ft}^3 \quad 0.7$$

۹. آری، طرف متحرك مخزن وقتی مخزن پرمی شود تنها 333 ft به طرف حفره جا به جا می شود.

مساله‌های گوناگون، فصل ۵، صفحه‌های ۳۲۰ تا ۳۲۵

$$29/2; 27/2 \quad 0.1$$

$$9/2 \quad 0.3$$

$$(7 - 2\sqrt{2})/2 \quad 0.5$$

$$32/3 \quad 0.7$$

$$243/8 \quad 0.9$$

$$\approx 0.137 \quad 0.11$$

$$8 \quad 0.13$$

$$9/8 \quad 0.15$$

$$\pi - 2 \quad 0.17$$

$$0.99 \text{ ماکسیم در } (0, 0); \text{ مینیمم در } (2, -2); 27/4 \quad 0.99$$

$$8\pi/3 \quad 0.21$$

$$\pm \sqrt{(2x-a)/\pi} \quad 0.23$$

$$32\pi/3 \quad 0.25$$

$$(4\pi/3)(2 - 2\sqrt{2}) \quad 0.27$$

$$(112\pi a^2)/15 \quad 0.29$$

$$\pi^2/2 \quad 0.31$$

$$72\pi/25 \quad 0.33$$

$$\pm \sqrt{(2x+1)/\pi} \quad 0.35$$

$$1022/189 \text{ (الف)} \quad 0.37$$

$$19/3 \text{ (ب)}$$

$$27/20 \text{ (پ)}$$

$$224\pi/15 \text{ (الف)} \quad 0.39$$

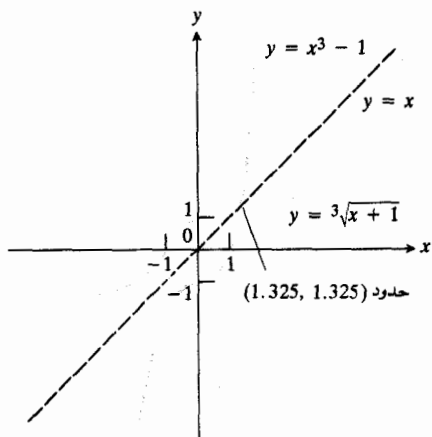
$$153\pi/40 \text{ (ب)}$$

$$\pi a/2 \quad 0.43$$

پ) $f'(5) = 10$, $g'(26) = 1/10$

الف) $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

ب)



پ) $f'(2) = 12$, $g'(7) = 1/12$

الف) $x^{1/5}$

ب) $x^{3/2}$

الف) $\sqrt{x+1}$

ب) $x^{-1/2}$

الف) $y = \sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق ندارد؛ شیب $y = x^3$ در $x=0$ برابر با 0 است، و در $x=0$ خطهای مماس محورها x و y هستند.

الف) $1/6$

ب) 28 min

بخش ۲۰۶، صفحه‌های ۳۳۶ تا ۳۳۸

الف) $\pi/2$

ب) $\pi/3$

پ) $\pi/6$

الف) $\pi/6$

ب) $\pi/2$

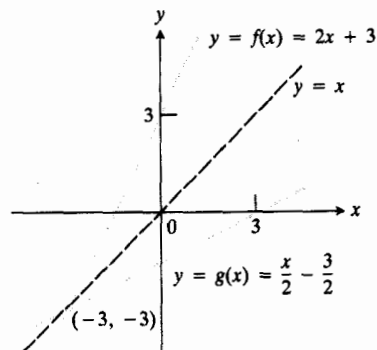
پ) $\pi/3$

الف) $\pi/3$

ب) $\pi/2$

پ) $\pi/6$

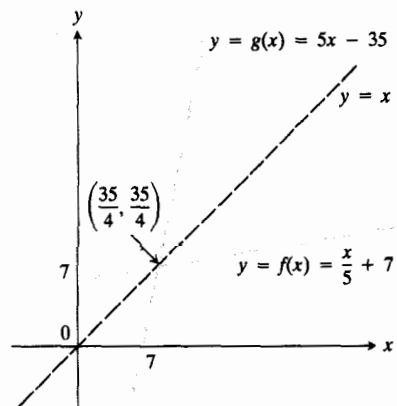
ب)



پ) $f'(x) = 2$, $g'(x) = 1/2$

الف) $g(x) = 5x - 35$

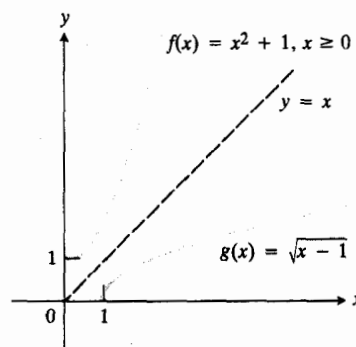
ب)



پ) $f'(x) = 1/5$, $g'(x) = 5$

الف) $g(x) = \sqrt{x-1}$

ب)



بخش ۶، صفحه‌های ۳۴۲ تا ۳۴۴

$$-2x/\sqrt{1-x^2} \quad ۰۱$$

$$15/(1+9x^2) \quad ۰۳$$

$$1/\sqrt{2-x^2} \quad ۰۵$$

$$1/(|x|\sqrt{25x^2-1}) \quad ۰۷$$

$$-2x/[(x^2+1)\sqrt{x^2+2x^2}] \quad ۰۹$$

$$۰ \quad ۰۱۱$$

$$-1/2x\sqrt{x-1} \quad ۰۱۳$$

$$x > 2 \text{ اگر } \sqrt{x^2-4}/x \quad ۰۱۵$$

$$x < -2 \text{ اگر } (x^2+2)/(x\sqrt{x^2-4})$$

$$1/(x^2+1) \quad ۰۱۷$$

$$(\sin^{-1}x)^2 \quad ۰۱۹$$

$$\pi/6 \quad ۰۲۱$$

$$\pi/12 \quad ۰۲۳$$

$$\pi \quad ۰۲۵$$

$$\pi/12 \quad ۰۲۷$$

$$\pi/6 \quad ۰۲۹$$

$$\pi \quad ۰۳۱$$

$$-\pi/22 \quad ۰۳۳$$

$$\pi/2 \quad ۰۳۵$$

$$\pi/6 \quad ۰۳۷$$

$$-\pi/12 \quad ۰۳۹$$

$$2 \quad ۰۴۱$$

$$1/6 \quad ۰۴۳$$

$$\pi/2 \quad ۰۴۵$$

$$(2/5)\text{rad/hr} \quad ۰۴۷$$

۰۴۹ آری؛ زیرا $\sin^{-1}x = (\pi/2) - \cos^{-1}x$ ، تفاضل این دو تابع مقدار ثابتی است.

$$-\sqrt{1-x^2} + C \quad ۰۵۱$$

$$y = 1/(\tan^{-1}x + 1) \quad ۰۵۳$$

$$۰۷ \text{ الف } \pi/2$$

$$\text{ب } \pi/6$$

$$\text{پ } \pi/3$$

$$۰۹ \text{ الف } \pi/2$$

$$\text{ب } \pi/3$$

$$\text{پ } \pi/6$$

$$۰۱۱ \text{ الف } \pi/2$$

$$\text{ب } \pi/6$$

$$\text{پ } \pi/3$$

$$\cos\alpha = \sqrt{3}/2, \tan\alpha = 1/\sqrt{3}, \csc\alpha = 2 \quad ۰۱۳$$

$$\sec\alpha = 2/\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}/2 \quad ۰۱۵$$

$$2 \quad ۰۱۷$$

$$2/\sqrt{3} \quad ۰۱۹$$

$$\sqrt{2}/2 \quad ۰۲۱$$

$$۰ \quad ۰۲۳$$

$$۰ \quad ۰۲۵$$

$$\pi \quad ۰۲۷$$

$$-\pi/3 \quad ۰۲۹$$

$$۰ \quad ۰۳۱$$

$$2\pi/3 \quad ۰۳۳$$

$$\pi/2 \quad ۰۳۵$$

$$\pi/2 \quad ۰۳۷$$

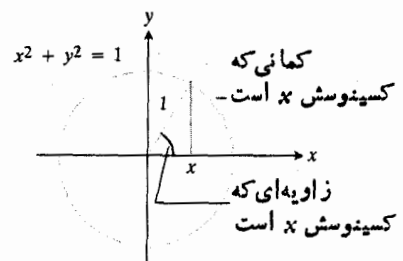
$$\pi/2 \quad ۰۳۹$$

$$۰ \quad ۰۴۱$$

$$22.2^\circ \quad ۰۴۳$$

$$\alpha = \tan^{-1}1/\sqrt{2} \approx 54.7^\circ \quad ۰۴۵$$

$$۰۴۹$$



$$\sin^{-1} y = \sec^{-1} |x| - (\pi/2) \quad ۰۵۵$$

بخش ۴۰۶، صفحه‌های ۳۴۸ تا ۳۴۹

$$1/x \quad ۰۱$$

$$1/x \quad ۰۳$$

$$-1/x \quad ۰۵$$

$$(3 \ln^2 x)/x \quad ۰۷$$

$$\sec x \quad ۰۹$$

$$x^2(1 + 3 \ln^2 x) \quad ۰۱۱$$

$$1/[x(1 + \ln^2 x)] \quad ۰۱۳$$

$$2x(1 + \ln(x^2)) \quad ۰۱۵$$

$$(\tan^{-1} x)/x^2 \quad ۰۱۷$$

$$2 \cos(\ln x) \quad ۰۱۹$$

$$\ln|x| + C \quad ۰۲۱$$

$$(1/2) \ln|x| + C \quad ۰۲۳$$

$$\ln 2 \quad ۰۲۵$$

$$(1/2) \ln 3 \quad ۰۲۷$$

$$(1/8) \ln 5 \quad ۰۲۹$$

$$-(1/3) \ln|\cos 2x| + C \quad ۰۳۱$$

$$-(1/3) \ln|4 - x^2| + C \quad ۰۳۳$$

$$\ln|\ln x| + C \quad ۰۳۵$$

$$(1/3) \ln^2 2 \quad ۰۳۷$$

$$\ln|\sec x + \tan x| + C \quad ۰۳۹$$

$$0 \quad ۰۴۱$$

$$-2 \quad ۰۴۳$$

$$2 \ln 2 - 1 \quad ۰۴۵$$

$$((2 \ln 2)/\pi, 0) \quad ۰۴۷$$

$$\ln 2 \quad ۰۴۹$$

بخش ۵۰۶، صفحه‌های ۳۵۲ تا ۳۵۴

$$4 \ln 2 \quad ۰۱$$

$$(3/2) \ln 2 \quad ۰۳$$

$$2 \ln 2 - 2 \ln 3 \quad ۰۵$$

$$2 \ln 3 - 3 \ln 2 \quad ۰۷$$

$$2 \ln 3 - \ln 2 \quad ۰۹$$

$$x/(x^2 + 5) \quad ۰۱۱$$

$$-[1/x + 1/(2(x+1))] \quad ۰۱۳$$

$$\cot x + 2 \cot 2x \stackrel{1}{=} (2 \cos 2x + 2 \cos^2 x)/\sin 2x \quad ۰۱۵$$

$$1/x + 1/[2(x+2)] \quad ۰۱۷$$

$$1/x - x^2/(1+x^2) \quad ۰۱۹$$

$$10x/(x^2+1) + 1/[2(1-x)] \quad ۰۲۱$$

$$(y/2)[1/x + 1/(x+1)] \quad ۰۲۳$$

$$y[1/[2(x+3)] + \cot x - \tan x] \quad ۰۲۵$$

$$(y/3)[1/x + 1/(x-2) - 2x/(x^2+1)] \quad ۰۲۷$$

$$(y/3)[1/x + 1/(x+1) + 1/(x-2)] \quad ۰۲۹$$

$$-2x/(x^2+1) - 2/(2x+3)] \quad ۰۳۱$$

$$2y[14/(3x) + 2/(3-2x)] \quad ۰۳۱$$

$$+ 1/[(1+x^2) \tan^{-1} x]] \quad ۰۳۳$$

$$\ln 2 \quad ۰۳۳$$

$$\ln \sqrt{2} \quad ۰۳۵$$

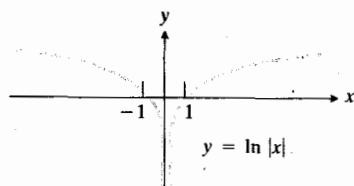
$$2 - 5 \ln 2 \quad ۰۳۷$$

$$\ln(5/4) \quad \text{الف} \quad ۰۳۹$$

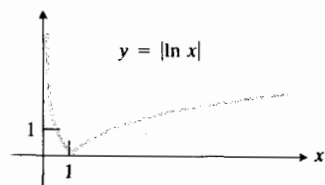
$$\sin^{-1}(3/5) \quad \text{ب} \quad ۰۴۱$$

$$1/5 \quad \text{ب} \quad ۰۴۱$$

$$\text{الف} \quad ۰۴۱$$



(ب)



$$\tan^{-1} 2 - (\pi/2) \quad ۰۵۵$$

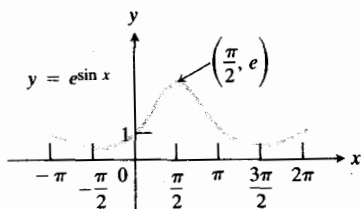
$$1/2 \quad ۰۵۷$$

$$1 \quad ۰۵۹$$

۰۶۱ الف) ماکسیمم برای e در $x = \pi/2$ ، مینیمم برای $1/e$

$$x = -(\pi/2) \text{ یا } x = 3\pi/2$$

(ب)



$$1/(2e) \quad ۰۶۳$$

۰۶۵ ۰۵۰۰۰۱۷ (خطی)؛ ۰۵۰۰۰۰۰ (درجه دوم)

$$1 \text{ الف) } \quad ۰۶۷$$

$$\pi/2 \text{ (ب) } \quad ۰۶۸$$

$$\pi \text{ (ب) } \quad ۰۶۹$$

$$y = 3e^{-2x} \text{ (ب) } \quad ۰۷۰$$

$$y = -e^{-x} + e^{-x} \quad ۰۷۱$$

$$(y+1)^2 = 2x \quad ۰۷۳$$

بخش ۷.۶، صفحه‌های ۳۶۵ تا ۳۶۷

$$(\ln 2)^{2^x} \quad ۰۱$$

$$(\ln 8)^{8^x} \text{ یا } (3 \ln 2)^{2^{2x}} \quad ۰۳$$

$$(\ln 9)^{9^x} \text{ یا } (2 \ln 3)^{3^{2x}} \quad ۰۵$$

$$(2 \ln 2)^{2^{2x}} \text{ یا } (\ln 2)^{4^x} \quad ۰۷$$

$$y(1 + \sec^x x \ln(\sin x)) \quad ۰۹$$

$$[(2 \ln x)x^{\ln x}]/x \quad ۰۱۱$$

$$(1-x)^x [x/(x-1) + \ln(1-x)] \quad ۰۱۳$$

$$2^x [1/x + (\ln 2)(\ln x)] \quad ۰۱۵$$

$$4/\ln 5 \quad ۰۱۷$$

$$1/(2 \ln 2) \quad ۰۱۹$$

$$2/\ln 3 \quad ۰۲۱$$

$$(3 \ln 2)/\ln 2 \quad ۰۲۳$$

$$\ln 2 \quad ۰۴۳$$

$$2 \ln 2 - 3 \text{ الف) } \quad ۰۴۵$$

$$27\pi/5 \text{ (ب) } \quad ۰۴۶$$

۰۴۷ ۰۵۰۰۰۰۰ (خطی)؛ ۰۵۰۰۰۰۰ (درجه دوم)

بخش ۶.۶، صفحه‌های ۳۵۸ تا ۳۶۱

$$x \quad ۰۱$$

$$x^{-2} \quad ۰۳$$

$$x^{-1} \quad ۰۵$$

$$2x \quad ۰۷$$

$$x - x^2 \quad ۰۹$$

$$xe^x \quad ۰۱۱$$

$$2 \ln^2 x \quad ۰۱۳$$

$$x^2 + 2x + 1 \quad ۰۱۵$$

$$e^{-x} \sin x + 2 \quad ۰۱۷$$

$$3e^{3x} \quad ۰۱۹$$

$$-7e^{5-7x} \quad ۰۲۱$$

$$xe^x(x+2) \quad ۰۲۳$$

$$(\cos x)e^{\sin x} \quad ۰۲۵$$

$$(1-x)/x \quad ۰۲۷$$

$$e^{\sin^{-1} x} / \sqrt{1-x^2} \quad ۰۲۹$$

$$27x^2 e^{2x} \quad ۰۳۱$$

$$2xe^{-x^2}(1-x^2) \quad ۰۳۳$$

$$e^x/(1+e^{2x}) \quad ۰۳۵$$

$$y(3/x - 2 - 5 \tan 5x) \quad ۰۳۷$$

$$y(\sin x + x \cos x) \quad ۰۳۹$$

$$[2e^{2x} - \cos(x+3y)]/[3 \cos(x+3y)] \quad ۰۴۱$$

$$8 \quad ۰۴۳$$

$$0 \quad ۰۴۵$$

$$a \quad ۰۴۷$$

$$2/3 \quad ۰۴۹$$

$$7 \quad ۰۵۱$$

$$\ln 3 \quad ۰۵۳$$

۴۱. الف، ب، ب، ح

۴۳. $\ln x$ سریعتر رشد می کند.

۴۵. اگر $\deg(f) > \deg(g)$ ، f سریعتر از g رشد می کند، و اگر $\deg(f) = \deg(g)$ آهنگ رشد هر دو یکی است.

۴۷. الف) 10^{-7}

ب) ۷

پ) ۱

بخش ۹.۶، صفحه ۳۷۸ تا ۳۸۰

۱. 2.81×10^{14}

۳. ۲۱۰۹ سال

۵. $Q = Q_0 e^{kt}$

۷. ۲۲۵٪

۱۱. الف) $k = (-\ln 2)/5700$

ب) ۱۸۹۳۵ سال

پ) ۶۶۵۸ سال

۱۳. ۴۶۵ روز

۱۵. -30°

۱۷. 53.4° پس از ۱۵ دقیقه؛ 23.8° پس از ۲ ساعت؛ در ۳۹ ساعت.

۱۹. $(V/R)[1 - (1/e)]A$

۲۱. $(mv_0/k)(1 - e^{-kt/m})$

۲۳. ۵۸۵۴ kg

بخش ۱۰.۶، صفحه های ۳۸۱ تا ۳۸۷

۱. $1 \pm \sqrt{2}$

۳. $\pi/2$

۵. $\pi\sqrt{3}$

۷. ب) 61°

۱۱. $1 + \ln x$

۱۳. $(1 - \ln x)/x^2$

۱۵. $(\ln x - 1)/\ln^2 x$

۲۵. $24/\ln 25$

۲۷. $1/\ln 2$

۲۹. ب

۳۱. ۰

۳۳. $\ln 3$

۳۵. e^2

۳۷. الف) $1/2$

ب) $-5/8$

۳۹. $x = -0.7666664696$ ، $y = 0.5877774756$

بخش ۸.۶، صفحه های ۳۷۲ تا ۳۷۴

۱. ۲

۳. -2

۵. ۲

۷. $2/3$

۹. ۱۲

۱۱. $\ln 3/\ln 2$

۱۳. $1/2$

۱۵. $1/(x \ln 4)$

۱۷. $1/(\ln 10)$

۱۹. $1/x$

۲۱. $1/[2 \ln 10 (x+1)]$

۲۳. $-1/(x \log_2 x \ln 2)$

۲۵. $2/[(x+1) \ln 5]$

۲۷. $\cot x/\ln 7$

۲۹. $\log_2 x$ تندتر تغییر می کند.

۳۱. $(\ln 10)/2$

۳۳. $(\ln^2 8)/\ln 2$

۳۵. $9 \ln 5$

۳۷. $(\ln 10)(\ln 2)$

۳۹. الف، ب، پ، ث، ج، ح

$$\Delta e^{2x} \cos 3x - e^{2x} \sin 3x \quad \cdot ۷۳$$

$$e \quad \cdot ۷۵$$

$$3/8 \quad \cdot ۷۷$$

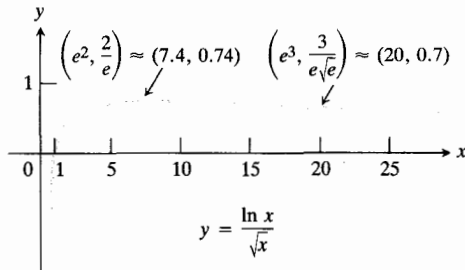
$$0 \quad \cdot ۷۹$$

$$0 \quad \cdot ۸۱$$

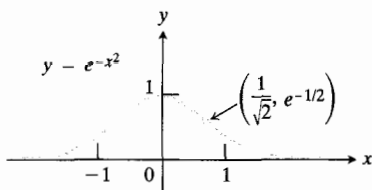
$$1 \quad \cdot ۸۳$$

$$1 + 5x \quad \cdot ۸۵$$

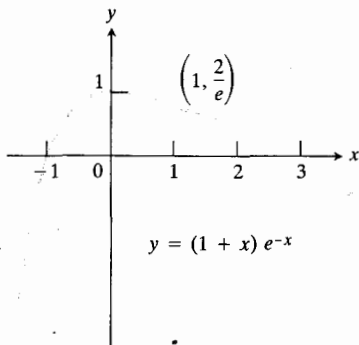
$$(الف) \quad \cdot ۸۷$$



(ب)



(پ)



$$y = 1 - (1/2)(e^x + e^{-x}) \quad \cdot ۸۹$$

$$(\pi/2)((3/2) + \ln 2) \quad \cdot ۹۱$$

$$a^x [e - (1/e)] \quad \cdot ۹۳$$

$$\sqrt{e}/2 \quad \cdot ۹۵$$

$$x^2(1 + 3 \ln x) \quad \cdot ۱۷$$

$$2/x \quad \cdot ۱۹$$

$$1/(1-x^2) \quad \cdot ۲۱$$

$$1/[x(x^2+1)] \quad \cdot ۲۳$$

$$\sec^{-1} x \quad \cdot ۲۵$$

$$[x(x-2)/(x^2+1)^{1/2}][2x-2]/[x(x-2)] \quad \cdot ۲۷$$

$$-2x/[2(x^2+1)]$$

$$-(1/2) \ln 3 \quad \cdot ۲۹$$

$$\ln \sqrt{3} \quad \cdot ۳۱$$

$$-\ln 2 \quad \cdot ۳۳$$

$$(1/2) \ln(x^2+1) + C \quad \cdot ۳۵$$

$$(1/2) \ln |\sin(2+x^2)| + C \quad \cdot ۳۷$$

$$\ln(2 + \sin^{-1} x) + C \quad \cdot ۳۹$$

$$0 \quad (الف) \quad \cdot ۴۱$$

$$0 \quad (ب)$$

$$x \quad (الف) \quad \cdot ۴۵$$

$$-(3/2) + 2x - (x^2/2) \quad (ب)$$

$$a \ln |y_1/a| \quad \cdot ۴۷$$

$$y = xe^{x-y} \quad \cdot ۴۹$$

$$y = (b/a^x)x^x \quad \cdot ۵۱$$

$$y^x = 2x \quad \cdot ۵۳$$

$$-(1/x^x)e^{1/x} \quad \cdot ۵۵$$

$$e^{-x}(1-x) \quad \cdot ۵۷$$

$$e^{-x}[(1/x) - \ln x] \quad \cdot ۵۹$$

$$(1/x) + 2 \quad \cdot ۶۱$$

$$(\sin 2x)e^{\sin^2 x} \quad \cdot ۶۳$$

$$1/(1+e^x) \quad \cdot ۶۵$$

$$2 - e^{2x} \quad (الف) \quad \cdot ۶۷$$

$$e^{2x} - (1/2)e^{2x}(2 - e^{2x}) \quad (ب)$$

$$8/(e^{2x} + e^{-2x})^2 \quad \cdot ۶۹$$

$$2x/\sqrt{1-x^2} - e^{(2^x)} - 2x^2 e^{(2^x)} \quad \cdot ۷۱$$

$$\pi/2 \quad ۰۳۵$$

$$(3/2) \ln 2 \quad ۰۳۷$$

$$(\pi - 2)/2 \quad ۰۳۹$$

$$\pi/2 \quad ۰۴۱$$

$$-(1/12)(3x^2 + 4)^{-1} + C \quad ۰۴۳$$

$$(2/3)\sqrt{x^2 + 5} + C \quad ۰۴۵$$

$$3/2 \quad ۰۴۷$$

$$-(1/3)e^{-3x} + C \quad ۰۴۹$$

$$\tan^{-1}(e^x) + C \quad ۰۵۱$$

$$-(1/3)\cos^3 x + C \quad ۰۵۳$$

$$9/2 \quad ۰۵۵$$

$$(1/2)\ln|e^{2x} - e^{-2x}| + C \quad ۰۵۷$$

$$0 \quad ۰۵۹$$

$$\sec^{-1}|2t| + C \quad ۰۶۱$$

$$\ln|\sin x| + C \quad ۰۶۳$$

$$(1/3)\sec^2 x + C \quad ۰۶۵$$

$$(1/3)e^{\tan^2 x} + C \quad ۰۶۷$$

$$(\sqrt{3} - 1)/2 \quad ۰۶۹$$

$$-\sqrt{1 + \cot^2 2t} + C \quad ۰۷۱$$

$$(1/2)(e^{\pi/4} - 1) \quad ۰۷۳$$

$$2/\ln 2 \quad ۰۷۵$$

$$(1/2)\ln^2 x + C \quad ۰۷۷$$

$$2\ln 2 \quad ۰۷۹$$

$$(1/2)e^{(x^2)} + C \quad ۰۸۱$$

$$\text{بخش ۲۰۷، صفحه‌های ۳۹۹ تا ۴۰۰}$$

$$-x \cos x + \sin x + C \quad ۰۱$$

$$-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \quad ۰۳$$

$$2\ln 2 - (3/2) \quad ۰۵$$

$$(x^4/4)\ln x - (x^4/16) + C \quad ۰۷$$

$$x \tan^{-1} x - (1/2)\ln(1 + x^2) + C \quad ۰۹$$

$$2e^x/(2 - e^x) \quad ۰۹۹$$

$$F = m\omega^2 x \text{ اگر } m \text{ جرم ذره باشد،} \quad ۰۱۰۱$$

$$x^{\tan^2 x}[(\tan^2 x + 2x \ln x \sec^2 x)/x] \text{ (الف)} \quad ۰۱۰۷$$

$$-(y \ln y)/(x \ln x) \text{ (ب)}$$

$$\text{(پ)}$$

$$(x^2 + 2)^{1-x}(2x - 2x^2 - (x^2 + 2)\ln(x^2 + 2))$$

$$x^{1/x}[(1 - \ln x)/x^2] \text{ (ت)}$$

$$1/(2 \ln 2) \text{ (الف)} \quad ۰۱۰۹$$

$$\text{(ب)} \quad ۱$$

$$۰۱۱۳ \quad ۲۴۲۷ \text{ سال}$$

$$2\sqrt{2} \quad ۰۱۱۵$$

فصل ۷

$$\text{بخش ۱۰۷، صفحه‌های ۳۹۲ تا ۳۹۵}$$

$$(2/3)(3x^2 + 5)^{3/2} + C \quad ۰۱$$

$$1/2 \quad ۰۳$$

$$1/2 \quad ۰۵$$

$$\tan(e^x) + C \quad ۰۷$$

$$(1/6)(3 + 2e^x)^{3/2} + C \quad ۰۹$$

$$\ln|\ln x| + C \quad ۰۱۱$$

$$2 \quad ۰۱۳$$

$$(1/2)\sec^2 x + C \quad ۰۱۵ \quad (1/2)\tan^2 x + C$$

$$\sin x - (1/3)\sin^3 x + C \quad ۰۱۷$$

$$(1/3)\sec^2 x - \sec x + C \quad ۰۱۹$$

$$19/3 \quad ۰۲۱$$

$$-1/[2(2x - 7)] + C \quad ۰۲۳$$

$$-\ln 3 \quad ۰۲۵$$

$$(2/3)(\sin x)^{3/2} + C \quad ۰۲۷$$

$$-(1 + \sin x)^{-1} + C \quad ۰۲۹$$

$$0 \quad ۰۳۱$$

$$-(1/2)\sqrt{1 - 2x^2} + C \quad ۰۳۳$$

$$-(3/5) \cos^{5/3} x + (6/11) \cos^{11/3} x \quad \cdot ۷$$

$$-(3/17) \cos^{17/3} x + C$$

$$\ln(2 + \sqrt{3}) \quad \cdot ۹$$

$$\sqrt{3} - (1/2) \ln(2 - \sqrt{3}) \quad \cdot ۱۱$$

$$(1/2) \sec(e^x) \tan(e^x) + (1/2) \ln|\sec(e^x)| \quad \cdot ۱۳$$

$$+ \tan(e^x)| + C$$

$$2/3 \quad \cdot ۱۵$$

$$16/35 \quad \cdot ۱۷$$

$$(1/2) + \ln(\sqrt{2}/2) \quad \cdot ۱۹$$

$$(\tan^5 x)/5 - (\tan^3 x)/3 + \tan x - x + C \quad \cdot ۲۱$$

$$-\ln|\csc x + \cot x| + C \quad \cdot ۲۳$$

$$\ln(\sqrt{2} + 1) \quad \text{الف} \quad \cdot ۲۵$$

$$\ln\sqrt{3} \quad \text{ب}$$

$$-6/5 \quad \cdot ۲۷$$

$$\pi \quad \cdot ۲۹$$

$$0 \quad \cdot ۳۱$$

$$-(1/2) \ln|\csc 2x + \cot 2x| + C \quad \cdot ۳۳$$

$$2\sqrt{2} - 2 \ln(\sqrt{2} + 1) \quad \cdot ۳۵$$

$$\ln(\sqrt{2} + 1) \quad \cdot ۳۷$$

$$1.3 \text{ cm} \quad \text{الف} \quad \cdot ۳۹$$

$$1.09 \text{ cm} \quad \text{ب}$$

بخش ۴۰۷، صفحه‌های ۴۱۲ و ۴۱۳

$$\pi \quad \cdot ۱$$

$$(1/2)t - (1/8) \sin 4t + C \quad \cdot ۳$$

$$\pi/16 \quad \cdot ۵$$

$$2\pi/18a \quad \cdot ۷$$

$$\tan x - (3/2)x + (1/2) \sin 2x + C \quad \cdot ۹$$

$$\pi/16 \quad \cdot ۱۱$$

$$\tan \theta + (1/2) \sin 2\theta - (1/22) \sin 4\theta \quad \cdot ۱۳$$

$$-(15/8)\theta + C$$

$$x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C \quad \cdot ۱۱$$

$$x \tan x + \ln|\cos x| + C \quad \cdot ۱۳$$

$$e^x(x^2 - 2x^2 + 6x - 6) + C \quad \cdot ۱۵$$

$$e^x(x^2 - 7x + 7) + C \quad \cdot ۱۷$$

$$e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C \quad \cdot ۱۹$$

$$(\pi^2/8) - 1/2 \quad \cdot ۲۱$$

$$x^2 \sin x + 2x^2 \cos x - 12x^2 \sin x - 24x \cos x \quad \cdot ۲۳$$

$$+ 24 \sin x + C$$

$$(x^2/a) \sin ax + (2x/a^2) \cos ax \quad \cdot ۲۵$$

$$-(2/a^2) \sin ax + C$$

$$(2\pi/3) - (\sqrt{3}/2) \quad \cdot ۲۷$$

$$1/2 \quad \cdot ۲۹$$

$$(x^2/2) \sin^{-1}(1/x) + (1/2) \sqrt{x^2-1} + C \quad \cdot ۳۱$$

$$(e^x/2)(\sin x - \cos x) + C \quad \cdot ۳۳$$

$$(e^{2x}/13)(3 \sin 2x + 2 \cos 2x) + C \quad \cdot ۳۵$$

$$(x/2)[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C \quad \cdot ۳۷$$

$$\pi \quad \text{الف} \quad \cdot ۳۹$$

$$2\pi \quad \text{ب}$$

$$2\pi[(e-2)/e] \quad \cdot ۴۱$$

$$\bar{x} = (6-2e)/(e-2); \bar{y} = (e^2-2)/[8(e-2)] \quad \cdot ۴۳$$

$$\pi^2/6 - \pi^2/2 \quad \text{الف} \quad \cdot ۴۵$$

$$8\pi \quad \text{ب}$$

$$\pi^2 + \pi - 2 \quad \cdot ۴۷$$

$$[2\pi\sqrt{2}(e^\pi - 2)]/5 \quad \cdot ۴۹$$

$$[(x^2+1)/2] \tan^{-1} x - (x/2) + C \quad \cdot ۵۱$$

بخش ۳۰۷، صفحه‌های ۴۰۷ و ۴۰۹

$$-\cos x + (2/3) \cos^3 x - (1/5) \cos^5 x + C \quad \cdot ۱$$

$$2/3 \quad \cdot ۳$$

$$-\cos x + \cos^3 x - (3/5) \cos^5 x \quad \cdot ۵$$

$$+ (1/7) \cos^7 x + C$$

$$-(\sqrt{1-x^2}/x) - \sin^{-1}x + C \quad ۰۳۳$$

$$-(3/4) + (\sqrt{7}/2) \quad ۰۳۵$$

$$x/(a^x \sqrt{a^x - x^x}) + C \quad ۰۳۷$$

$$-\sqrt{16-y^2} + C \quad ۰۳۹$$

$$-(1/\sqrt{x^2-1}) + C \quad ۰۴۱$$

$$(1/a) \tan^{-1}(u/a) + C \quad ۰۴۳ \text{ (الف)}$$

$$\sin^{-1}(u/a) + C \quad ۰۴۳ \text{ (ب)}$$

$$u/\sqrt{a^x+u^x} \quad ۰۴۵ \text{ (الف)}$$

$$a/u \quad ۰۴۵ \text{ (ب)}$$

$$(8\pi^x + 6\pi\sqrt{3})/3\sqrt{3} \quad ۰۴۷$$

$$y = 1/[\sin^{-1}(x/2) + \sqrt{2-x}] \quad ۰۴۹$$

$$(\delta/2)[2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ln(2+\sqrt{3})/(1+\sqrt{2})] \quad ۰۵۱$$

بخش ۶.۷، صفحه‌های ۴۲۱ تا ۴۲۳

$$\pi/8 \quad ۰۱$$

$$\ln\sqrt{2} + (\pi/8) \quad ۰۳$$

$$\pi/(6\sqrt{3}) \quad ۰۵$$

$$(1/3) \ln|\sqrt{9x^2-6x+5}+3x-1| + C \quad ۰۷$$

$$(1/9)\sqrt{9x^2-6x+5} + (1/9)\ln|\sqrt{9x^2-6x+5} \quad ۰۹$$

$$+3x-1| + C$$

$$\ln|\sqrt{x^2+2x+x+1}| + C \quad ۰۱۱$$

$$2 - \ln 9 \quad ۰۱۳$$

$$\ln|\sqrt{x^2-2x-3}+x-1| + C \quad ۰۱۵$$

$$-\sqrt{2x-x^2} + 2\sin^{-1}(x-1) + C \quad ۰۱۷$$

$$-\sqrt{5+2x-x^2} + 2\sin^{-1}[(x-2)/3] + C \quad ۰۱۹$$

$$3-2\sqrt{2} \quad ۰۲۱$$

$$\ln\sqrt{2} - (\pi/2) \quad ۰۲۳$$

$$100\pi[\tan^{-1}(5/2) - \tan^{-1}(-3/4)] \quad ۰۲۵$$

$$\pi\sqrt{2}[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})] \quad ۰۲۷$$

$$2 \quad ۰۱۵$$

$$2/5 \quad ۰۱۷$$

$$4-\pi \quad ۰۱۹$$

$$2\ln(\sqrt{2}+1) \quad ۰۲۱$$

$$2 \quad ۰۲۳$$

$$2\ln(\sqrt{2}+1) \quad ۰۲۵$$

$$0 \quad ۰۲۷$$

$$-\cot x - (\cot^2 x)/2 + C \quad ۰۲۹$$

$$2 - (\pi/2) \quad ۰۳۱$$

$$\ln|\sec t + \tan t| - \sin t + C \quad ۰۳۳$$

$$2\sqrt{2} \quad ۰۳۵$$

$$\pi^2/6 - \pi^2/4 \quad ۰۳۷$$

بخش ۵.۷، صفحه‌های ۴۱۷ تا ۴۱۹

$$\pi/2 \quad ۰۱$$

$$(1/2) \tan^{-1} 2x + C \quad ۰۳$$

$$\sqrt{2}/2 \quad ۰۵$$

$$\ln|\sqrt{25+y^2}+y| + C \quad ۰۷$$

$$(1/3) \ln|\sqrt{25+9y^2}+3y| + C \quad ۰۹$$

$$\ln|3z+\sqrt{9z^2-1}| + C \quad ۰۱۱$$

$$\pi/22 \quad ۰۱۳$$

$$\pi/22 \quad ۰۱۵$$

$$2\sqrt{3}-2\ln(2+\sqrt{3}) \quad ۰۱۷$$

$$-\sqrt{9-x^2}/9x + C \quad ۰۱۹$$

$$1/5 \quad ۰۲۱$$

$$(25\pi/4) \quad ۰۲۳$$

$$\pi/6 \quad ۰۲۵$$

$$2\pi \quad ۰۲۷$$

$$(2-\sqrt{2})/3 \quad ۰۲۹$$

$$2\sec^{-1} 2x + C \quad ۰۳۱$$

$$6\pi \ln 5 \quad ۰۵۱$$

$$(8 + 8 \ln 2 - 3 \ln 3) / (3 \ln 5 - 2 \ln 3) \quad ۰۵۳$$

$$x / (1000 - x) = e^{4t} / 499 \quad \text{الف} \quad ۰۵۵$$

ب) ۱۳۵۵ روز

$$x / (a - x) = [x_0 / (a - x_0)] e^{akt} \quad ۰۵۷$$

بخش ۸۰۷، صفحه‌های ۴۳۷ تا ۴۳۹

$$\pi / 2 \quad ۰۱$$

$$6 \quad ۰۳$$

$$2 \quad ۰۵$$

$$1000 \quad ۰۷$$

$$\ln 2 \quad ۰۹$$

$$۰۱۱ \quad \text{واگرا}$$

$$۰۱۳ \quad \text{همگرا}$$

$$۰۱۵ \quad \text{همگرا}$$

$$۰۱۷ \quad \text{واگرا}$$

$$۰۱۹ \quad \text{همگرا}$$

$$۰۲۱ \quad \text{واگرا}$$

$$۰۲۳ \quad \text{واگرا}$$

$$۰۲۵ \quad \text{همگرا}$$

$$۰۲۷ \quad \text{همگرا}$$

$$۰۲۹ \quad \text{واگرا}$$

$$۰۳۱ \quad \text{واگرا}$$

$$۰۳۳ \quad \text{همگرا}$$

$$۰۳۵ \quad \text{واگرا}$$

$$۰۳۷ \quad \text{همگرا}$$

$$۰۳۹ \quad \text{همگرا}$$

$$۰۴۱ \quad ۵۸۸۶۲$$

$$۱ \quad ۰۴۵$$

$$2\pi \quad ۰۴۷$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (2/\pi, 0) \quad ۰۴۹$$

$$\bar{x} = (2 + \ln 9) / \ln 9 \quad ۰۲۹$$

$$\bar{y} = [2 \tan^{-1}(2/3)] / (3 \ln 9)$$

$$\pi / 2 \quad ۰۳۱$$

بخش ۷۰۷، صفحه‌های ۴۲۸ تا ۴۳۰

$$2 / (x - 3) + 3 / (x - 2) \quad ۰۱$$

$$1 / (x + 1) + 3 / [(x + 1)^2] \quad ۰۳$$

$$-2/x - 1/x^2 + 2/(x - 1) \quad ۰۵$$

$$1 - 12/(x - 2) + 17/(x - 3) \quad ۰۷$$

$$1/3x^2 - 1/[2(x^2 + 9)] \quad ۰۹$$

$$\ln \sqrt{3} \quad ۰۱۱$$

$$2 - \ln 3 \quad ۰۱۳$$

$$2 \ln 3 \quad ۰۱۵$$

$$(2/7) \ln|x + 6| + (5/7) \ln|x - 1| + C \quad ۰۱۷$$

$$(9/2) - 6 \ln 2 \quad ۰۱۹$$

$$(5/6) \ln|x + 5| + (1/6) \ln|x - 1| + C \quad ۰۲۱$$

$$(2/3) \ln|x + 5| + (1/3) \ln|x - 1| + C \quad ۰۲۳$$

$$\ln(3/2) - 1/2 \quad ۰۲۵$$

$$-(3/8) \ln|x| + (5/16) \ln|x - 2| \quad ۰۲۷$$

$$+ (1/16) \ln|x + 2| + C$$

$$5(\sqrt{3} - \pi/3) \quad ۰۲۹$$

$$0 \quad ۰۳۱$$

$$2 \ln|x| - (1/2) \ln(x^2 + 1) + \tan^{-1}x + C \quad ۰۳۳$$

$$x^2/2 + (3/2) \ln|x + 1| - (9/2) \ln|x + 3| + C \quad ۰۳۵$$

$$\pi/4 + 1/2 \quad ۰۳۷$$

$$1/2 - \pi/2 \quad ۰۳۹$$

$$2 \ln 3 - 3 \ln 2 \quad ۰۴۱$$

$$5/2 - 3\pi/8 \quad ۰۴۳$$

$$2\sqrt{x} - x - 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C \quad ۰۴۵$$

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x} - 6 \ln(\sqrt[3]{x} + 1) + C \quad ۰۴۷$$

$$\ln 2 - 2 + (\pi/2) \quad ۰۴۹$$

$$\begin{aligned} & - (x^n/a) \cos ax + (n/a) \int x^{n-1} \cos ax \, dx \quad \text{ب. ۳۱} \\ & (81(\ln 3)^2 - 2 \ln 3)/2 \quad \text{۳۳} \end{aligned}$$

مساله‌های گوناگون، فصل ۷، صفحه‌های ۴۴۶ تا ۴۵۳

$$2\sqrt{1+\sin x} + C \quad \text{۱}$$

$$(\tan^2 x)/2 + C \quad \text{۳}$$

$$18 \quad \text{۵}$$

$$\ln|\sqrt{x^2+2x+2}+x+1|+C \quad \text{۷}$$

$$e^x(x^2-2x+2)+C \quad \text{۹}$$

$$\tan^{-1}(e^x)+C \quad \text{۱۱}$$

$$2 \tan^{-1}\sqrt{x}+C \quad \text{۱۳}$$

$$(9/25)(t^{5/2}+1)^{5/2}+C \quad \text{۱۵}$$

$$\ln|(\sqrt{e^t+1}-1)/(\sqrt{e^t+1}+1)|+C \quad \text{۱۷}$$

$$\pi/4 \quad \text{۱۹}$$

$$\pi/4 \quad \text{۲۱}$$

$$\ln\sqrt{r} \quad \text{۲۳}$$

$$2 \quad \text{۲۵}$$

$$(3/5)(1+e^x)^{5/2} - (3/2)(1+e^x)^{1/2} + C \quad \text{۲۷}$$

$$5/12 \quad \text{۲۹}$$

$$\ln|2+\ln x|+C \quad \text{۳۱}$$

$$(2/21)(2\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{8}) \quad \text{۳۳}$$

$$3/80 \quad \text{۳۵}$$

$$-2\sqrt{x+1} \cos\sqrt{x+1} + 2 \sin\sqrt{x+1} + C \quad \text{۳۷}$$

$$(1/2) \ln 3 \quad \text{۳۹}$$

$$\ln|y| - (1/3) \ln|2y^2+1| \quad \text{۴۱}$$

$$+ 1/[3(2y^2+1)] + C$$

$$\ln|x/\sqrt{x^2+1}| + 1/[2(x^2+1)] + C \quad \text{۴۳}$$

$$\ln|e^x-1|-x+C \quad \text{۴۵}$$

$$(3/2) \ln|x+3| - (1/2) \ln|x+1| + C \quad \text{۴۷}$$

$$\ln|x/\sqrt{x^2+2}|+C \quad \text{۴۹}$$

$$\sqrt{x^2-1} - \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + C \quad \text{۵۱}$$

بخش ۹.۷، صفحه‌های ۴۴۱ تا ۴۴۲

$$\sqrt{\pi}/2 \quad \text{۱}$$

$$(2/\sqrt{3})[\tan^{-1}\sqrt{2} - (\pi/4)] \quad \text{۳}$$

$$5$$

$$x/[18(9-x^2)] + (1/108) \ln|(x+3)/(x-3)| + C$$

$$(22-22\sqrt{2})/231 \quad \text{۷}$$

$$\sqrt{2}(\pi/4-1) \quad \text{۹}$$

$$-(1/6) \ln|(\delta+2\sin 2x$$

$$11$$

$$+2\cos 2x)/(\delta+5\sin 2x)|+C$$

$$[(x+1)(2x-3)^{7/2}]/\delta \quad \text{۱۳}$$

$$10! \quad \text{۱۵}$$

$$\pi/2 \quad \text{۱۷}$$

$$\pi/2 - 1/2 \quad \text{۱۹}$$

$$\bar{x}=4/3, \bar{y}=\ln\sqrt{2} \quad \text{۲۱}$$

بخش ۱۰.۷، صفحه‌های ۴۴۴ تا ۴۴۶

$$3\pi/2 \quad \text{۱}$$

$$(1/6) \cos^5 x \sin x + (\delta/22) \cos^2 x \sin x \quad \text{۳}$$

$$+(\delta/16)(\cos x \sin x + x) + C$$

$$3\pi/8 \quad \text{۵}$$

$$8/15 \quad \text{۷}$$

$$(1/2) \tan^2 2x + (1/2) \ln|\cos 2x| + C \quad \text{۹}$$

$$(1/2) \tan^2 x - (1/2) \tan^2 x + \ln|\cos x| + C \quad \text{۱۱}$$

$$-(1/2) \cot^2 x - \ln|\sin x| + C \quad \text{۱۳}$$

$$\pi/2 - 4/3 \quad \text{۱۵}$$

$$2\sqrt{3} \quad \text{۱۷}$$

$$(1/2) \sec^2 x \tan x + (3/8) \sec x \tan x \quad \text{۱۹}$$

$$+(3/8) \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1) \quad \text{۲۱}$$

$$-(1/3) \csc^2 x \cot x - (2/3) \cot x + C \quad \text{۲۳}$$

$$1/\sqrt{2} \quad \text{۲۵}$$

$$(735/1022) + (3/8) \ln 2 \quad \text{۲۷}$$

$$(1/4)(\sin^{-1}x)^2 + (1/2)x\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - (x^2/4) + C \quad 107$$

$$x - \tan x + \sec x + C \quad 109$$

$$(1/2)\ln|\sin x - 1| - (1/18)\ln|\sin x + 1| \quad 111$$

$$-(2/9)\ln|\sin x - 2| - 1/[2(\sin x - 2)] + C - 2\sin^{-1}[\cos(x/2)/\cos(\alpha/2)] + C \quad 113$$

$$\ln 6 - 2 + 2\sqrt{r}\tan^{-1}(1/\sqrt{r}) \quad 115$$

$$\ln|(1+\sqrt{1-e^{-t}})/(1-\sqrt{1-e^{-t}})| + C \quad 117$$

$$x(\sin^{-1}x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x + C \quad 119$$

$$(1/2)x^2\sin^{-1}x - (1/4)\sin^{-1}x + (1/4)x\sqrt{1-x^2} + C \quad 121$$

$$(1/2)\ln|\sec 2\theta + \tan 2\theta| + (1/2)\theta + C \quad 123$$

$$(1/2)\ln|1-2t^2| - (1/2)\ln|(1+2t\sqrt{1-t^2})/(1-2t^2)| - (1/2)\sin^{-1}t + C \quad 125$$

$$(1/16)\ln[(x^2+2x+2)/(x^2-2x+2)] + (1/8)(\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1)) + C \quad 127$$

$$\pi/2 \quad 129$$

$$\pi/2 \quad 131$$

$$-1 \quad 133$$

$$a^x(\pi-2)/4; \bar{x}=\bar{y}=2a/[2(\pi-2)] \quad 135$$

$$2k\pi a^x \quad 137$$

$$139$$

$$\sqrt{1+e^x} - \ln|(\sqrt{1+e^x}+1)/e| - \sqrt{r} + \ln(1+\sqrt{r})$$

$$\pi[e^x\sqrt{1+e^x} + \ln(\sqrt{1+e^x}+e^x) - \sqrt{r} - \ln(1+\sqrt{r})] \quad 141$$

$$2\pi \quad 143$$

$$(2\pi a^x)/3 \quad 145$$

$$147 \quad 149$$

$$2 \cdot 151 \quad 1/2 \quad 149$$

$$\ln|x| - 2\ln|2\sqrt{x+1}| + C \quad 53$$

$$(1/2)\ln(5/2) \quad 55$$

$$(2/8)(1+e^{x^2})^{1/2}(e^{x^2}-2) + C \quad 57$$

$$x^2/2 + (2/3)\ln|x+2| + (2/3)\ln|x-1| + C \quad 59$$

$$\ln|x-1| - 1/(x-1) + C \quad 61$$

$$\tan^{-1}(2\sqrt{y^2+y}) + C \quad 63$$

$$(2/8)\sin^{-1}x + (1/2)x\sqrt{1-x^2} \quad 65$$

$$+ (1/8)x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) + C$$

$$x \tan x + \ln|\cos x| - (x^2/2) + C \quad 67$$

$$\pi^2 - 2 \quad 69$$

$$[(9-2\sqrt{3})\pi]/72 \quad 71$$

$$(1/2) + \ln 2 \quad 73$$

$$x \sec^{-1}x - \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C \quad 75$$

$$(1/16)\ln|(x^2-4)/(x^2+4)| + C \quad 77$$

$$\ln|\cot x| + C \quad 79$$

$$(2\sqrt{3}\pi-9)/9 \quad 81$$

$$\sqrt{r}\tan^{-1}(\sqrt{r}\tan t) - t + C \quad 83$$

$$e^t \sin(e^t) + \cos(e^t) + C \quad 85$$

$$87$$

$$(x^2/2)\ln(x^2+x) + (1/2)\ln(x^2+1) - (2/4)x^2 + C$$

$$\ln|\sqrt{r+\sin^2 x} + \sin x| + C \quad 89$$

$$(x^2-2)\cos(1-x) + 2x\sin(1-x) + C \quad 91$$

$$(\tan^2 x)/2 + \ln|\cos x| + C \quad 93$$

$$\ln\sqrt{x^2+1} + 1/[2(x^2+1)] + C \quad 95$$

$$298/15 \quad 97$$

$$x \ln|x-\sqrt{x^2-1}| + \sqrt{x^2-1} + C \quad 99$$

$$x \ln|x+\sqrt{x}| - x + \sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1) + C \quad 101$$

$$2 \ln 3 - 2 \quad 103$$

$$2 \cdot 105$$

بخش ۳۰۸، صفحه‌های ۴۶۵ تا ۴۶۷

$$x^2 = 8y, y = -2 \quad ۰۱$$

$$x^2 = -16y, y = 2 \quad ۰۳$$

$$(x+2)^2 = 2(y-2), y = 2 \quad ۰۵$$

$$(y-1)^2 = 12(x+3), x = -6 \quad ۰۷$$

$$y^2 = 8(x-2), F(2, 0) \quad ۰۹$$

$$(y-1)^2 = -16(x+3), F(-7, 1) \quad ۰۱۱$$

$$(y-1)^2 = 2x, F(1, 1) \quad ۰۱۳$$

$$V(0, 0), F(2, 0), \text{محور: } y=0, \text{هادی: } x=-2 \quad ۰۱۵$$

$$V(0, 0), F(0, 25), \text{محور: } x=0, \text{هادی: } y=-25 \quad ۰۱۷$$

$$V(1, 1), F(1, -1), \text{محور: } x=1, \text{هادی: } y=3 \quad ۰۱۹$$

$$V(2, 0), F(1, 0), \text{محور: } y=0, \text{هادی: } x=3 \quad ۰۲۱$$

$$V(-1, -1), F(-1, 0), \text{محور: } x=-1 \quad ۰۲۳$$

$$\text{هادی: } y=-2$$

$$V(-2, 2), F(0, 2), \text{محور: } y=2 \quad ۰۲۵$$

$$\text{هادی: } x=-4$$

۰۲۷ تمام نقاط صفحه بجز آنهایی که در $x^2 = y$ صدق می‌کنند

بخش ۴۰۸، صفحه‌های ۴۷۲ تا ۴۷۴

$$x^2/12 + y^2/16 = 1, e = 1/2 \quad ۰۱$$

$$x^2/5 + (y-2)^2/9 = 1, e = 2/3 \quad ۰۳$$

$$C(7, 5), V: (7, 0), (7, 10), F(7, 5 \pm \sqrt{21}) \quad ۰۵$$

$$C(-1, -4), V: (-1, 1), (-1, -9) \quad ۰۷$$

$$F: (-1, 0), (-1, -8)$$

$$C(3, 1), V: (3, 6), (3, -4), F(3, 1 \pm \sqrt{21}) \quad ۰۹$$

$$C(-5, 0), V: (-10, 0), (0, 0) \quad ۰۱۱$$

$$F(-5 \pm 2\sqrt{6}, 0)$$

$$C(2, -1), V: (-1, -1), (5, -1) \quad ۰۱۳$$

$$F(2 \pm 2\sqrt{2}, -1)$$

$$C(2, -2), V: (2, 0), (2, -4) \quad ۰۱۵$$

$$F(2, -2 \pm \sqrt{3})$$

$$2/[1 - \tan(x/2)] + C \quad ۰۱۵۳$$

$$-\cot(x/2) - x + C \quad ۰۱۵۵$$

$$-(\sqrt{2}/2) \ln|[\tan(x/2) + 1$$

$$+ \sqrt{2}]/[\tan(x/2) + 1 - \sqrt{2}]| + C \quad ۰۱۵۷$$

فصل ۸

بخش ۱۰۸، صفحه‌های ۴۵۶ تا ۴۵۷

$$x^2 = 8y + 16 \quad ۰۱$$

$$x - y = 1 \quad ۰۳$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 8(y^2 - x^2) = 0 \quad ۰۵$$

$$3x^2 - 20x + 4y^2 + 12 = 0 \quad ۰۷$$

$$5x^2 - 4y^2 = 20 \quad ۰۹$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0 \quad ۰۱۱$$

$$C(2, 2), \sqrt{5} \quad ۰۱۳$$

بخش ۲۰۸، صفحه‌های ۴۵۹ تا ۴۶۰

$$x^2 + y^2 - 4y = 0 \quad ۰۱$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \quad ۰۳$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y < 1 \quad ۰۵$$

$$C(0, 0), r = 2 \quad ۰۷$$

$$C(0, 1), r = 2 \quad ۰۹$$

$$C(-2, 0), r = 2 \quad ۰۱۱$$

$$C(-1, -1), r = 1 \quad ۰۱۳$$

$$C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), r = \sqrt{2}/2 \quad ۰۱۵$$

$$\text{قطر } (-1, 2) \quad ۰۱۷$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 5 \quad ۰۱۹$$

$$5x^2 + 5y^2 + 10x - 10y + 1 = 0 \quad ۰۲۱$$

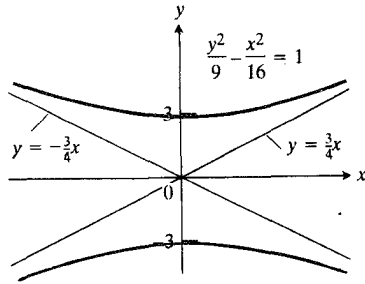
$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0 \quad ۰۲۳$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0; C(3, 2), r = 5 \quad ۰۲۵$$

$$C(-2, 2), r = 2\sqrt{5} \quad ۰۲۷$$

$$7/2 \text{ در } 3\sqrt{7}/2 \quad ۰۲۹$$

۳.



۵. $C(2, -3), V:(2, -3), (0, -3)$

$F(2 \pm \sqrt{13}, -3), e = \sqrt{13}/2$

$2(y+3) = \pm 2(x-2)$

۷. $C(2, -3), V:(5, -3), (-1, -3)$

$F(2 \pm \sqrt{13}, -3), e = \sqrt{13}/3$

$2(y+3) = \pm 2(x-2)$

۹. $C(4, 3), V:(4, 6), (4, 0), F:(4, 8), (4, -2)$

$e = 5/3, 2(y-3) = \pm 2(x-4)$

۱۱. $C(-2, 1), V:(0, 1), (-2, 1), F:(-5, 1), (1, 1)$

$e = 3/2, 2(y-1) = \pm \sqrt{5}(x+2)$

۱۳. $C(2, 0), V:(0, 0), (4, 0), F(2 \pm \sqrt{5}, 0)$

$e = \sqrt{5}/2, 2y = \pm (x-2)$

۱۵. $(y-2)^2 - (x^2/3) = 1$

۱۷. بردوی يك هذلولی به كانونهای A و B و $a = ۱۲۹۰۹ \text{ mi}$ و نزدیکتر به A

۱۸. الف $22\pi/3$

ب $256\pi/3$

۲۰. $22\pi\sqrt{7}$

۲۲. شعاع دایره‌ها با آهنگ برابر افزایش می‌یابند، بنابراین تفاضلشان ثابت است.

بخش ۶۰۸، صفحه ۴۸۵

۱. $(x')^2 - (y')^2 = 4$

۳. $(x')^2 = -4y'$

۵. $y' = \pm 1$

۷. $(x')^2 = -4(y' + 1/2)$

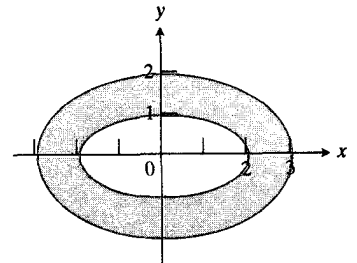
۱۷. $C(-1, 2), V:(-5, 2), (3, 2)$

$F(-1 \pm \sqrt{7}, 2)$

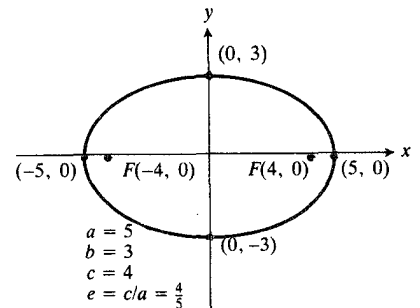
۲۱. $(x-1)^2/2 + (y-2)^2/9 = 1; F(1, 2 \pm \sqrt{5})$

۲۳. بیضی و ناحیه داخلش

۲۵.



۲۷.



۲۹. الف $(x-17.5)^2/(18.09)^2 + y^2/(4.56)^2 = 1$

ب $۵۸۴ \text{ AU}, ۵۲۱ \times 10^7 \text{ mi}$

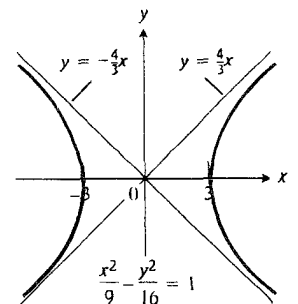
پ $۳۵۶۰ \text{ AU}, ۳۳۰ \times 10^9 \text{ mi}$

۳۱. $(0, 16/3\pi)$

۳۳. $4x^2 + y^2 - 4y = 0$ یا $c=0, b=-2, a=0$

بخش ۵۰۸، صفحه‌های ۴۷۹ تا ۴۸۱

۱.



$$8a \cdot 27$$

$$5\pi^2 \cdot 29$$

$$6723 \text{ ft} \cdot 31$$

مسئله‌های گوناگون، فصل ۸، صفحه‌های ۴۹۸ تا ۵۰۳

$$x^2 + xy + y^2 = 3k^2 \cdot 1$$

$$(-16/5, 53/10) \cdot 5$$

$$y^2 = 2(x - (7/2)) \cdot 7$$

$$x = 2 \text{ pm} \cdot 11$$

$$(\pm 8\sqrt{3}/9, 4/3) \cdot 13$$

$$F_1P = 5; F_2P = \sqrt{5} \text{ (الف)} \cdot 19$$

$$OF_2 + OF_1 = 5 + 2 > 5 + \sqrt{5} \text{ (ب بیرون)} \cdot 21$$

$$C(3, 2), V: (15, 2), (-9, 2) \cdot 21$$

$$F(3 \pm 8\sqrt{2}, 2), e = 2\sqrt{2}/3$$

$$(x+3)^2/36 + (y-1)^2/20 = 1 \cdot 23$$

$$x = x' - 2, y = y' - 1, (2, 1) \cdot 25$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \text{ دایره} \cdot 27$$

$$\int_0^a (b/a) \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi ab \text{ بیضی} \cdot 29$$

۲۹. هواپیما در دستگاه مختصات انتخاب شده در نقطه
 $(5, 10\sqrt{10}/3)$ قرار دارد.

$$C(1, -2), V: (1, -5), (1, 1) \cdot 31$$

$$F(1, -2 \pm \sqrt{13}), 2(y+2) = \pm 2(x-1)$$

۳۵. به ازای $A = (c, 0)$ و $B = (-c, 0)$ مسیر شاخه راست
 هذلولی $3x^2 - y^2 + 2cx - c^2 = 0$ است.

۳۷. بر شاخه‌ای از هذلولی که کانون‌هایش محل استقرار تفنگک
 و هدف است.

$$e = \sqrt{2} \cdot 39$$

$$2y - 27x - 56 = 0, 2y - 27x + 102 = 0 \cdot 41$$

$$x^2 + 2xy + 5y^2 - 1 = 0 \cdot 43$$

$$C(1/2, -1/2), V(1/2, -1/2 \pm \sqrt{2}) \cdot 45$$

$$F(1/2, -1/2 \pm 2), e = \sqrt{2}$$

$$y + 1/2 = \pm (x - (1/2))$$

۴۷. خم، بخشی از سهمی $y^2 = 2a\sqrt{2}x' - a^2$ است

$$2(x')^2 + 2(y')^2 = 19 \cdot 9$$

$$\sin \theta = 1/\sqrt{5}, \cos \theta = 2/\sqrt{5} \cdot 11$$

$$x' = \pm 1/\sqrt{2} \cdot 15$$

بخش ۷۰۸، صفحه ۴۸۷

۱. هذلولی

۳. سهمی

۵. بیضی

۷. هذلولی

۹. بیضی (دایره)

۱۱. سهمی

۱۳. بیضی

۱۵. هذلولی

۱۷. سهمی

بخش ۸۰۸، صفحه ۴۸۹

۳. خط L و نقطه D وجود ندارد

بخش ۹۰۸، صفحه‌های ۴۹۵ تا ۴۹۷

$$x^2 + y^2 = 1 \cdot 1$$

$$x^2/16 + y^2/4 = 1 \cdot 3$$

$$x = 1 - 2y^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1 \cdot 5$$

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ شاخه چپ} \cdot 7$$

$$x = \cos^{-1}(1-y) - \sqrt{2y-y^2}, \text{ يك طاق از چرخزاد} \cdot 9$$

$$y = x^{2/3} \cdot 11$$

$$x = y^2 \cdot 13$$

$$y = (x-1)^2 + 2, x \geq 1 \cdot 15$$

$$x = -at/\sqrt{1+t^2}, y = a/\sqrt{1+t^2} \cdot 17$$

$$x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) \cdot 19$$

$$x = (a-b) \cos \theta + b \cos [(a-b)/b] \theta \cdot 21$$

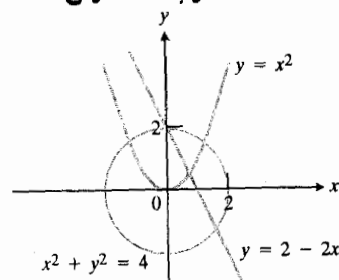
$$y = (a-b) \sin \theta - b \sin [(a-b)/b] \theta$$

$$x = tx_0, y = ty_0 \text{ (ب)} \cdot 23$$

$$x = -1+t, y = t \text{ (پ)}$$

$$(1, 1) \cdot 25$$

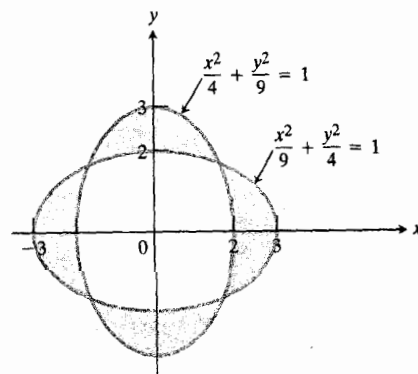
۴۹. هر نقطه‌ای چون (x, y) که در معادله خط، دایره، یا سهمی صدق کند حاصلضرب را صفر می‌کند.



۵۱. هر نقطه‌ای چون (x, y) به قسمی که $x + y = 0$ یا $x^2 + y^2 - 1 = 0$

۵۳. نقاط روی یا درون بیضی

۵۵. نقاطی که درون یک بیضی و بیرون از دیگری باشند، زیرا حاصلضرب دو عدد وقتی منفی است که تنها یکی از آنها منفی باشد



۵۷. نقاطی که بردار $x^2 + y^2 = 9$ یا مدلولی $y^2 - x^2 = 9$ واقع‌اند

$$x = a \sin^2 t \tan t, \quad y = a \sin^2 t \quad ۵۹$$

$$x = 8t - 2 \sin 2t, \quad y = 4 - 2 \cos 2t \quad ۶۱$$

$$۵۸۶۸ \quad (ب) \quad ۶۵$$

$$|E| \leq ۰.۰۰۰۳ \quad (ب)$$

فصل ۹

بخش ۹.۱، صفحه‌های ۵۰۷ تا ۵۰۹

| | sinh | cosh | tanh | coth | sech | csch | |
|----|-------------------|-----------------|-------------------|-------------------|-----------------|-------------------|--|
| ۱. | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $-\frac{3}{5}$ | $-\frac{5}{3}$ | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{2}{3}$ | |
| ۳. | $-\frac{7}{24}$ | $\frac{25}{24}$ | $-\frac{7}{25}$ | $-\frac{25}{7}$ | $\frac{22}{25}$ | $-\frac{22}{7}$ | |
| ۵. | $\pm \frac{4}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\pm \frac{4}{5}$ | $\pm \frac{5}{4}$ | $\frac{3}{5}$ | $\pm \frac{3}{4}$ | |

$$x + (1/x) \quad ۷$$

$$(x^2 - 1)/(x^2 + 1) \quad ۹$$

$$e^{5x} \quad ۱۱$$

$$e^{-2x} \quad ۱۳$$

$$\text{فرد} \quad ۱۵$$

$$\text{زوج} \quad ۱۷$$

$$\text{زوج} \quad ۱۹$$

$$\text{فرد} \quad ۲۱$$

$$\text{زوج} \quad ۲۳$$

$$\ln 2 \quad ۲۵$$

بخش ۲.۹، صفحه‌های ۵۱۱ تا ۵۱۳

$$3 \cosh 3x \quad ۱$$

$$۰ \quad ۳$$

$$-\operatorname{csch}^2(\tan x) \sec^2 x \quad ۵$$

$$-\operatorname{csch}(x/4) \coth(x/4) \quad ۷$$

$$۰ \quad ۹$$

$$\operatorname{sech} x \quad ۱۱$$

$$\operatorname{csch} x \quad ۱۳$$

$$2x \cosh 2x \quad ۱۵$$

$$(2/5) \sinh 5 \quad ۱۹$$

$$۰ \quad ۲۱$$

$$\sinh 1 - \cosh 1 + 1 = 1 - e^{-1} \quad ۲۳$$

$$1/(4e) \quad ۲۵$$

$$2(\cosh 1 - \sinh 1) = 2e^{-1} \quad ۲۷$$

$$(1/2) \sinh(2x+1) + C \quad ۲۹$$

$$-(1/3) \operatorname{sech}^2 x + C \quad ۳۱$$

$$\ln(\cosh x) + C \quad ۳۳$$

$$2 \cosh \sqrt{x} + C \quad ۳۵$$

$$2\sqrt{r} \cosh(x/2) + C \quad ۳۷$$

$$\cosh^2 x + C \quad ۳۹$$

$$\sec x \quad ۰۱۹$$

$$-2\csc 2x \quad ۰۲۱$$

$$1/[2\sqrt{x(x-1)}] \quad ۰۲۳$$

$$-1/(|x|\sqrt{x^2+1}) \quad ۰۲۵$$

$$|\sec x| \quad ۰۲۷$$

$$x/\sqrt{1+x^2} + 1/(|x|\sqrt{x^2+1}) \quad ۰۲۹$$

$$x^2/\sqrt{x^2-2} \quad ۰۳۱$$

$$(1/2)\ln[(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})/2] \quad ۰۳۳$$

$$(1/2)\ln 3 \quad ۰۳۵$$

$$-(1/2)\ln[(1+\sqrt{2})/(2+\sqrt{5})] \quad ۰۳۷$$

$$0 \quad ۰۳۹$$

$$(x/2)\sqrt{x^2+1} + (1/2)\sinh^{-1}x + C \quad ۰۴۱$$

$$22\ln(3/2) - 3\ln 3 + 6 \quad ۰۴۳$$

$$\cosh^{-1}(x-2) + C, x > 3 \quad ۰۴۵$$

$$\ln|u+\sqrt{u^2-1}| + C \quad ۰۴۷$$

$$-\ln[(\sqrt{1+u^2}+1)/u] + C \quad ۰۴۹$$

$$\sqrt{x^2-25} - 5\sec^{-1}|x/5| + C \quad ۰۵۱$$

$$(25/2)\cosh^{-1}(x/5) + (x/2)\sqrt{x^2-25} + C \quad ۰۵۳$$

$$(x/2)\sqrt{x^2-4} - 2\cosh^{-1}(x/2) + C \quad ۰۵۵$$

$$\sqrt{5}/2 + (1/2)\ln(2+\sqrt{5}) \quad ۰۵۷$$

$$\sqrt{2} - (5/2) - \ln(1+\sqrt{2}) + \ln 3 \quad ۰۵۹$$

$$y = x^2/2 - (1/2)\ln|x| - 1/2 \quad ۰۶۱$$

مسئله‌های گوناگون، فصل ۹، صفحه‌های ۵۲۶ تا ۵۲۷

$$0 \quad ۰۳$$

$$\cosh x = 21/9, \tanh x = -20/21 \quad ۰۵$$

$$y = 1 \quad ۰۹$$

$$6\sinh^3 x \cosh^3 x \quad ۰۱۳$$

$$-1/[1-x^2 \sin^{-1}x \sqrt{1-(\sin^{-1}x)^2}] \quad ۰۱۵$$

$$\ln(1+\cosh x) + C \quad ۰۴۱$$

$$x^2 \sinh x - 2x \cosh x + 2 \sinh x + C \quad ۰۴۳$$

$$-(1/15)\operatorname{sech}^5 x + C \quad ۰۴۵$$

$$(\sinh^3 x \cosh^3 x)/12 - (\sinh^6 x)/16 \quad ۰۴۷$$

$$+(3x)/8 + C$$

$$e^{5x}/10 + e^x/2 + C \quad ۰۴۹$$

$$-\ln|\operatorname{csch} x + \coth x| + C \quad ۰۵۱$$

$$2\pi \quad ۰۵۳$$

$$15\pi/16 + \pi \ln 2 \quad ۰۵۵$$

$$2\pi/3 \quad ۰۵۷$$

$$(0, 1/\pi) \quad ۰۵۹$$

$$\pi \quad ۰۶۱$$

$$A=1, B=1, C=-1, D=-1 \quad ۰۶۳$$

بخش ۳.۹، صفحه ۵۱۸

$$a \sinh(x_1/a) \quad ۰۱$$

$$\bar{x}=0, \bar{y}=[x_1 \operatorname{csch}(x_1/a)]/2 + y_1/2 \quad ۰۵$$

$$dx/ds = a/\sqrt{a^2+s^2}, dy/ds = s/\sqrt{a^2+s^2} \quad \text{ب) } ۰۷$$

$$115 \text{ ft (i) } \quad ۰۹$$

$$16 \text{ lb (ii) } \quad ۰۹$$

بخش ۴.۹، صفحه‌های ۵۲۳ تا ۵۲۵

$$0 \quad ۰۱$$

$$-\ln 3 \quad ۰۳$$

$$\ln 2 \quad ۰۵$$

$$(1/2)\ln 3 \quad ۰۷$$

$$(1/2)\ln 3 \quad ۰۹$$

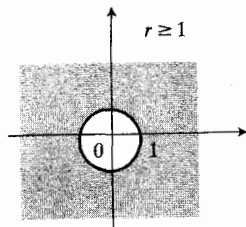
$$-(1/2)\ln 3 \quad ۰۱۱$$

$$\ln 3 \quad ۰۱۳$$

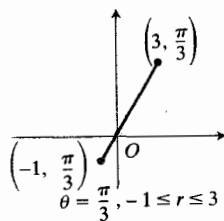
$$\ln 5 \quad ۰۱۵$$

$$2/\sqrt{1+2x^2} \quad ۰۱۷$$

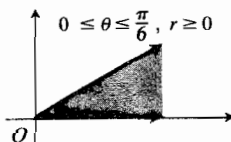
۰۹



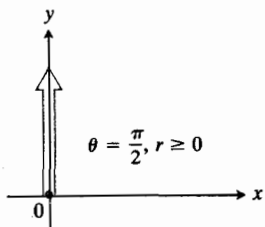
۰۱۱



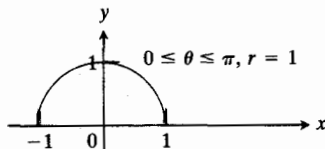
۰۱۳



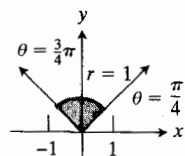
۰۱۵



۰۱۷



۰۱۹



۰۱۷ $[\sec^2(\tanh^{-1}x)]/(1-x^2)$

۰۱۹ $e^{\cosh^{-1}x}/\sqrt{x^2-1}$

۰۲۱ $|\sec x|$

۰۲۳ ۱

۰۲۵ $(18-10\sqrt{3})/27$

۰۲۷ $\ln|\cosh\sqrt{2}-\cosh 1|$

۰۲۹ واگراست

۰۳۱ $\ln\sqrt{3}$

۰۳۳ $\ln 2$

فصل ۱۰

بخش ۱۰، صفحه‌های ۵۳۲ تا ۵۳۴

۰۱ این دسته‌ها عبارت‌اند از: الف، پ؛ ب، ت؛ ث، د، ذ؛ ج، خ، ز؛ س؛ ذ، ش.

۰۳ (الف)

(۲، $\pi/2 + 2k\pi$) یا $(-2, -\pi/2 + 2k\pi)$ ، k عدد صحیح

(ب) $(2, 2k\pi)$ یا $(-2, (2k+1)\pi)$ ، k عدد صحیح

(پ)

$(-2, \pi/2 + 2k\pi)$ یا $(2, 3\pi/2 + 2k\pi)$ ، k عدد صحیح

(ت) $(-2, 2k\pi)$ یا $(2, (2k+1)\pi)$ ، k عدد صحیح

۰۵ (الف) (۱، ۱)

(ب) (۱، ۰)

(پ) (۰، ۰)

(ت) $(-1, -1)$

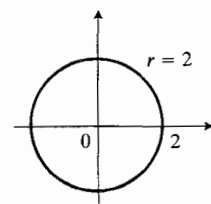
(ث) $(3\sqrt{3}/2, -3/2)$

(ج) (۳، ۲)

(چ) (۱، ۰)

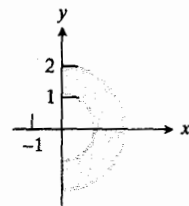
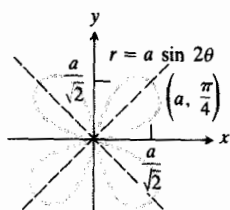
(ح) $(-\sqrt{3}, 2)$

۰۷

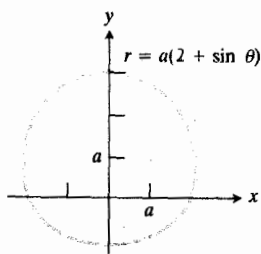


۳. تقارن نسبت به محور x ، محور y ، و مبدأ

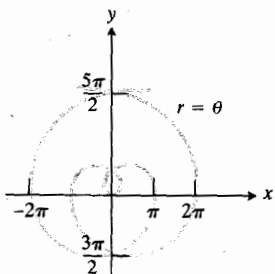
۰۲۱



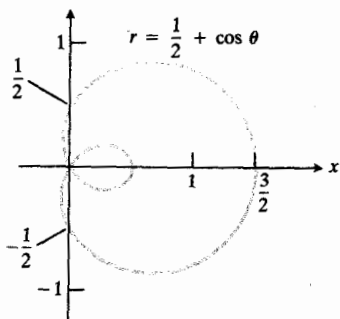
۵. تقارن نسبت به محور y



۷. تقارن نسبت به محور y



۹. الف)



۲۳. $x = 2$

۲۵. $y = 2$

۲۷. $y = 0$

۲۹. $x + y = 1$

۳۱. $x^2 + y^2 = 1$

۳۳. $y = e^x$

۳۵. $y - 2x = 5$

۳۷. $x^2 + (y - 2)^2 = 2$

۳۹. $x^2 = 4y$

۴۱. $r \cos \theta = 7$

۴۳. $\theta = \pi/2$

۴۵. $r = 2$

۴۷. $(r^2 \cos^2 \theta)/9 + (r^2 \sin^2 \theta)/2 = 1$

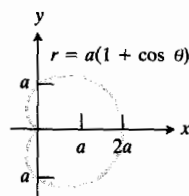
۴۹. $r = 2 \cot \theta \csc \theta$

۵۱. $x + \sqrt{3}y = 6$

۱۳. $x - y = 2$

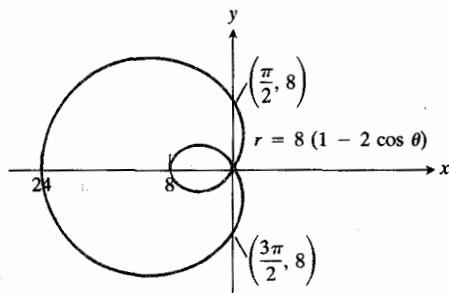
بخش ۲۰۱۰، صفحه‌های ۵۳۹ تا ۵۴۰

۹. تقارن نسبت به محور x

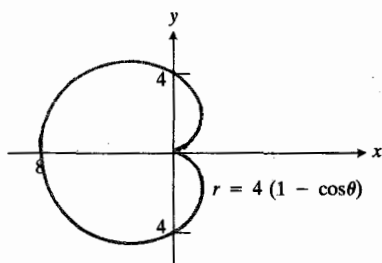


۱۱ الف)

۹. $(x^2 + y^2 + 16x)^2 = 64(x^2 + y^2)$



۱۱. $(x^2 + y^2 + 4x)^2 = 16(x^2 + y^2)$



۱۳. $3x^2 - y^2 + 16x + 16 = 0$

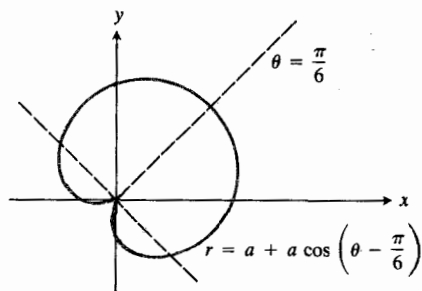
۱۵. $3x^2 + 4y^2 + 8x = 16$

۱۷. $9y^2 = -12x + 4$

۱۹. دایره به مرکز $(1, -\pi/4)$ و شعاع ۱

۲۱. خط $x + \sqrt{3}y = 10$

۲۳.

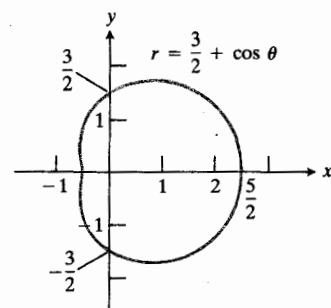


۲۵. ت

۲۷. ر

۲۹. ذ

۳۱. خ



۱۷. $(a(1 - \sqrt{2}/2), (3\pi)/4)$

$(a(1 + \sqrt{2}/2), (7\pi)/4), (0, 0)$

۱۹. $((-1 + \sqrt{5})/2, \cos^{-1}[(3 - \sqrt{5})/2])$

$((-1 + \sqrt{5})/2, 2\pi - \cos^{-1}[(3 - \sqrt{5})/2])$

۲۱. $(1, \pm \pi/12), (1, \pm 5\pi/12), (1, \pm 13\pi/12)$

$(1, \pm 17\pi/12)$

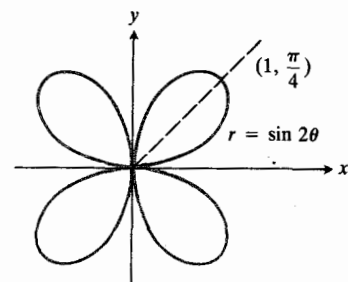
۲۳. $(1 \pm \sqrt{2}/2, 3\pi/2), (1 \pm \sqrt{2}/2, \pi/2), (0, 0)$

بخش ۳۰۱۰، صفحه‌های ۵۴۴ تا ۵۴۶

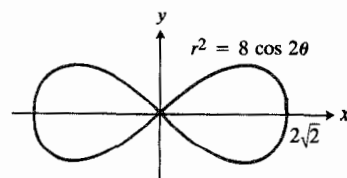
۱. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

۳. $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

۵. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$



۷. $(x^2 + y^2)^2 = 8(x^2 - y^2)$

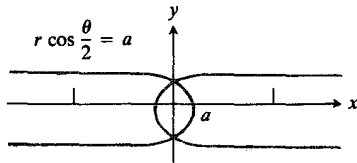


مسأله‌های گوناگون، فصل ۱۰، صفحه‌های ۵۵۲ تا ۵۵۵

۱. مارپیچ ارشمیدس (نمودار بخش ۲.۱۰، مسأله ۷ را ببینید).

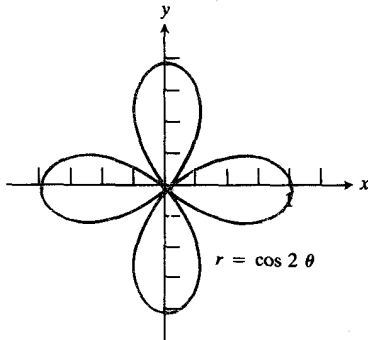
۳. الف) خط قائم $x=a$ ب) خط افقی $y=a$ پ) خم: $y=ax/(x-a)=a+a^2/(x-a)$; هذلولیبا مجانبهای $x=a$ ، $y=a$ ۵. دایره‌ای به مرکز $(-1, -1)$ و شعاع $r=3$

۷.



۹. پروانه (نظیر شکل ۱۹.۱۰)

۱۱. الف)



ب) پروانه (مقارن نسبت به محور x، محور y، و مبدأ)

۱۳. الف) سهمی

ب) سهمی

۱۵. $((a/\sqrt{2})/\sqrt{2}, \pi/2)$ ، $(0, 0)$ ۱۷. (a, π) ، $(a, 0)$ ۱۹. $(0, 0)$ ۲۱. مبدأ و نقاط $(a/2, \pm 2\pi/3)$ ، $(a/2, \pm \pi/3)$ ۲۳. الف) $y^2 - 2x = 1$ ب) $y^2 + 2x = 1$ ۳۵. عطارد: $r = 0.3707 / [1 - (0.2056) \cos \theta]$ زهره: $r = 0.7233 / [1 - (0.0068) \cos \theta]$ زمین: $r = 0.9997 / [1 - (0.0167) \cos \theta]$ مریخ: $r = 1.5107 / [1 - (0.0934) \cos \theta]$ مشتری: $r = 5.1908 / [1 - (0.0484) \cos \theta]$ زحل: $r = 9.5109 / [1 - (0.0543) \cos \theta]$ اورانوس: $r = 19.139 / [1 - (0.0460) \cos \theta]$ نپتون: $r = 30.058 / [1 - (0.0082) \cos \theta]$ ۳۷. الف) $x^2 + y^2 = 2y$ و $x=1$ ب) $(1, 1)$ یا $(\sqrt{2}, \pi/4)$ ۳۹. $r = 2/(1 - \cos \theta)$ ۴۱. $(50, 0)$ ، $r = -25/(2 - 5 \cos \theta)$

بخش ۴.۱۰، صفحه ۵۵۱

۱. $(\pi + 2)/16$ ۳. 18π ۵. πa^2 ۷. $[(3\sqrt{3} - \pi)/2]a^2$ ۹. $(\pi/2 - 1)a^2$ ۱۱. $(2\pi + 3\sqrt{3})/6$ ۱۳. $[(3\pi - 8)/2]a^2$

۱۵. ۲

۱۷. $2a^2$ ۱۹. $1/8(2\pi e^{2\pi} - e^{2\pi} + 1)$ ۲۱. الف) $2\pi a$ ب) πa پ) πa ۲۳. $2a$ ۲۵. $(2a\pi)/2$ ۲۷. $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$ ۲۹. $[2\pi(8 - \sqrt{2})]/5$

$$x^2 - \sin x = 0 \quad ۰۱۷ \text{ به } ۸۷۶۷۲۶۲۱۶ \text{ ر ه م گ ر ا س ت ؛}$$

$$x = ۱۶۵۵۶۱۱۸۵ \quad ۰۱۹ \text{ آ ر ی ؛}$$

بخش ۲۰۱۱، صفحه‌های ۵۶۸ تا ۵۷۰

$$۰ \text{ به } ۰ \text{ ه م گ ر ا س ت ؛ } -۳/۱۶, -۲/۹, -۱/۴, ۰ \quad ۰۱$$

$$۰ \text{ به } ۰ \text{ ه م گ ر ا س ت ؛ } ۱/۸۱, ۱/۲۷, ۱/۹, ۱/۳ \quad ۰۳$$

$$۰ \text{ به } ۰ \text{ ه م گ ر ا س ت ؛ } -۱/۷, ۱/۵, -۱/۳, ۱ \quad ۰۵$$

$$۰ \text{ به } ۰ \text{ و ا گ ر ا س ت ؛ } ۱, ۰, -۱, ۰ \quad ۰۷$$

$$۰ \text{ به } ۰ \text{ ه م گ ر ا س ت ؛ } -۱/۲, ۱/\sqrt{۳}, -۱/\sqrt{۲}, ۱ \quad ۰۹$$

$$۰ \text{ به } ۰ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۱۱$$

$$۱ \text{ به } ۱ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۱۳$$

$$\text{و ا گ ر ا س ت } \quad ۰۱۵$$

$$۲/۳ \text{ به } ۲/۳ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۱۷$$

$$\sqrt{۲} \text{ به } \sqrt{۲} \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۱۹$$

$$۰ \text{ به } ۰ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۲۱$$

$$\text{و ا گ ر ا س ت } \quad ۰۲۳$$

$$۱ \text{ به } ۱ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۲۵$$

$$۵ \text{ به } ۵ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۲۷$$

$$۱ \text{ به } ۱ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۲۹$$

$$۱ \text{ به } ۱ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۳۱$$

$$۵ \text{ به } ۵ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۳۳$$

$$۰ \text{ به } ۰ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۳۵$$

$$۰ \text{ به } ۰ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۳۷$$

$$\sqrt{۲} \text{ به } \sqrt{۲} \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۳۹$$

$$\text{و ا گ ر ا س ت } \quad ۰۴۱$$

$$۰ \text{ به } ۰ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۴۳$$

$$\text{و ا گ ر ا س ت } \quad ۰۴۵$$

$$۰ \text{ به } ۰ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۴۷$$

$$\pi/۲ \text{ به } \pi/۲ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۴۹$$

$$۱ \text{ به } ۱ \text{ ه م گ ر ا س ت } \quad ۰۵۱$$

$$۳x^2 - y^2 + 4x + 1 = 0 \quad ۰۲۵ \text{ الف)}$$

$$۳x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0 \quad ۰۲۶ \text{ ب)}$$

$$r = ۲/(1 + \cos \theta) \quad ۰۲۷$$

$$r = -۲a \cos \theta \quad ۰۲۹$$

$$r = ۸/(۳ - \cos \theta) \quad ۰۳۱$$

$$a^2 \quad ۰۳۳$$

$$(۳a^2\pi)/۲ \quad ۰۳۵$$

$$۲a^2 \quad ۰۳۷$$

$$(۵a^2\pi)/۲ \quad ۰۳۹$$

$$[a^2(۳\pi - ۸)]/۲ \quad ۰۴۱$$

$$(۳a\pi)/۲ \quad ۰۴۳$$

$$\tan \psi_2 = -۱/\tan \psi_1 \quad ۰۴۵ \text{ د ق ت ی}$$

$$۰ \quad ۰۴۷$$

$$۰۵۱ \text{ ن ق ا ط ت ق ا ط ع ع ب ا ر ت ا ن د ا ز } (۲, \pi/۳) \text{ و } (۲, -\pi/۳) \text{ ؛ د ر}$$

$$\beta = \pi/۲ \text{ ه ر د و ن ق ط ه ،}$$

$$۰۵۵ \text{ د ر ه ر د و ن ق ط ه ت ق ا ط ع ، } \beta = \pi/۲$$

$$\pi/۲ \quad ۰۵۷$$

$$(۵a/۶, ۰) \quad ۰۶۱$$

$$(۲a/۵, ۰) \quad ۰۶۳$$

فصل ۱۱

بخش ۱۰۱۱، صفحه‌های ۵۶۴ تا ۵۶۵

$$۱/۲ \text{ به } ۱/۲ \text{ ه م گ ر ا س ت ؛ } ۵/۹, ۲/۷, ۳/۵, ۲/۳ \quad ۰۱$$

$$۱/۳ \text{ به } ۱/۳ \text{ ه م گ ر ا س ت ؛ } -۷/۹, -۵/۷, -۳/۵, -۱/۳ \quad ۰۳$$

$$۱/۲ \text{ به } ۱/۲ \text{ ه م گ ر ا س ت ؛ } ۱/۲, ۱/۲, ۱/۲, ۱/۲ \quad ۰۵$$

$$۶۳/۳۲, ۳۱/۱۶, ۱۵/۸, ۷/۴, ۳/۲, ۱ \quad ۰۷$$

$$۱/۱۶, ۱/۸, ۱/۴, ۱/۲, ۱, ۲ \quad ۰۹$$

$$۸, ۵, ۳, ۲, ۱, ۱ \quad ۰۱۱$$

$$\sqrt{۲} \text{ ب)} \quad ۰۱۳$$

$$x = ۵۰۷۳۹۰۸۵۱۳۳ \quad ۰۱۵$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [1/(n+2)(n+3)] \quad \text{ب)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [1/(n-3)(n-2)] \quad \text{پ)}$$

$$۲/۳ \quad ۰۱۱$$

$$۷/۳ \quad ۰۱۳$$

$$۲۳/۲ \quad ۰۱۵$$

$$۵/۳ \quad ۰۱۷$$

$$۱ \quad ۰۱۹$$

$$۱/۹ \quad ۰۲۱$$

$$۲۶/۱۱۱ \quad \text{الف)} \quad ۰۲۳$$

ب) آری، هر عدد اعشاری با جزء تکراری، یک سری هندسی با نسبت 10^{-n} تشکیل می‌دهد که n تعداد ارقام تکراری است.

$$۰۲۵ \quad \text{به } ۲ + \sqrt{۲} \text{ همگراست}$$

$$۰۲۷ \quad \text{به } ۱ \text{ همگراست}$$

$$۰۲۹ \quad \text{واگراست}$$

$$۰۳۱ \quad \text{به } e^2/(e^2 - 1) \text{ همگراست}$$

$$۰۳۳ \quad \text{واگراست}$$

$$۰۳۵ \quad \text{به } ۳/۲ \text{ همگراست}$$

$$۰۳۷ \quad \text{واگراست}$$

$$۰۳۹ \quad r = -x, a = 1$$

$$۰۴۱ \quad ۸$$

$$۰۴۳ \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-n) \quad \text{را اختیار کنید}$$

$$۰۴۵ \quad \text{فرض کنید } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/3^n$$

$$\text{بخش } ۵۰۱۱, \text{ صفحه‌های } ۵۹۰ \text{ تا } ۵۹۲$$

توجه: در مسائل ۱-۲۳ جز آزمونهای ذکر شده ممکن است بتوان از آزمون دیگری نیز بهره گرفت.

$$۰۱ \quad \text{واگراست؛ سری هندسی، } r = 1/10 < 1$$

$$۰۳ \quad \text{همگراست؛ مقایسه با } \sum 1/2^n$$

$$۰۵ \quad \text{همگراست؛ مقایسه با } \sum 2/n^2$$

$$۰۷ \quad \text{واگراست؛ مقایسه با } \sum 1/n$$

$$۰۵۳ \quad \text{به } ۱/۲ \text{ همگراست}$$

$$۰۵۷ \quad \text{به ازای هر } x > 0 \text{ به } ۱ \text{ همگراست}$$

$$۰۶۱ \quad ۱$$

$$\text{بخش } ۳۰۱۱, \text{ صفحه‌های } ۵۷۲ \text{ تا } ۵۷۳$$

$$۰۱ \quad \text{به } 0 \text{ همگراست}$$

$$۰۳ \quad \text{به } 0 \text{ همگراست}$$

$$۰۵ \quad \text{به } 0 \text{ همگراست}$$

$$۰۷ \quad \text{به } e^7 \text{ همگراست}$$

$$۰۹ \quad \text{به } 0 \text{ همگراست}$$

$$۰۱۱ \quad \text{واگراست}$$

$$۰۱۳ \quad \text{به } ۱ \text{ همگراست}$$

$$۰۱۵ \quad \text{به } 0 \text{ همگراست}$$

$$۰۱۷ \quad \text{به } ۱/e \text{ همگراست}$$

$$۰۱۹ \quad \text{به } 0 \text{ همگراست}$$

$$۰۲۱ \quad \text{به } x \text{ همگراست}$$

$$۰۲۳ \quad \text{به } ۱ \text{ همگراست}$$

$$۰۲۵ \quad \text{به } ۱ \text{ همگراست}$$

$$۰۲۷ \quad \text{به } ۱/e \text{ همگراست}$$

$$۰۲۹ \quad \text{به } 0 \text{ همگراست}$$

$$۰۳۱ \quad \text{واگراست}$$

$$۰۳۳ \quad \text{به } ۱/(p-1) \text{ همگراست}$$

$$۰۳۵ \quad n \geq 9124$$

$$۰۳۷ \quad n > 1075$$

$$\text{بخش } ۴۰۱۱, \text{ صفحه‌های } ۵۸۱ \text{ تا } ۵۸۳$$

$$۰۱ \quad S_n = 2[1 - (1/3)^n]; 3$$

$$۰۳ \quad S_n = (1 - e^{-n})/(1 - e^{-1}); e/(e-1)$$

$$۰۵ \quad S_n = [1 - (-2)^n]/3; \text{ واگراست}$$

$$۰۷ \quad S_n = -\ln(n+1); \text{ واگراست}$$

$$۰۹ \quad \text{الف)} \quad \sum_{n=-2}^{\infty} [1/(n+2)(n+5)]$$

۹. همگراست؛ سری هندسی با $r = 2/3 < 1$ ۱۱. واگراست؛ مقایسه با $\sum 1/(n+1)$ ۱۳. واگراست؛ $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n/(n+1) \neq 0$ ۱۵. همگراست؛ مقایسه با $\sum 1/n^{3/2}$

۱۷. واگراست؛ آزمون انتگرال

۱۹. واگراست؛ $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + (1/n)]^n = e \neq 0$ ۲۱. همگراست؛ مجموع دوسری همگرا، $\sum 1/n^2$ و $-\sum 1/2^n$ ۲۳. همگراست؛ مقایسه با $\sum 1/3^{n-1}$ ۲۷. $S_n < 21552$

بخش ۶.۱۱، صفحه‌های ۵۹۷ تا ۵۹۸

توجه: جز استدلالهای عرضه شده ممکن است استدلالهای مناسب دیگری نیز وجود داشته باشد.

۱. همگراست؛ آزمون نسبت

۳. همگراست؛ آزمون ریشه

۵. واگراست؛ $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n-2)/n]^n = e^{-2} \neq 0$

۷. واگراست؛ آزمون نسبت

۹. واگراست؛ آزمون ریشه n ۱۱. واگراست؛ مقایسه با $\sum 1/n$

۱۳. همگراست؛ آزمون مقایسه‌ای حدی

۱۵. واگراست؛ آزمون مقایسه‌ای حدی

۱۷. واگراست؛ آزمون انتگرال

۱۹. واگراست؛ آزمون مقایسه‌ای حدی

۲۱. همگراست؛ آزمون نسبت

۲۳. همگراست؛ آزمون نسبت

۲۵. همگراست؛ آزمون نسبت

۲۷. به ازای $-2 < x < 2$ همگراست۲۹. به ازای $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ همگراست۳۱. به ازای $-1 \leq x \leq 1$ همگراست

۳۳. همگراست؛ آزمون نسبت

۳۵. واگراست؛ آزمون انتگرال

۳۷. همگراست؛ آزمون نسبت

۳۹. همگراست؛ آزمون نسبت

۴۱. همگراست؛ مقایسه با $\sum 1/n^4$

بخش ۷.۱۱، صفحه‌های ۶۰۱ تا ۶۰۲

توجه: جز استدلالهای عرضه شده ممکن است استدلالهای مناسب دیگری نیز وجود داشته باشد.

۱. مطلقاً همگراست؛ سری به ازای $p=2$ ۳. واگراست؛ $\sum 1/n$ واگراست و

$$\sum [(1-n)/n^2] = \sum 1/n^2 - \sum 1/n$$

۵. مطلقاً همگراست؛ مقایسه با $\sum 1/n^2$ ۷. مطلقاً همگراست؛ مقایسه با p سری به ازای $p=3/2$

۹. مطلقاً همگراست؛ آزمون نسبت

۱۱. واگراست؛ آزمون جمله n ۱۳. مطلقاً همگراست؛ سری هندسی با $r=1/5 < 1$

۱۵. مطلقاً همگراست؛ آزمون نسبت

۱۷. مطلقاً همگراست؛ مقایسه با p سری $\sum 1/n^2 - 2 \sum 1/n^3$

بخش ۸.۱۱، صفحه‌های ۶۰۶ تا ۶۰۸

۱. همگراست

۳. واگراست

۵. همگراست

۷. همگراست

۹. همگراست

۱۱. مطلقاً همگراست

۱۳. مطلقاً همگراست

۱۵. به طور مشروط همگراست

۱۷. واگراست

۱۹. به طور مشروط همگراست

۲۱. مطلقاً همگراست

فصل ۱۲

بخش ۲۰۱۲، صفحه‌های ۶۲۳ تا ۶۲۴

$$۱ - x + x^2/2! - x^3/3! \quad ۰۱$$

$$۱ - x + x^2/2! - x^3/3! + x^4/4! \quad ۰۲$$

$$۱ - x^2/2! + x^4/4! ; ۱ - x^2/2! \quad ۰۳$$

$$x + x^3/3! ; x + x^3/3! \quad ۰۵$$

$$۱ - 2x + x^2 ; ۱ - 2x \quad ۰۷$$

$$۱ - 2x + x^2 ; ۱ - 2x + x^2 \quad ۰۹$$

$$x^2 \quad ۰۱۱$$

$$۱ + (3/2)x + (1/2!)(3/2)(1/2)x^2 \quad ۰۱۳$$

$$+ (1/3!)(3/2)(1/2)(-1/2)x^3 + \dots$$

$$+ (1/n!)[(3)(1)(-1)(-3) \dots$$

$$(\Delta - 2n)/2^n] x^n + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{10} (x-10)^n / n! \quad ۰۱۵$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (x-1)^n / n \quad ۰۱۷$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n \quad ۰۱۹$$

$$۱ + 2(x - \pi/2) + 2(x - \pi/2)^2 \quad ۰۲۱$$

بخش ۳۰۱۲، صفحه‌های ۶۳۰ تا ۶۳۱

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^n / 2^n n!) \quad ۰۱$$

$$\Delta \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [x^{2n} / \pi^{2n} (2n)!] \quad ۰۳$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (x^{2n} / 2n!) \quad ۰۵$$

$$۱ - x + x^2 + R_2(x) \quad ۰۹$$

$$۱ + (1/2)x - (1/8)x^2 + R_2(x) \quad ۰۱۱$$

$$|x| < (0.06)^{1/5} \approx 0.57 \quad ۰۱۳$$

$$|R_2| \leq 10^{-9}/3! < 1.67 \times 10^{-10} \quad ۰۱۵$$

$$x < \sin x, -10^{-3} < x < 0$$

$$|R_2| \leq e^{0.1}/6000 < 1.85 \times 10^{-4} \quad ۰۱۷$$

۰۲۳ مطلقاً همگراست

۰۲۵ واگراست

۰۲۷ به‌طور مشروط همگراست

۰۲۹ ۰۲

۰۳۱ 2×10^{-11}

۰۳۳ ۵۴۰۳۰

۰۳۵ الف a_n کاهش نمی‌یابدب $-1/2$ ۰۳۹ فرض کنید $a_n = b_n = (-1)^{n+1}/\sqrt{n}$

بخش ۹۰۱۱، صفحه‌های ۶۰۹ تا ۶۱۰

۰۱ همگراست

۰۳ همگراست

۰۵ واگراست

۰۷ همگراست

۰۹ همگراست

۰۱۱ واگراست

۰۱۳ واگراست

۰۱۵ واگراست

۰۱۷ واگراست

۰۱۹ همگراست

مسئله‌های گوناگون، فصل ۱۱، صفحه ۶۱۵

۰۱ $S_n = \ln[(n+1)/2n]$ ؛ به $\ln 1/2$ همگراست۰۷ واگراست؛ $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh n = 1 \neq 0$

۰۹ واگراست

۰۱۱ همگراست

۰۱۳ واگراست

۰۱۵ همگراست

۰۱۷ واگراست

۰۱۹ همگراست

$$-\infty < x < \infty \quad ۰.۱۱$$

$$x = -1/e \text{ در } |x| < 1/e \text{ و اگر است؛ در } x = 1/e \text{ همگراست} \quad ۰.۱۳$$

$$x = 0 \quad ۰.۱۵$$

$$x = 1/2, 3/2 \text{ در } 1/2 < x < 3/2 \text{ و اگر است} \quad ۰.۱۷$$

$$x = \pm \sqrt{3} \text{ در } |x| < \sqrt{3} \text{ و اگر است} \quad ۰.۱۹$$

$$e^{3x+6} \quad ۰.۲۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n)x^{2n-1} \quad ۰.۲۵$$

$$۰.۲۷ \quad ۰.۲۷$$

$$۰.۲۹ \quad ۰.۲۹$$

$$۰.۳۱ \quad ۰.۳۱$$

$$۰.۳۳ \quad ۰.۳۳$$

$$\sinh^{-1}x = x - (1/6)x^3 + (3/40)x^5 \quad ۰.۳۵$$

$$-(5/112)x^7 + \dots$$

$$\sinh^{-1}0.25 \approx 0.247 \quad ۰.۳۷$$

$$۰.۳۷ \text{ مسأله ۱۵ چنین مثالی است}$$

$$x + x^2 + x^3/3 - x^5/40 + \dots \quad ۰.۴۱$$

$$x^2/2 + x^4/12 + x^6/45 + \dots \quad ۰.۴۳$$

$$۰.۴۵ \text{ (ب) آری}$$

$$\text{بخش ۶.۱۲، صفحه ۶۴۹}$$

$$۱.۰۱$$

$$-1/24 \quad ۰.۳$$

$$-2 \quad ۰.۵$$

$$0 \quad ۰.۷$$

$$-1/3 \quad ۰.۹$$

$$1/120 \quad ۰.۱۱$$

$$1/3 \quad ۰.۱۳$$

$$-1 \quad ۰.۱۵$$

$$3 \quad ۰.۱۷$$

$$0 \quad ۰.۱۹$$

$$|R_f| \leq [(0.5)^5/5!] \cosh 0.5 < 0.0003 \quad ۰.۱۹$$

$$-1 + 0i \quad ۰.۲۳$$

$$\sqrt{2}/2 + (\sqrt{2}/2)i \quad ۰.۲۵$$

$$0 - i \quad ۰.۲۷$$

$$0 + i \quad ۰.۲۹$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = [e^{ax}/(a^2 + b^2)](a \cos bx + b \sin bx) + C_1 \quad ۰.۲۷$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = [e^{ax}/(a^2 + b^2)](a \sin bx - b \cos bx) + C_2$$

$$\text{بخش ۴.۱۲، صفحه‌های ۶۳۶ تا ۶۳۸}$$

$$0.1 \text{ rad} \approx 5.73^\circ \text{؛ از رابطه زیر استفاده کنید}$$

$$\cos x \approx 1 - x^2/2! + x^4/4! \approx 0.857 \quad ۰.۱۱$$

$$|R| \leq [(0.5411)^6/6!] < 3.5 \times 10^{-5}$$

$$\sin 6.3 \approx \sin(2\pi + 0.068) = \sin(0.068) \quad ۰.۳$$

$$\sin x \approx x = 0.068$$

$$|R| \leq [(0.068)^3/3!] < 7.91 \times 10^{-7}$$

$$\ln(1+x) \approx x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 \approx 0.223 \quad ۰.۵$$

$$|R| \leq [(0.25)^5/5] < 2 \times 10^{-4} \text{ استفاده کنید؛}$$

$$-1/2 < x \leq 1/2 \text{؛ } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [(2^n x^n)/n] \quad ۰.۷$$

$$0.100 \quad ۰.۹$$

$$\ln(3/2) \quad ۰.۱۳$$

$$C_f \approx 3.1216127 \quad ۰.۱۷$$

$$۰.۲۱ \text{ (ب) } 6$$

$$1/q \text{ (ت)}$$

$$\text{بخش ۵.۱۲، صفحه‌های ۶۴۵ تا ۶۴۸}$$

$$|x| < 1 \text{؛ در } x = \pm 1 \text{ و اگر است} \quad ۰.۱$$

$$|x| < 2 \text{؛ در } x = \pm 2 \text{ و اگر است} \quad ۰.۳$$

$$-\infty < x < \infty \quad ۰.۵$$

$$-2 < x < 0 \text{؛ در } x = -4, 0 \text{ و اگر است} \quad ۰.۷$$

$$|x| < 1 \text{؛ در } x = \pm 1 \text{ همگراست} \quad ۰.۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} ((\sin x)/x)^{1/x^2} = e^{-1/2} \quad ۰۱۹$$

$$۱/۲ \quad ۰۲۱$$

$$-۵ \leq x < ۱ \quad ۰۲۱$$

$$\sin x \approx ۶x/(۶+x^2) \quad ۰۲۳$$

$$-\infty < x < \infty \quad ۰۲۳$$

$$۱ < x < ۵ \quad ۰۲۵$$

$$۰ \leq x \leq ۲ \quad ۰۲۷$$

$$-\infty < x < \infty \quad ۰۲۹$$

$$x \geq ۱/۲ \quad ۰۳۱$$

$$x + x^2 + (2/3)x^3 + (2/3)x^4 + (13/15)x^5 + \dots \quad ۰۳۷$$

پیوستها

پ۱، صفحه ۶۵۸

۰۱ به ازای هر عدد صحیح مثبت n اگر وقتی که $t \rightarrow c$ داشته باشیم
 $F_n(t) \rightarrow L_n, \dots, F_7(t) \rightarrow L_7, F_1(t) \rightarrow L_1$
 داریم $t \rightarrow c$

$$F_1(t) + F_7(t) + \dots + F_n(t) \rightarrow L_1 + L_7 + \dots + L_n$$

پ۵، صفحه ۶۶۷

$$c = -۱ \quad ۰۱$$

$$\frac{-1 + \sqrt{37}}{3} \quad ۰۳$$

مسئله‌های گوناگون، فصل ۱۲، صفحه‌های ۶۵۲ تا ۶۵۴

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2} \quad ۰۱ \text{ (الف)}$$

ب) خیر: سری به ازای $|x| < ۱$ همگراست

$$۱ + x + x^2/2 - x^4/8 \quad ۰۳$$

$$-x^2/2 - x^4/12 - x^6/45 - \dots \quad ۰۵ \text{ (الف)}$$

$$-۰۰۰۰۰۱۷ \quad ۰۶$$

$$۰۰۷۴۷ \quad ۰۷$$

$$۱ < x < ۳; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-2)^n \quad ۰۹$$

$$\cos x = (1/2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x - \pi/3)^{2n} / 2n! \quad ۰۱۱$$

$$+ (\sqrt{3}/2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x - \pi/3)^{2n+1} / (2n+1)!$$

$$f(1) = ۱۵۴۳ \quad ۰۱۳$$

$$e^{(e^x)} = e[1 + x + x^2 + (5/6)x^3 + \dots] \quad ۰۱۵$$

$$|E| \leq ۰۰۰۰۱۱ \quad ۰۱۷$$

جدول مختصر انتگرالها

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, \quad a > 0. \quad ۲$$

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad ۱$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C. \quad ۲$$

$$\int \cos u du = \sin u + C. \quad ۳$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1. \quad ۵$$

$$\int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C. \quad ۶$$

$$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2} \left[\frac{ax+b}{n+2} - \frac{b}{n+1} \right] + C, \quad n \neq -1, -2. \quad ۷$$

$$\int x(ax+b)^{-1} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln|ax+b| + C. \quad ۸$$

$$\int x(ax+b)^{-2} dx = \frac{1}{a^2} \left[\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b} \right] + C. \quad ۹$$

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b} \ln \left| \frac{x}{ax+b} \right| + C. \quad ۱۰$$

$$\int (\sqrt{ax+b})^n dx = \frac{2}{a} \frac{(\sqrt{ax+b})^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2. \quad ۱۱$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + b \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}. \quad ۱۲$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, \quad b < 0. \quad (الف) \quad ۱۳$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| + C, \quad b > 0. \quad (ب) \quad ۱۴$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C. \quad ۱۵$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C. \quad ۱۶$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C. \quad ۱۷$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^2} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C. \quad ۱۸$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C. \quad ۱۹$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{a^2 - x^2} \quad .19$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C = \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C \quad .20$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C \quad .21$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x(a^2 + 2x^2)\sqrt{a^2 + x^2}}{8} - \frac{a^6}{8} \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C \quad .22$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 + x^2} - a \sinh^{-1} \left| \frac{a}{x} \right| + C \quad .23$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^2} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} + C \quad .24$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = -\frac{a^2}{2} \sinh^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{2} + C \quad .25$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right| + C \quad .26$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad .28$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2 x} + C \quad .27$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad .29$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^6}{8} \sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{8} x \sqrt{a^2 - x^2} (a^2 - 2x^2) + C \quad .30$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C \quad .31$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C \quad .32$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C \quad .33$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C \quad .35$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C \quad .34$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \quad .36$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C \quad .37$$

$$\int (\sqrt{x^r - a^r})^n dx = \frac{x(\sqrt{x^r - a^r})^n}{n+1} - \frac{na^r}{n+1} \int (\sqrt{x^r - a^r})^{n-2} dx, \quad n \neq -1 \quad .۳۸$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{x^r - a^r})^n} = \frac{x(\sqrt{x^r - a^r})^{2-n}}{(2-n)a^r} - \frac{n-2}{(n-2)a^r} \int \frac{dx}{(\sqrt{x^r - a^r})^{n-2}}, \quad n \neq 2 \quad .۳۹$$

$$\int x(\sqrt{x^r - a^r})^n dx = \frac{(\sqrt{x^r - a^r})^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2 \quad .۴۰$$

$$\int x^r \sqrt{x^r - a^r} dx = \frac{x}{\lambda} (\sqrt{x^r - a^r}) \sqrt{x^r - a^r} - \frac{a^r}{\lambda} \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C \quad .۴۱$$

$$\int \frac{\sqrt{x^r - a^r}}{x} dx = \sqrt{x^r - a^r} - a \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C \quad .۴۲$$

$$\int \frac{\sqrt{x^r - a^r}}{x^r} dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^r - a^r}}{x} + C \quad .۴۳$$

$$\int \frac{x^r}{\sqrt{x^r - a^r}} dx = \frac{a^r}{r} \cosh^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{r} \sqrt{x^r - a^r} + C \quad .۴۴$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^r - a^r}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C = \frac{1}{a} \cos^{-1} \left| \frac{a}{x} \right| + C \quad .۴۵$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^r}} = \sin^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) + C \quad .۴۶$$

$$\int \frac{dx}{x^r \sqrt{x^r - a^r}} = \frac{\sqrt{x^r - a^r}}{a^r x} + C \quad .۴۷$$

$$\int \sqrt{2ax - x^r} dx = \frac{x-a}{r} \sqrt{2ax - x^r} + \frac{a^r}{r} \sin^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) + C \quad .۴۸$$

$$\int (\sqrt{2ax - x^r})^n dx = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax - x^r})^n}{n+1} + \frac{na^r}{n+1} \int (\sqrt{2ax - x^r})^{n-2} dx \quad .۴۹$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{2ax - x^r})^n} = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax - x^r})^{2-n}}{(n-2)a^r} + \frac{(n-2)}{(n-2)a^r} \int \frac{dx}{(\sqrt{2ax - x^r})^{n-2}} \quad .۵۰$$

$$\int x \sqrt{2ax - x^r} dx = \frac{(x+a)(2x-ra)\sqrt{2ax - x^r}}{r} + \frac{a^r}{r} \sin^{-1} \frac{x-a}{a} + C \quad .۵۱$$

$$\int \frac{\sqrt{2ax - x^r}}{x} dx = \sqrt{2ax - x^r} + a \sin^{-1} \frac{x-a}{a} + C \quad .۵۲$$

$$\int \frac{\sqrt{2ax - x^r}}{x^r} dx = -\frac{1}{r} \sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \sin^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) + C \quad .۵۳$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{2ax - x^r}} = a \sin^{-1} \frac{x-a}{a} - \sqrt{2ax - x^r} + C \quad .۵۴$$

$$\frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C \quad .55$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + C \quad .57$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C \quad .56$$

$$\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C \quad .59$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C \quad .58$$

$$\int \sin^n ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax \, dx \quad .60$$

$$\int \cos^n ax \, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, dx \quad .61$$

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad a^2 \neq b^2 \quad (\text{الف}) \quad .62$$

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2 \quad (\text{ب})$$

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2 \quad (\text{پ})$$

$$\int \sin ax \cos ax \, dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C \quad .63$$

$$\int \sin^n ax \cos ax \, dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1 \quad .64$$

$$\int \frac{\cos ax}{\sin ax} \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + C \quad .65$$

$$\int \cos^n ax \sin ax \, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1 \quad .66$$

$$\int \frac{\sin ax}{\cos ax} \, dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax| + C \quad .67$$

$$\int \sin^n ax \cos^m ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^{n-2} ax \cos^m ax \, dx \quad .68$$

$n \neq -m$ (اگر $n = -m$ ، شماره ۸۶ را به کار ببرید.)

$$\int \sin^n ax \cos^m ax \, dx = \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^n ax \cos^{m-2} ax \, dx \quad .69$$

$m \neq -n$ (اگر $m = -n$ ، شماره ۸۷ را به کار ببرید.)

$$\int \frac{dx}{b+c \sin ax} = \frac{-1}{a\sqrt{b^2-c^2}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) \right] + C, \quad b^2 > c^2 \quad .70$$

$$\int \frac{dx}{b+c \sin ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2-b^2}} \ln \left| \frac{c+b \sin ax + \sqrt{c^2-b^2} \cos ax}{b+c \sin ax} \right| + C, \quad b^2 < c^2 \quad .71$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{ax}{2} \right) + C \quad .72$$

$$\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a} \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{ax}{2} \right) + C \quad .73$$

$$\int \frac{dx}{b+c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2-c^2}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan \frac{ax}{2} \right] + C, \quad b^2 > c^2 \quad .74$$

$$\int \frac{dx}{b+c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}} \ln \left| \frac{c+b \cos ax + \sqrt{c^2-b^2} \sin ax}{b+c \cos ax} \right| + C, \quad b^2 < c^2 \quad .75$$

$$\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2} + C \quad .76$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2} + C \quad .77$$

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax + C \quad .78$$

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax + C \quad .79$$

$$\int x^n \sin ax \, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx \quad .80$$

$$\int x^n \cos ax \, dx = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx \quad .81$$

$$\int \cot ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + C \quad .82$$

$$\int \tan ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sec ax| + C \quad .83$$

$$\int \cot^n ax \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax - x + C \quad .84$$

$$\int \tan^n ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax - x + C \quad .85$$

$$\int \tan^n ax \, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1 \quad .86$$

$$\int \cot^n ax \, dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1 \quad .87$$

$$\int \csc ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln |\csc ax + \cot ax| + C \quad .88$$

$$\int \sec ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sec ax + \tan ax| + C \quad .89$$

$$\int \csc^n ax \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax + C \quad .90$$

$$\int \sec^n ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax + C \quad .91$$

$$\int \sec^n ax \, dx = \frac{\sec^{n-1} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1 \quad .92$$

$$\int \csc^n ax \, dx = -\frac{\csc^{n-1} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1 \quad .93$$

$$\int \sec^a ax \tan ax \, dx = \frac{\sec^a ax}{na} + C, \quad n \neq 0 \quad .۹۲$$

$$\int \csc^a ax \cot ax \, dx = -\frac{\csc^a ax}{na} + C, \quad n \neq 0 \quad .۹۵$$

$$\int \sin^{-1} ax \, dx = x \sin^{-1} ax + \frac{1}{a} \sqrt{1-a^2 x^2} + C \quad .۹۶$$

$$\int \cos^{-1} ax \, dx = x \cos^{-1} ax - \frac{1}{a} \sqrt{1-a^2 x^2} + C \quad .۹۷$$

$$\int \tan^{-1} ax \, dx = x \tan^{-1} ax - \frac{1}{2a} \ln(1+a^2 x^2) + C \quad .۹۸$$

$$\int x^n \sin^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-a^2 x^2}}, \quad n \neq -1 \quad .۹۹$$

$$\int x^n \cos^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-a^2 x^2}}, \quad n \neq -1 \quad .۱۰۰$$

$$\int x^n \tan^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{1+a^2 x^2}, \quad n \neq -1 \quad .۱۰۱$$

$$\int b^{ax} \, dx = \frac{1}{a} \frac{b^{ax}}{\ln b} + C, \quad b > 0, \quad b \neq 1 \quad .۱۰۲$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad .۱۰۲$$

$$\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx \quad .۱۰۵$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax-1) + C \quad .۱۰۴$$

$$\int x^n b^{ax} \, dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b} \int x^{n-1} b^{ax} \, dx, \quad b > 0, \quad b \neq 1 \quad .۱۰۶$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C \quad .۱۰۷$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C \quad .۱۰۸$$

$$\int \ln ax \, dx = x \ln ax - x + C \quad .۱۰۹$$

$$\int x^n \ln ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln ax - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \quad n \neq -1 \quad .۱۱۰$$

$$\int \frac{dx}{x \ln ax} = \ln |\ln ax| + C \quad .۱۱۲$$

$$\int x^{-1} \ln ax \, dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 + C \quad .۱۱۱$$

$$\int \cosh ax \, dx = \frac{1}{a} \sinh ax + C \quad .۱۱۴$$

$$\int \sinh ax \, dx = \frac{1}{a} \cosh ax + C \quad .۱۱۳$$

$$\int \cosh^{\gamma} ax \, dx = \frac{\sinh^{\gamma} ax}{\gamma a} + \frac{x}{\gamma} + C \quad .116$$

$$\int \sinh^{\gamma} ax \, dx = \frac{\sinh^{\gamma} ax}{\gamma a} - \frac{x}{\gamma} + C \quad .115$$

$$\int \sinh^n ax \, dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 0 \quad .117$$

$$\int \cosh^n ax \, dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 0 \quad .118$$

$$\int x \sinh ax \, dx = \frac{x}{a} \cosh ax - \frac{1}{a^2} \sinh ax + C \quad .119$$

$$\int x \cosh ax \, dx = \frac{x}{a} \sinh ax - \frac{1}{a^2} \cosh ax + C \quad .120$$

$$\int x^n \sinh ax \, dx = \frac{x^n}{a} \cosh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cosh ax \, dx \quad .121$$

$$\int x^n \cosh ax \, dx = \frac{x^n}{a} \sinh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sinh ax \, dx \quad .122$$

$$\int \coth ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sinh ax| + C \quad .124$$

$$\int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a} \ln (\cosh ax) + C \quad .123$$

$$\int \coth^{\gamma} ax \, dx = x - \frac{1}{a} \coth ax + C \quad .126$$

$$\int \tanh^{\gamma} ax \, dx = x - \frac{1}{a} \tanh ax + C \quad .125$$

$$\int \tanh^n ax \, dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1 \quad .127$$

$$\int \coth^n ax \, dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1 \quad .128$$

$$\int \operatorname{sech} ax \, dx = \frac{1}{a} \sin^{-1} (\tanh ax) + C \quad .129$$

$$\int \operatorname{sech}^{\gamma} ax \, dx = \frac{1}{a} \tanh ax + C \quad .131$$

$$\int \operatorname{csch} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \left| \tanh \frac{ax}{\gamma} \right| + C \quad .130$$

$$\int \operatorname{csch}^{\gamma} ax \, dx = -\frac{1}{a} \coth ax + C \quad .132$$

$$\int \operatorname{sech}^n ax \, dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-1} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{sech}^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1 \quad .133$$

$$\int \operatorname{csch}^n ax \, dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-1} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{csch}^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1 \quad .134$$

$$\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax \, dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0 \quad .135$$

$$\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax \, dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0. \quad ۱۳۶$$

$$\int e^{ax} \sinh bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} \left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b} \right] + C, \quad a^2 \neq b^2. \quad ۱۳۷$$

$$\int e^{ax} \cosh bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} \left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b} \right] + C, \quad a^2 \neq b^2. \quad ۱۳۸$$

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} \, dx = \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n > 0. \quad ۱۳۹$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0. \quad ۱۴۰$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ عددی صحیح و زوج و نا کمتر از } ۲ \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n}, & n \text{ عددی صحیح و فرد و نا کمتر از } ۳ \end{cases} \quad ۱۴۱$$